13/10/2008

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2008-09

1η ΕΡΓΑΣΙΑ

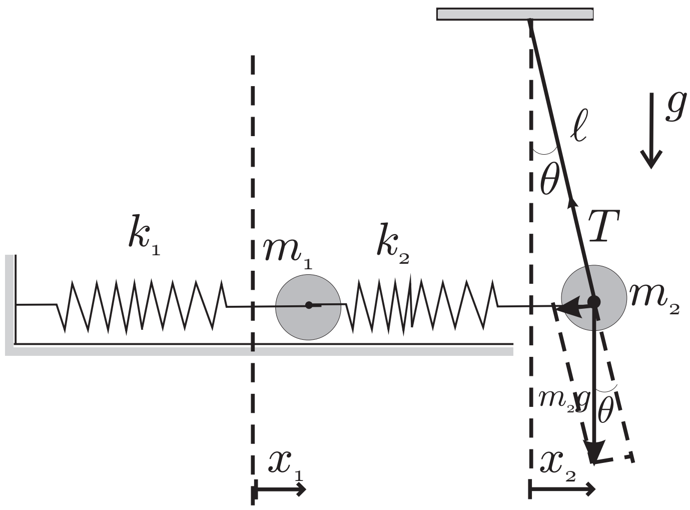
Προθεσμία παράδοσης 11/11/08

Άσκηση 1

Α) Έστω x_1, x_2 οι μετατοπίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας όπως στο Σχήμα. Στη μάζα m_1 ενεργούν μόνο οι δυνάμεις από τα δύο ελατήρια. Εφαρμόζοντας το 2ο Νόμο του Νεύτωνα

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \qquad (1)$$

Στη μάζα m_2 έχουμε τη δύναμη από το ελατήριο k_2 και τη δύναμη του βάρους η οποία αναλύεται στην παράλληλη με τη μπάρα συνιστώσα η οποία ισούται με την τάση $T = mg\cos\theta$ και στην κάθετη $f = mg\sin\theta = mg\dfrac{x_2}{\ell}$. Για μικρές γωνίες ταλάντωσης



μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τόξο που διανύει η m_2 ισούται με x_2 καθώς και ότι το ελατήριο k_2 είναι οριζόντιο. Εφαρμόζοντας το 2ο Νόμο του Νεύτωνα

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - f = -k_2(x_2 - x_1) - m_2 g\frac{x_2}{\ell} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 = -\frac{k_2 + k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \quad \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{3k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 \quad \Rightarrow \ddot{x}_1 = -3\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ &\ddot{x}_2 = +\frac{k_2}{m_2}x_1 - \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{g}{\ell}\right)x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = +\frac{k}{2m}x_1 - \left(\frac{k}{2m} + \frac{5k}{2m}\right)x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = +\frac{\omega_0^2}{2}x_1 - 3\omega_0^2 x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

και σε μορφή πίνακα

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1/2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

B) Εισάγοντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_i = A_i \cos\left(\omega t + \phi\right), i = 1,2$, όπου ω η κοινή κυκλική συχνότητα η (4) γράφεται ως

$$\begin{gathered} -\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos\left(\omega t + \phi\right) = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1/2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos\left(\omega t + \phi\right) \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} \omega^2 - 3\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2/2 & \omega^2 - 3\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5}$$

Το ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση για

$$\det\begin{pmatrix} \omega^2 - 3\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2/2 & \omega^2 - 3\omega_0^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\omega^2 - 3\omega_0^2\right)^2 - \frac{\omega_0^4}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 - 3\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\omega^2 - 3\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\omega^2 - \frac{\left(6-\sqrt{2}\right)\omega_0^2}{2}\right)\left(\omega^2 - \frac{\left(6+\sqrt{2}\right)\omega_0^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\left(6-\sqrt{2}\right)}{2}}\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(6-\sqrt{2}\right)}{2}\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\left(6+\sqrt{2}\right)}{2}}\omega_0 = \sqrt{\frac{\left(6+\sqrt{2}\right)}{2}\frac{k}{m}}$$

Γ) Αντικαθιστώντας στην (5) $\omega = \omega_1$ παίρνουμε

$$\omega = \omega_1 \quad : \quad \begin{pmatrix} -\omega_0^2/\sqrt{2} & \omega_0^2 \\ \omega_0^2/2 & -\omega_0^2/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{2}$$

$$\omega = \omega_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} \omega_0^2/\sqrt{2} & \omega_0^2/2 \\ \omega_0^2/2 & \omega_0^2/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = -\sqrt{2}$$

