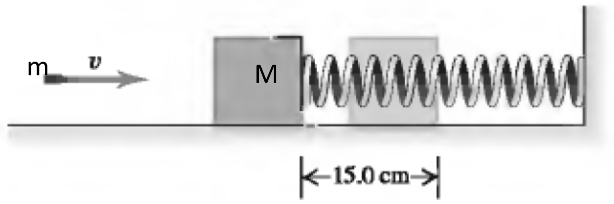
ΘΕΜΑ 1

Α. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης x δίνεται από τη σχέση $a(x) = bx$, όπου b σταθερά ($b = 1\ s^{-2}$). Αν η ταχύτητα στη θέση $x_0 = 0$ m είναι μηδέν, υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας στη θέση $x_1 = 4$ m.

Β. Σφαίρα μάζας m= 8 g και ταχύτητας υ χτυπάει και σφηνώνεται σε σώμα μάζας M= 0.922 kg. Το σώμα μάζας M εξαρτάται από οριζόντιο ελατήριο, όπως στο σχήμα και είναι ακίνητο. Μετά την πρόσκρουση του βλήματος το ελατήριο συμπιέζεται κατά 15 cm. Αν είναι γνωστό ότι το ελατήριο συμπιέζεται κατά 0.25cm, όταν σ' αυτό εφαρμοστεί δύναμη 0.75 N, να υπολογιστεί



α. Η σταθερά του ελατηρίου
β. Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση
γ. Η αρχική ταχύτητα της σφαίρας
Θεωρείστε ότι το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο.

<u>Α1. ΛΥΣΗ</u>

Επειδή $a(t) = d\upsilon / dt$ θα πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς τον χρόνο για να βρούμε την ταχύτητα. Στο πρόβλημα όμως η επιτάχυνση μας δίνεται ως συνάρτηση της θέσης και θα πρέπει να αλλάξουμε μεταβλητές

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \qquad (0.1)$$

Οπότε

$$bx = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \Rightarrow bxdx = \upsilon d\upsilon \qquad (0.2)$$

Με ολοκλήρωση μεταξύ των θέσεων (x_0, x_1) με αντίστοιχες ταχύτητες (υ_0, υ_1) παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} bxdx = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_1} \upsilon d\upsilon \qquad (0.3)$$

Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{1}{2}b(x_1^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2\right) \Rightarrow \upsilon_1 = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 + b(x_1^2 - x_0^2)} \qquad (0.4)$$

Αντικαθιστώντας $\left(x_0 = 0 \text{ m}, \quad x_1 = 4 \text{ m}, \quad \upsilon_0 = 0\ ms^{-1},\ b = 1\ s^{-2}\right)$ στην (0.4) παίρνουμε για το μέτρο της ταχύτητας

$$|\upsilon_1| = \sqrt{(1\ s^{-2})(4\ \text{m})^2} = 4 \text{ m/s}$$

<u>Β1. ΛΥΣΗ</u>

m =	0.008 kg
M =	0.922 kg
x_{max} =	0.15 m
Δx =	0.0025 m
F =	0.75 N
Προσοχή στις μετατροπές μονάδων	

α.) $k = \dfrac{F}{\Delta x} = \dfrac{0.75\text{N}}{0.0025\text{m}} = 300\,\text{N/m}$

β.) Η σφαίρα προσκρούει στο σώμα και σφηνώνεται. Το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα και συμπιέζει το ελατήριο κατά x_{max}. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων και έχουμε:

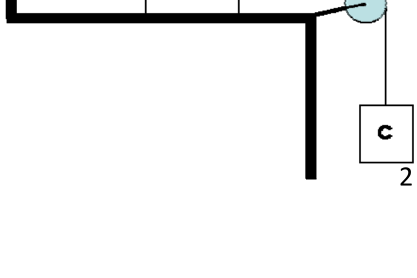
$$\frac{1}{2}\left(M+m\right)V^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{M+m}}x_{\max} \rightarrow V = \sqrt{\frac{300}{0.922+0.008}}0.15\frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow V \approx 2.7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ.) Από την αρχή διατήρησης της ορμής παίρνουμε

$$m\upsilon = \left(m+M\right)V \rightarrow \upsilon = \frac{m+M}{m}V \rightarrow \upsilon = \frac{0.008+0.922}{0.008}2.7\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 314\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

