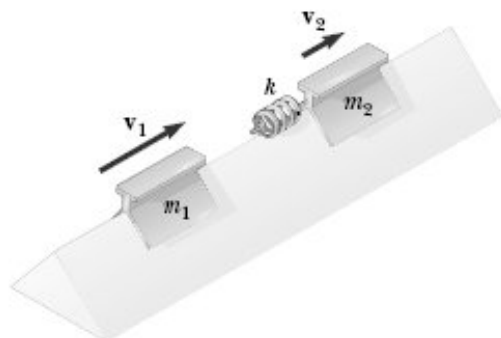


## ΕΡΓΑΣΙΑ 4<sup>η</sup>

Παράδοση 16-3-2009

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

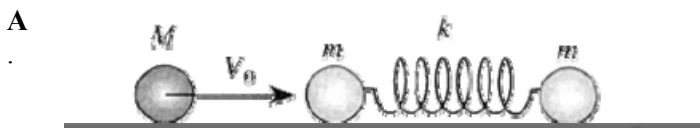
### Άσκηση 1



Δύο σώματα  $m_1$  και  $m_2$  κινούνται χωρίς τριβές στην τροχιά που φαίνεται στο σχήμα με ταχύτητες  $\vec{V}_1$  και  $\vec{V}_2$  αντίστοιχα,  $|\vec{V}_1| > |\vec{V}_2|$ . Ελατήριο σταθεράς  $k$  και αμελητέας μάζας προσαρμόζεται στο ένα εξ αυτών. Να βρεθούν (α) οι διανυσματικές ταχύτητες των σωμάτων την στιγμή που η συσπίρωση του ελατηρίου είναι μέγιστη, (β) η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, (γ) η διανυσματική ταχύτητα κάθε

σώματος μετά την απώλεια της επαφής του σώματος  $m_1$  από το ελατήριο και (δ) το έργο της δύναμης του ελατηρίου μέχρι την στιγμή που η παραμόρφωση του θα είναι η μισή της μέγιστης.

### Άσκηση 2



Δύο σώματα με μάζες  $m_1 = m_2 = m$  συνδέονται με ελατήριο σταθεράς  $k$  αμελητέας μάζας και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα των δύο μαζών

αρχικά είναι ακίνητο, ενώ μια μάζα  $M$  κινούμενη με ταχύτητα  $V_0$  συγκρούεται ελαστικά με την μάζα  $m_1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθούν

1. η ταχύτητα που θα αποκτήσει η κάθε μάζα αμέσως μετά την κρούση
2. Να γραφεί η συνάρτηση της απόστασης,  $d$ , του κέντρου μάζας του συστήματος ελατήριο/ $m_1, m_2$  από την μάζα  $M$  ως προς τον χρόνο, αν  $t = 0$  είναι η στιγμή αμέσως μετά την κρούση.
3. Ποια είναι η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου;
4. Να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση του συστήματος ελατήριο/ $m_1, m_2$  αμέσως μετά την κρούση.

- B** Σώμα μάζας  $m$  αφήνεται ελεύθερο σε ύψος  $h$  πάνω από την επιφάνεια της γης. (α) Να βρεθεί η ταχύτητα που αποκτά το σώμα σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της γης (β) Αν υποθεθεί ότι το ύψος στο οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα είναι 500 km, να βρεθεί ο χρόνος πτώσης του σώματος ως την επιφάνεια της γης.

Όπου απαιτείται, να γίνει χρήση του ολοκληρώματος

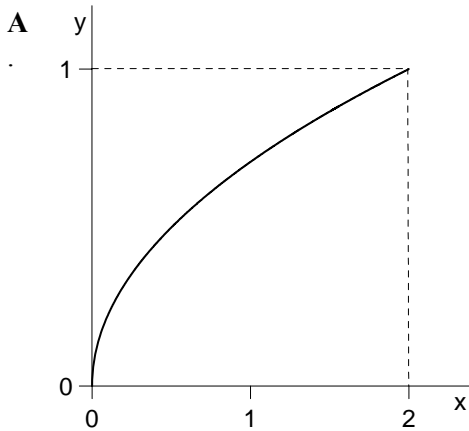
$$\int_{6.37}^{6.87} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{6.87} \right)^{-\frac{1}{2}} dx = 9.596$$

και του μετασχηματισμού  $u = \frac{r}{10^6}$

Δίνονται: Η ακτίνα της γης,  $R_E = 6.37 \times 10^6$  m, η μάζα της γης,  $M_E = 5.98 \times 10^{24}$  kg και η σταθερά παγκόσμιας έλξης,  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ .

