

Εργασία 2

Παράδοση 20/1/08

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{7x^2 + 2x + 4}$

B. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

Γ. $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x} + e^{\beta y}}$ όπου $x > 0, y > 0$

Δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ όπου $f(x) = \sqrt{5x+1}$

Κάνετε απευθείας τις πράξεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγώγους.
Επιβεβαιώστε ότι το παραπάνω όριο ισούται με $f'(x)$

E. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

ΣΤ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + 7^{1/x}}{2 + 5^{1/x}}$

2 Μελετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις: Βρείτε τα πεδία ορισμού, τιμών, ακρότατα, σημεία καμπής, διαστήματα μονοτονίας, ασύμπτωτες (οριζόντιες, κάθετες ή πλάγιες). Διερευνήστε αν είναι συνεχείς και κάνετε τη σχετική γραφική παράσταση.

A. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

B. $g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$

Υπόδειξη: Η ευθεία $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y) = 0$. Τότε $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$ και $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.

3. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = R \cos(2\pi t) \hat{i} + R \sin(2\pi t) \hat{j}$.

A. Σχεδιάστε στο επίπεδο τα σημεία που διατρέχει η κορυφή του διανύσματος $\vec{r}(t)$ για $0 \leq t \leq 1$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{r}(1/8)$.

B. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\hat{v}(t) = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} \quad \text{και δείξτε ότι } \hat{v}(t) \perp \vec{r}(t).$$

Γ. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{d\hat{v}/dt}{|d\vec{r}/dt|} \quad \text{και σχεδιάστε το } \vec{\kappa}(1/8).$$

Δείξτε ότι $|\vec{\kappa}(t)| = 1/R$ και ότι $\vec{\kappa}(t) \perp \hat{v}(t)$.

Δ. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\hat{b}(t) = \hat{v}(t) \times \hat{\kappa}(t) \quad \text{όπου } \hat{\kappa} = \vec{\kappa}/|\vec{\kappa}|.$$

Σχόλιο: Στον κλάδο των μαθηματικών που λέγεται διαφορική γεωμετρία, το σύστημα των διανυσμάτων $\{\hat{v}, \hat{\kappa}, \hat{b}\}$ αποτελεί σε κάθε σημείο μιας καμπύλης ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων, το εφαπτόμενο διάνυσμα, το πρώτο και δεύτερο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη αντίστοιχα. Το διάνυσμα $\vec{\kappa}(t)$ είναι σε κάθε σημείο της καμπύλης το διάνυσμα της καμπυλότητας. Έχει την τιμή που θα περιμένατε; (εκτός βαθμολογίας)

4. Α. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t} dt$$

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx$$

Γ. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ των γραφικών παραστάσεων

$$y = \sin x, \quad y = \sin^3 x \quad \text{και των ευθειών } x=0 \quad \text{και } x = \frac{\pi}{2}.$$

5. Α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

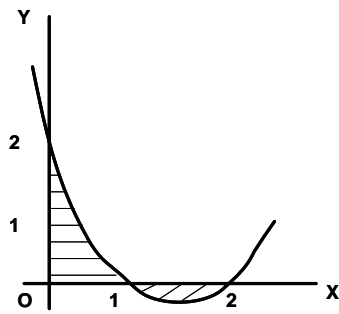
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} d\theta$$

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

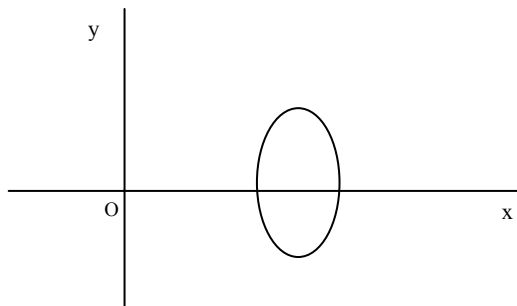
$$\int \cos(\sqrt{x}) dx$$

Γ. Έστω $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t^3 dt + x^3$. Να υπολογιστούν τα $f(1)$ και $f'(x)$.

6. Α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της $y = x^2 - 3x + 2$ και τον άξονα των x .



Β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $x = 3 + \cos \theta, y = 4 \sin \theta$



7. Α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$
- Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx$
- Γ. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

8. Δίδονται τρία σημεία στο χώρο με συντεταγμένες $A(10,0)$, $B(0,0)$ και $\Gamma(0,10)$ τα οποία αποτελούν κορυφές τριγώνου. Να βρεθούν: α) η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου και β) η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου στο παραπάνω τρίγωνο.

Υπόδειξη: Από την ευκλείδειο γεωμετρία γνωρίζουμε ότι στον εγγεγραμμένο κύκλο οι πλευρές του τριγώνου είναι εφαπτόμενες στον κύκλο.

9. Α. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι περιγεγραμμένο γύρω από ένα κύκλο με κέντρο $(4,2)$ και ακτίνα 2. Ο άξονας των Ox είναι η μία πλευρά, να βρεθούν οι άλλες δύο.

Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που περνάνε από το $(5,1)$ και απέχουν απόσταση 1 από το $(0,0)$.

Υπόδειξη: Από την ευκλείδειο γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα τρίγωνο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.

10. Βρείτε α) την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $9x^2 + 5y^2 = 36x - 30y - 36$ στα σημεία με τετμημένη δύο ($x = 2$) και β) προσδιορίστε το είδος της καμπύλης καθώς και τα χαρακτηριστικά της στοιχεία.