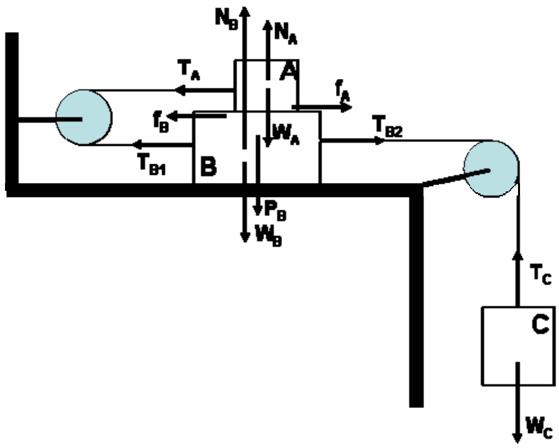
ΘΕΜΑ 2

1. Στη διάταξη του σχήματος να υπολογιστεί η επιτάχυνση των σωμάτων A και B και οι δυνάμεις στα νήματα. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα A και στο σώμα B είναι μ=0.2, ενώ ανάμεσα στο σώμα B και την επιφάνεια δεν υπάρχουν τριβές. Οι τροχαλίες θεωρούνται χωρίς



μάζα και χωρίς τριβές και τα νήματα είναι μη εκτατά. Δίνονται m_A=4kg, m_B=10kg και m_C=10kg.

ΛΥΣΗ



Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.

Στο σώμα Α ασκούνται το βάρος W_A, η αντίδραση N_A, η τριβή f_A και η τάση T_A.

Στο σώμα Β ασκούνται το βάρος W_B, η αντίδραση από την επιφάνεια N_B, η αντίδραση από το σώμα Α P_B, η τριβή f_B , η τάση T_{B1} και η τάση T_{B2}.

Στο σώμα C ασκούνται το βάρος W_C και η τάση T_C.

Οι τροχαλίες αλλάζουν μόνο τη διεύθυνση των δυνάμεων και από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα ισχύουν

$$W_A = -N_A ,$$
$$W_B + P_B = -N_B,$$
$$f_A = -f_B,$$
$$T_A = T_{B1},$$
$$T_{B2} = T_C$$

Η τριβή είναι $f_A = \mu N_A = \mu m_A g = 0.2 \times 4 \times 10 = 8N$

Για το Α: $T_A - f_A = m_A a$

Για το B: T_{B2}- T_{B1} – f_B = m_B a

Για το C: W_C - T_C = m_Ca

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

Για το A: W_C -f_A – f_B = (m_A + m_B + m_C)a

$$a=\frac{m_C g - f_A - f_B}{m_A + m_B + m_C} = \frac{10 \cdot 10 - 8 - 8}{4+10+10} = \frac{84}{24} = 3.5 m/s^2$$

Για τις τάσεις έχουμε

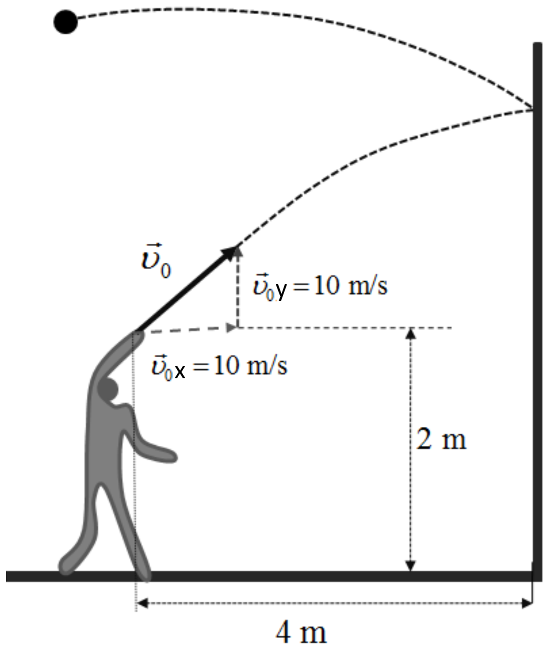
$$T_A = f_A + m_A a = 8 + 4 \cdot 3.5 = 22\ N$$