**Σημείωση:** Στην άσκηση αυτή δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις αριθμητικές πράξεις υπολογισμού του χρόνου, όπως προκύπτει από το ερώτημα (β). Έτσι πρέπει να εξηγηθεί πλήρως ο τρόπος υπολογισμού του. Στο ερώτημα (α) δεν απαιτείται η εύρεση της αριθμητικής τιμής της ταχύτητας.

### Άσκηση 3



Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη  $\vec{F} = (xy, -y^2)$  που δρά σε σώμα μάζας m, όταν το σώμα μετατοπίζεται πάνω στο επίπεδο (x,y) κατά μήκος της καμπύλης με εξίσωση  $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}$ , από το σημείο A(0,0) έως το σημείο B(2,1), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- B. Ένας άνθρωπος μάζας 60 kg τρέχει με αρχική ταχύτητα 4 m/s και πηδάει πάνω σε κιβώτιο μάζας 120 kg που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία. Ο άνθρωπος ολισθαίνει στην επιφάνεια του κιβωτίου και τελικά ηρεμεί στο σύστημα αναφοράς του κιβωτίου. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του ανθρώπου και του κιβωτίου είναι 0.4. Η τριβή μεταξύ του κιβωτίου και του εδάφους θεωρείται αμελητέα. Να βρεθεί
- η τελική ταχύτητα του ανθρώπου και του κιβωτίου ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος
  - η τριβή ολίσθησης που ασκείται στον άνθρωπο κατά την πορεία του πάνω στο κιβώτιο. Για πόσο χρόνο ασκείται;
  - η μεταβολή ορμής i) του ανθρώπου και ii) του κιβωτίου
  - η μεταβολή της κινητικής ενέργειας i) του ανθρώπου και ii) του κιβωτίου. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σας. Πού οφείλεται η απώλεια της μηχανικής ενέργειας;
  - η μετατόπιση του ανθρώπου πάνω στο κιβώτιο ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος
  - η μετατόπιση του κιβωτίου κατά τη κίνηση του ανθρώπου ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος

### Άσκηση 4

- A Θεωρείστε τον Ήλιο και τη Γη να περιφέρεται γύρω από αυτόν σε κυκλική τροχιά. Να

υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας του Ήλιου ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος-Γη σε χρονική περίοδο 6 μηνών. Η επίδραση άλλων ουράνιων σωμάτων θεωρείται αμελητέα.

Δίνονται: απόσταση Γης-Ηλίου  $r_{Γ-Η} = 1.496 \times 10^{11} m$  (1 Αστρονομική Μονάδα),  $m_{Γ} = 5.98 \times 10^{24} kg$ ,  $M_{Η} = 1.991 \times 10^{30} kg$ . Θεωρείστε ότι  $m_{Γ} \ll M_{Η}$ .

- B** Δύο σώματα με μάζες  $M_1$  και  $M_2$  είναι δεμένα μεταξύ τους με νήμα μήκους  $l$ . Το σύστημα κινείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια έτσι ώστε το νήμα να είναι πάντα τεντωμένο. Κάποια στιγμή διαπιστώνεται ότι το  $M_1$  είναι ακίνητο ενώ το  $M_2$  κινείται με ταχύτητα  $v$ , η οποία είναι κάθετη στο νήμα. Υπολογίστε την τάση του νήματος.

### Άσκηση 5

- A** Σταγόνα βροχής που αρχικά έχει μάζα  $M$  και ταχύτητα  $u$ , πέφτει και πάνω της επικάθεται σκόνη, η ταχύτητα της οποίας ως προς τη Γη είναι  $v_0$ , με ρυθμό  $\lambda$  gr/s. Υπολογίστε την ταχύτητα της σταγόνας ως συνάρτηση του χρόνου. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα.
- B** Μία σφαίρα μάζας  $m_1 = 0.5 kg$  κινείται με ταχύτητα  $(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$  m/s χτυπά μια άλλη μάζας  $m_2 = 1.5 kg$  που κινείται με ταχύτητα  $(-1\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k})$  m/s. Εάν η ταχύτητα της σφαίρας  $m_1$  μετά τη σύγκρουση είναι  $(-0.25\hat{i} + 0.75\hat{j} + 2\hat{k})$  m/s βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας  $m_2$  μετά την κρούση και συμπεράνετε το είδος της κρούσης β) εάν η ταχύτητα της σφαίρας  $m_1$  μετά τη σύγκρουση είναι  $(-1\hat{i} + 3\hat{j} + a\hat{k})$  m/s, όπου  $a = \text{σταθερά}$ , υπολογίστε την τιμή του  $a$  και την ταχύτητα της σφαίρας  $m_2$  μετά από μία ελαστική κρούση.

