

Ηλεκτρομαγνητισμός (26-7-09)

Όνοματεπώνυμο _____

Τμήμα _____

ΘΕΜΑ 1

A. Ένα σώματιο με φορτίο -60.0 nC τοποθετείται στο κέντρο ενός μη αγώγιμου σφαιρικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας 20 cm και εξωτερικής 25 cm . Ο σφαιρικός φλοιός περιέχει φορτίο κατανεμημένο ομοιόμορφα στον όγκο του με πυκνότητα $-1.33 \text{ } \mu\text{C}/\text{m}^3$. Υπολογίστε

I) την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο που απέχει απόσταση $\alpha)$ $r > 25 \text{ cm}$, $\beta)$ από $20 \text{ cm} < r < 25 \text{ cm}$ και $\gamma)$ $r < 20 \text{ cm}$ από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού

II) τη διεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα πρέπει να εκτοξευθεί ένα πρωτόνιο από σημείο που απέχει απόσταση $r = 30 \text{ cm}$ από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού ώστε να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. (Η μάζα και το φορτίο του πρωτονίου είναι $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ και $q_p = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ αντίστοιχα)

B. Ένας μακρύς ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός βρίσκεται πάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια και διαρρέεται από ρεύμα έντασης $1.2 \text{ } \mu\text{A}$. Ένα πρωτόνιο κινείται παράλληλα με τον αγωγό -προς την αντίθετη διεύθυνση του ρεύματος- με σταθερή ταχύτητα $2.3 \times 10^4 \text{ m/s}$ ώστε το διάνυσμα της ταχύτητάς του και ο ευθύγραμμος αγωγός να είναι στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε την τιμή της απόστασης d μεταξύ του αγωγού και του πρωτονίου. Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ και αγνοήστε το μαγνητικό πεδίο της Γης. Η μάζα και το φορτίο του πρωτονίου είναι $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ και $q_p = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ αντίστοιχα, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$.

ΛΥΣΗ

1A.

I) Κατασκευάζουμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ομόκεντρη με το κέλυφος και υπολογίζουμε το φορτίο που εγκλωβίζεται σε κάθε μια από τις παραπάνω αποστάσεις οπότε εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss βρίσκουμε το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει ακτινική διεύθυνση

$$E(4\pi r^2) = E(4\pi r^2) = \frac{|Q_{\varepsilon\sigma}|}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = k \frac{|Q_{\varepsilon\sigma}|}{r^2} \quad (1)$$

α) για $r > 25\text{cm}$ το συνολικό φορτίο μέσα στη γκαουσιανή σφαίρα είναι το άθροισμα του φορτίου που περικλείεται μέσα στο σφαιρικό κέλυφος και του φορτίου του σωματίου.

Ο όγκος του σφαιρικού κελύφους είναι

$$V = \frac{4}{3}\pi \left[(0.25\text{m})^3 - (0.20\text{m})^3 \right] = 3.19 \times 10^{-2} \text{m}^3$$

Και το φορτίο του

$$Q = \rho V = (-1.33 \times 10^{-6} \text{C/m}^3)(3.19 \times 10^{-2} \text{m}^3) = -4.25 \times 10^{-8} \text{C}$$

άρα $Q_{\varepsilon\sigma} = -60 \times 10^{-9} \text{C} - 4.25 \times 10^{-8} \text{C} = -1.02 \times 10^{-7} \text{C}$ οπότε το ηλεκτρικό πεδίο διευθύνεται ακτινικά προς μέσα και δίνεται από την (1)

β) για $20\text{cm} < r < 25\text{cm}$ το φορτίο του κελύφους είναι

$$Q' = \int_V \rho V = \rho \int dV = \rho \int 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \Big|_{0.20}^r = \rho \frac{4\pi(r^3 - 0.20^3)}{3}$$

οπότε $Q_{\varepsilon\sigma} = -60 \times 10^{-9} \text{C} + Q'$ κι άρα το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την (1).