$$T_C = W_C - m_C a = 100 - 10 \cdot 3.5 = 65\ N$$

$$T_{B1} = T_A = 22N$$
$$T_{B2} = T_C = 65N$$

ΘΕΜΑ 3

Ο αθλητής που απεικονίζεται στη φωτογραφία εκσφενδονίζει μία μπάλα, από ύψος 2m ως προς το έδαφος, προς παρακείμενο τοίχο που βρίσκεται σε απόσταση 4 m από το σημείο βολής. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι $\vec{\upsilon}_0 = (10\vec{i} + 10\vec{j}) m/s$ και μετά την πρόσκρουση της μπάλας στον τοίχο η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας αλλάζει πρόσημο ενώ η κατακόρυφη παραμένει ως είχε. Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος πτήσης της μπάλας και η απόσταση του σημείου πρόσκρουσης στο έδαφος από τον τοίχο. ($g = 9.81\ m/s^2$)



<u>ΛΥΣΗ</u> :

Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς με την αρχή των αξόνων στο σημείο εκσφενδόνισης, τον θετικό άξονα x προς τα δεξιά και τον θετικό άξονα y προς τα πάνω. Αφού στο σημείο της πρόσκρουσης με τον τοίχο η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας δεν αλλάζει, μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση στον άξονα y ως κατακόρυφη βολή υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας. Η συντεταγμένη y δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση

$$y = \upsilon_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1.1)$$

Όταν η μπάλα φτάσει στο έδαφος θα έχει συντεταγμένη $y = -2$ m. Με αντικατάσταση στην (1.1) ($y = -2$ m, $\upsilon_{0y} = 10$ m/s, $g = 9.81$ m/s^2) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$4.91t^2 - 10t - 2 = 0$$

Η οποία έχει λύσεις $t_1 = 2.22$ s, $t_2 = -0.18$ s. Αποδεκτή είναι η θετική λύση.

Η συνολική απόσταση που διήνυσε η μπάλα στη διεύθυνση x είναι

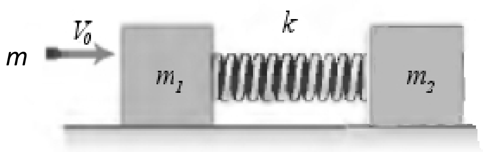
$$S = (10 \text{ m/s})(2.22 \text{ s}) = 22.2 \text{ m}$$

Έτσι η απόσταση του σημείου πρόσκρουσης στο έδαφος από τον τοίχο είναι

$S_1 = 22.2\ m$ - 4 m =18.2 m

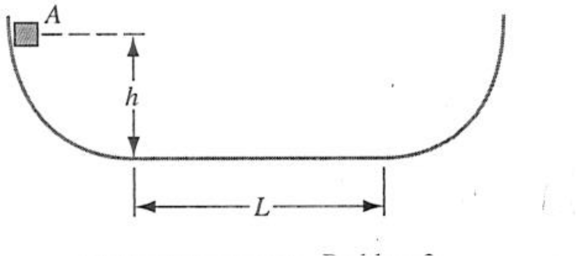
ΘΕΜΑ 4

Α. Δύο σώματα με μάζες m_1 = m_2= M συνδέονται με ελατήριο αμελητέας μάζας σταθεράς k και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα των δύο μαζών αρχικά είναι ακίνητο. Μια σφαίρα μάζας m κινούμενη με ταχύτητα V_0 διαπερνά την μάζα m_1 και η ταχύτητά της ελαττώνεται σε $V_0/2$.