### Άσκηση 6

Πυραυλοκίνητο όχημα, μάζας (με τον αναβάτη)  $M = 2000 kg$ , ξεκινά από την αφετηρία και διανύει απόσταση  $x$  σύμφωνα με την σχέση  $x = (10 + 2t^2)t$ , (μονάδες: 10 σε m/s και το 2 σε  $m/s^3$ ). Αν ο πύραυλος λειτουργεί για 5s, υπολογίστε:

A. την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση και του οχήματος συναρτήσει του χρόνου και τις σχετικές τιμές 5s μετά από την εκκίνηση.

B. Υπολογίστε την δύναμη που ασκείται, την κινητική ενέργεια και την ισχύ του οχήματος εκείνη την στιγμή.

Γ. Το συνολικό έργο που παρήχθει από τον πύραυλο του οχήματος στα τελευταία 2s λειτουργίας και την μέση ισχύ της μηχανής σε αυτό το διάστημα.

### Άσκηση 7

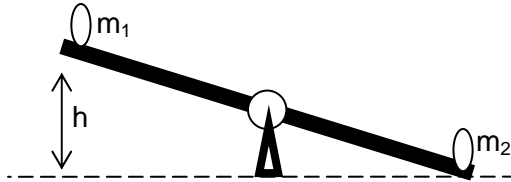
Ακίνητη οβίδα μάζας  $M = 17.0 kg$  εκρήγνυται. Κατά την έκρηξη της διασπάται σε τρία τεμάχια τα οποία κινούνται αρχικά μετά την έκρηξη σε ένα επίπεδο ως εξής: Το πρώτο, μάζας  $m_1 = 5.0 kg$  κινείται στο άξονα  $x$  με ταχύτητα  $v_{1x} = 6.0 m/s$  και το δεύτερο μάζας  $m_2 = 8.4 kg$  κινείται στο άξονα  $y$  με ταχύτητα  $v_{2y} = 4.0 m/s$ . Υπολογίστε την ταχύτητα του τρίτου και την ενέργεια που παρήχθει κατά την έκρηξη.

### Άσκηση 8

Μεταφέροντας κρασί από μία δεξαμενή σταθερής παροχής, γεμίζουμε δοχείο το οποίο βρίσκεται πάνω σε ζυγό. Αν η δεξαμενή χωρητικότητας  $250 \text{ kg}$  αδειάζει σε  $18'$  της ώρας και το στόμιο βρίσκεται σε ύψος  $H = 1.5 \text{ m}$  από τον ζυγό, υπολογίστε την ένδειξη του ζυγού την στιγμή που συμπληρωθούν  $m = 2 \text{ kg}$  κρασιού στο δοχείο.

### Άσκηση 9

Δύο παιδιά παίζουν τραμπάλα. Ακινητοποιούμε την τραμπάλα όταν το πρώτο παιδί, μάζας  $m_1 = 40 \text{ kg}$  βρίσκεται στο ανώτερο σημείο που απέχει  $h = 1.5 \text{ m}$  από το έδαφος, ενώ το δεύτερο παιδί μάζας  $m_2 = 31 \text{ kg}$  βρίσκεται στο κατώτερο σημείο.



Ακολουθώς αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Υπολογίστε την ταχύτητα του δευτέρου παιδιού όταν φτάσει στο ανώτερο σημείο και το τελικό ύψος  $H$  στο οποίο θα αναπηδήσει. Θεωρούμε την τραμπάλα χωρίς τριβές

### Άσκηση 10.

**A.** Η δυναμική ενέργεια που «συγκρατεί» δύο άτομα σε ένα διατομικό μόριο δίνεται από την συνάρτηση  $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$ , όπου  $a$  και  $b$  είναι θετικές σταθερές και  $x$  η απόσταση μεταξύ των ατόμων. Να βρεθούν:

1. Για ποια τιμή του  $x$  η δυναμική ενέργεια είναι  $0$ , εκτός από την προφανή λύση  $x = \infty$ .
2. Για ποια τιμή του  $x$  η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη (θέση ισορροπίας).
3. Βρείτε την δύναμη  $F(x)$  ανάμεσα στα δύο άτομα.
4. Πόση ενέργεια απαιτείται για να διασπαστεί το μόριο στα δύο άτομα που το συγκροτούν; (Η ενέργεια διάσπασης προφανώς είναι η ενέργεια για  $x = \infty$  μείον την ελάχιστη ενέργεια).
5. Κάντε την γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας  $U(x)$  και της δύναμης  $F(x)$  και σημειώστε την θέση που  $x$  όπου η δύναμη  $F(x) = 0$ .

**B.** Η δυναμική ενέργεια συστήματος δύο σωμάτων περιγράφεται από τη σχέση

$$U(r) = r^3 - 9r$$

όπου  $r$  η απόστασή τους. Να βρεθεί α) η δύναμη αλληλεπίδρασής τους β) οι θέσεις ισορροπίας γ) το είδος ισορροπίας. Να γίνει το διάγραμμα  $U(r)$ .