γ) για $r < 20 \text{cm}$ το συνολικό φορτίο μέσα στη γκαουσιανή σφαίρα είναι μόνο το φορτίο του σωματίου

$Q_{\varepsilon\sigma} = -60 \times 10^{-9} \text{C}$ οπότε το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την (1)

II) Για το πρωτόνιο

$$\Sigma F = m_p a \quad q_p E = \frac{m_p v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q_p E r}{m_p}}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο E υπολογίζεται από την περίπτωση 1α) για $r = 30 \text{cm}$

$$E = k \frac{|Q_{\varepsilon\sigma}|}{r^2} = \frac{8.99 \times 10^9 \text{Nm}^2 (1.02 \times 10^{-7} \text{C})}{\text{C}^2 (0.3\text{m})^2} = 1.01 \times 10^4 \text{N/C}$$

$$\text{Οπότε } v = \sqrt{\frac{q_p E r}{m_p}} = \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-19} \text{C} (1.01 \times 10^4 \text{N/C}) 0.3\text{m}}{1.67 \times 10^{-27} \text{kg}}} = 5.35 \times 10^5 \text{m/s}$$

Η διεύθυνση της ταχύτητας πρέπει να είναι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο.

1B

Έστω ότι το ρεύμα I είναι προς τα δεξιά. Στη θέση του πρωτονίου ο αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο έντασης

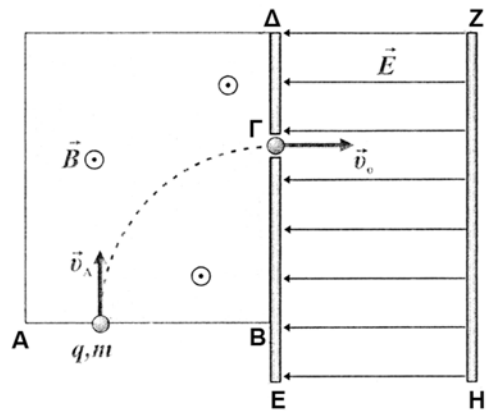
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Αφού το πρωτόνιο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε απόσταση d από το σύρμα $\Sigma F = 0$ άρα

$$\begin{aligned} m_p g(-\hat{j}) + q_p v(-\hat{i}) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{k} = 0 &\Rightarrow d = \frac{q_p v \mu_0 I}{2\pi m_p g} \\ &= \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.3 \times 10^4 \text{ m/s})(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A})(1.2 \times 10^{-6} \text{ A})}{4\pi (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 5.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

A. Σωματίδιο μάζας $m=1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ και φορτίου $q=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ εισέρχεται στην περιοχή (I) όπου επικρατεί ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B=10^{-2} \text{ T}$, με ταχύτητα v_A κάθετη στις μαγνητικές γραμμές και κάθετη στην πλευρά AB. Το σωματίδιο διαγράφει τεταρτοκύκλιο μέχρι το σημείο Γ όπου και εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα μέτρου $v_0=10^6 \text{ m/s}$. Στο σημείο Ο υπάρχει μία μικρή οπή μέσω της οποίας το σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες ΕΔ, ΖΗ με ταχύτητα παράλληλη στις δυναμικές του γραμμές. Το πεδίο έχει ένταση μέτρου $E=2.5 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.



- Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας v_A του σωματιδίου όταν εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο.
- Να υπολογίσετε την ακτίνα της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο.
- Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών ΕΔ, ΖΗ ώστε το σωματίδιο να φτάσει με μηδενική ταχύτητα στην πλάκα ΖΗ.

- d) Να βρείτε το συνολικό χρόνο κίνησης του σωματιδίου από τη στιγμή της εισόδου του στο μαγνητικό πεδίο μέχρι να φτάσει στην πλάκα ΖΗ. Η επίδραση του πεδίου βαρύτητας να θεωρηθεί αμελητέα.

2B. Λεπτός δίσκος από διηλεκτρικό ακτίνας a είναι φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \frac{3Qr}{2\pi a^3}$ και περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα ν ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνεια του και διερχόμενο από το κέντρο του. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου.