Να βρεθούν
α. η ταχύτητα της μάζας m_1 αμέσως μετά την έξοδο της σφαίρας.
β. Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Β. Ένα μικρό σώμα μάζας m = 234 gr αφήνεται από το σημείο Α που απέχει ύψος h= 1.05 m από το οριζόντιο επίπεδο, σε ένα αυλάκι που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το οριζόντιο τμήμα του αυλακιού έχει μήκος L= 2.16 m. Τα κοίλα μέρη του δεν έχουν τριβή ενώ όταν το σώμα διανύει όλο το οριζόντιο τμήμα μήκους L χάνει 0.688 J μηχανικής ενέργειας λόγω τριβής. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο το σώμα θα σταματήσει. ($g=10 m/s^2$)



4Α. ΛΥΣΗ

α.) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής και έχουμε

$$mV_0 = m\frac{V_0}{2} + m_1 V \rightarrow V = \frac{m}{2M}V_0$$

β.) Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου επιτυγχάνεται όταν οι ταχύτητες των δύο μαζών m_1 και m_2 είναι ίσες. Έτσι από την αρχή διατήρησης της ορμής υπολογίζεται η κοινή ταχύτητα ως εξής

$$m_1 V = \left(m_1 + m_2\right)V' \rightarrow V' = \frac{V}{2}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας υπολογίζεται η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου

$$\frac{1}{2}m_1 V^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)V'^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \rightarrow MV^2 = 2M\frac{V^2}{4} + kx_{\max}^2 \rightarrow x_{\max}^2 = \frac{MV^2}{2k} \rightarrow$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{M}{2k}}V = \sqrt{\frac{M}{2k}}\frac{m}{2M}V_0 = \sqrt{\frac{m^2}{8kM}}V_0$$

4Β ΛΥΣΗ

Θεωρούμε το σώμα και το αυλάκι ως ένα σύστημα οπότε η βαρύτητα είναι εξωτερική δύναμη και η τριβή εσωτερική. Σύμφωνα με τη διατήρηση της ενέργειας

$W_{εξ}$= ΔΚ+ΔU+Δ$E_{εσ}$=0+0+ Δ$E_{εσ}$

$W_{εξ}$= mgh=2.408J

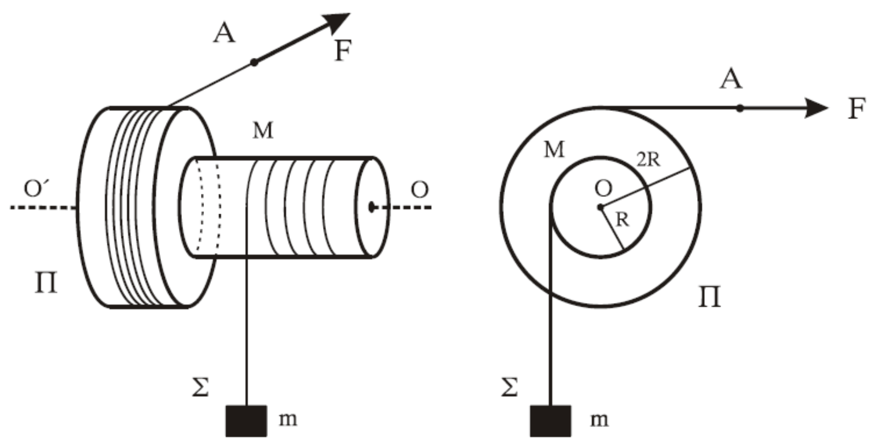
Αφού όταν το σώμα διανύει όλο το οριζόντιο τμήμα L χάνει 0.688 J μηχανικής ενέργειας λόγω τριβής χάνει 0.688/2.16 m=0.3185 J/m για κάθε μέτρο που διανύει άρα.

$$0.318\frac{J}{m}x(m) = 2.408J$$

x = 7.56 m δηλαδή x/L=7.56/2.16=3.5 κάνει 3.5 διαδρομές και καταλήγει στο μέσο του L.

ΘΕΜΑ 5

Στερεό Π μάζας Μ=10Kg αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R και 2R, όπου R=0.2 m όπως στο σχήμα. Η ροπή αδρανείας του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=MR^2$. Το στερεό Π περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα Ο΄Ο που συμπίπτει με τον άξονά του. Το σώμα Σ μάζας m=20kg κρέμεται από το ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο ακτίνας R . Γύρω από το τμήμα του στερεού Π με ακτίνα 2R είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα, στο ελεύθερο άκρο Α του οποίου μπορεί να ασκείται οριζόντια δύναμη F.



a. Να βρείτε το μέτρο της αρχικής δύναμης F_0 που ασκείται στο ελεύθερο άκρο Α του νήματος, ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμένει ακίνητο.

b. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε τη δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει F= 115N. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ.

Για τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ έχει ανέλθει κατά h=2m να βρείτε:

c. Το μέτρο της στροφορμής του στερεού Π ως προς τον άξονα περιστροφής του.

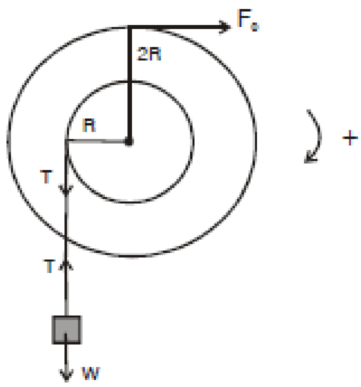
d. Τη μετατόπισή τού σημείου Α από την αρχική του θέση.

e. Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του στερεού Π κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ κατά h.

Δίνεται $g=10m/s^2$. Το συνολικό μήκος κάθε νήματος παραμένει σταθερό.

<u>ΛΥΣΗ</u>

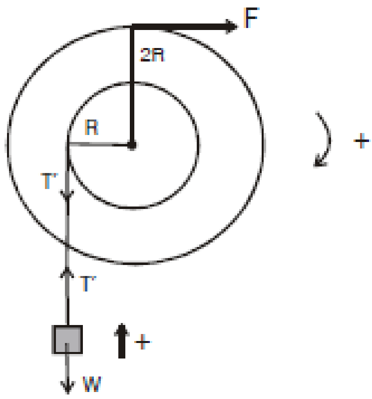
α) $\Sigma\tau_{(0)} = 0 \rightarrow \tau_{F_0} + \tau_T = 0 \rightarrow F_0 \cdot 2R - T \cdot R = 0 \rightarrow F_0 = \frac{T}{2}$ (1)



$\Sigma F = 0 \rightarrow T - w = 0 \rightarrow T = w$ (2)

(1), (2) $\rightarrow F_0 = \frac{w}{2} \rightarrow F_0 = 100\ N$

β) $\left.\begin{array}{l} \Sigma F = m\alpha_{cm} \\ \Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \\ \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3) \end{array}\right\} \rightarrow$



$\left.\begin{array}{l} T' - mg = m\alpha_{cm} \\ F \cdot 2R - T' \cdot R = MR^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} T' - mg = m\alpha_{cm} \\ 2F - T' = M\alpha_{cm} \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \alpha_{cm} = \frac{2F - mg}{M + m} \rightarrow \alpha_{cm} = 1\ m/s^2$

Η σχέση (3) αποδεικνύεται ως εξής:

Η γραμμική επιτάχυνση ενός σημείου της περιφέρειας του κυλίνδρου ακτίνας R ισούται κατά μέτρο με την επιτάχυνση α_{cm} του σώματος μάζας m. Άρα:

$$\alpha_{cm} = \alpha = \frac{du}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

γ) Ισχύει $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = 5\ rad/s^2$ και $h = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t^2 \rightarrow t = 2s$

$$L = I \cdot \omega = MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 4\ kg\frac{m^2}{s}$$

δ) Ισχύει $\left.\begin{array}{l}\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot 2R \\ \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R\end{array}\right\} \xrightarrow{(\div)} \alpha_A = 2\alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2}$

Άρα $x = \frac{1}{2}\alpha_A \cdot t^2 \to x = 4\ m$

ε) Έχουμε $W = F \cdot x = 460\ J$

$K_\pi = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = 20\ J$

Άρα $\frac{K_\pi}{W} 100\% = \frac{100}{23}\%\ (= 4{,}35\%)$