Υπόδειξη: Κάθε στοιχειώδες φορτίο στην επιφάνεια του δίσκου είναι ακίνητο ως προς το δίσκο. Συνεπώς κάθε στοιχειώδες φορτίο, εκτελεί ως προς ακίνητο παρατηρητή ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο του δίσκου. Η ως άνω κίνηση των στοιχειωδών φορτίων είναι ισοδύναμη με κυκλικά ηλεκτρικά ρεύματα με κέντρο το κέντρο του δίσκου.

ΛΥΣΗ

2A

- a) Αφού το μαγνητικό πεδίο δεν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας $v_A = v_0$

$$b) R = \frac{mv_A}{qB} = \frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(10^6 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})10^{-2} \text{ T}} = 1.04 \text{ m}$$

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = qV \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qV \Rightarrow V = -\frac{mv_0^2}{2q} \Rightarrow$$

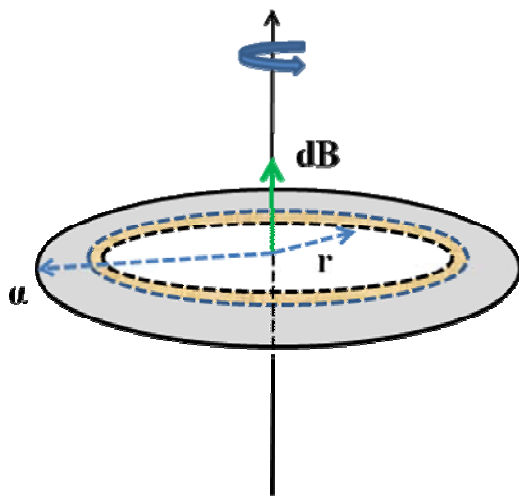
$$c) V = -\frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(10^6 \text{ m/s})^2}{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} = -5219 \text{ V}$$

$$d) t_{\text{ολ}} = t_{\mu\alpha\gamma\nu} + t_{\eta\lambda} = \frac{T}{4} + \frac{v_0}{\alpha} = \frac{2\pi m/Bq}{4} + \frac{v_0}{qE/m} = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \frac{v_0}{E} \right) =$$

$$\frac{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \left(\frac{\pi}{2 \times 10^{-2} \text{ T}} + \frac{10^6 \text{ m/s}}{2.5 \times 10^3 \text{ N/C}} \right) = (1.64 \times 10^{-4} + 4.175 \times 10^{-6}) \text{ s} = 5.82 \times 10^{-6} \text{ s}$$

2B. Θεωρούμε κυκλικό δακτύλιο ακτίνας r και πάχους dr . Το φορτίο στο δακτύλιο αυτό είναι:

$$dq = \sigma 2\pi r dr = \frac{3Qr}{2\pi a^3} 2\pi r dr = \frac{3Q}{a^3} r^2 dr$$



Όταν ο δακτύλιος περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα ν ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνεια του το ηλεκτρικό ρεύμα λόγω της κίνησης του είναι

$dI = \nu dq = \nu \frac{3Q}{\alpha^3} r^2 dr$ και το μαγνητικό πεδίο εξ αυτού του ρεύματος στο κέντρο του δακτυλίου θα είναι:

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2r\pi} \vec{u}_z$ και συνεπώς το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα προέλθει από την ολοκλήρωση σε όλη την επιφάνεια του δίσκου:

$$\vec{B} = \vec{u}_z \nu \frac{\mu_0 3Q}{\pi \alpha^3} \int_0^\alpha \frac{1}{2r} r^2 dr = \vec{u}_z \nu \frac{\mu_0 3Q}{2\alpha^3} \int_0^\alpha r dr = \vec{u}_z \nu \frac{\mu_0 3Q}{2\alpha^3} \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{3\mu_0 \nu Q}{4\alpha\pi} \vec{u}_z$$

Να απαντηθούν όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.