Άσκηση 2

Υπάρχουν δύο μέθοδοι επίλυσης της άσκησης , είτε με απευθείας αντικατάσταση στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

είτε λαμβάνοντας υπόψιν ότι η γενική λύση της κυματικής είναι της μορφής

$$\xi(x,t) = f(x - \upsilon t) + g(x + \upsilon t) \tag{2}$$

όπου f, g αυθαίρετες συναρτήσεις. Έτσι έχουμε

(i) $y(z,t) = (a z - b t)^2 = a^2\left(z - \frac{b}{a}t\right)^2$ είναι λύση της κυματικής με ταχύτητα φάσης $\upsilon = \frac{b}{a}$

(ii) $y(z,t)=(a\,z+b\,t+c)^2=a^2(\,z+\frac{b}{a}t+c)^2$ είναι λύση της κυματικής με ταχύτητα φάσης $\upsilon=-\frac{b}{a}$

(iii) $y(z,t)=1/(a\,z^2+b)$ προφανώς δεν είναι λύση της κυματικής γιατί περιέχει τη θέση αλλά όχι το χρόνο

(iv) $y(z,t)=A\sin(a\,z^2-b\,t^2)=A\sin(a\,z^2-b\,t^2)$ δεν είναι λύση της κυματικής καθώς δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή (2)

Άσκηση 3

Αν c η ταχύτητα του ήχου στον αέρα (στο μέσον διαδόσεως), ο γενικός τύπος Doppler είναι:

$$f'=f\frac{c+v_O}{c+v_S}$$

Όλα τα πρόσημα είναι με «+», όπου «+» φορά: από O[bserver = O(αρχή)] →S[pring]

Έστω ο Ακίνητος Παρατηρητής, Α, αριστερά, ο Τοίχος, Τ, δεξιά, και το παιδί με τη σφυρίχτρα, Σ, ανάμεσα, κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ.

Για το κύμα από Σ→Τ, έχουμε:

S=Σ, O=T, O→S «+» προς τα αριστερά, υ_O =0, υ_S=+υ αφού είναι προς τα αριστερά.

Άρα

$$f'=f\frac{c}{c+v_S}=f\frac{c}{c+\upsilon}$$

Για το κύμα που ανακλάται στον τοίχο (ως «πηγή» συχνότητος f'), από Τ→Α, έχουμε:

S=T, O=A, O→S «+» προς τα αριστερά, υ_O =0, υ_S=0. Άρα

$$f''=f'.$$

Για το κύμα από Σ→Α, έχουμε:

S=Σ, O=A, O→S «+» προς τα δεξιά, υ_O =0, υ_S= −υ αφού είναι προς τα αριστερά.

Άρα

$$f'''=f\frac{c}{c+v_S}=f\frac{c}{c-\upsilon}$$

Οι συχνότητες f'' και f''' που ακούει ο Α σχηματίζουν διακρότημα συχνότητος

$$f_\delta=\frac{f'''-f''}{2}=f\left(\frac{c}{c-\upsilon}-\frac{c}{c+\upsilon}\right)=f\frac{c\upsilon}{c^2-\upsilon^2}$$

Επειδή το πλάτος μηδενίζεται σε κάθε κόμβο της περιβάλλουσας, (π, 2π, 3π,...), ο Α ακούει διπλάσιο πλήθος μηδενισμών, άρα με συχνότητα $f\frac{2c\upsilon}{c^2-\upsilon^2}$ =4 διακροτήματα/s

Άρα,

$$f=\frac{c^2-\upsilon^2}{c\upsilon}2/s=\frac{340^2-1^2}{340\times 1}2/s=680.Hz\,.$$

Άσκηση 4

Α) Το χωρικό μέρος του στάσιμου κύματος για $t = 0$ είναι:

$$y_1(x) = A_1 \sin(k_1 x) = A_1 \sin(\frac{2\pi}{\lambda_1}x), \qquad 0 \le x \le \frac{2L}{3}$$

$$y_2(x) = A_2 \sin(k_2 x) = A_2 \sin(\frac{2\pi}{\lambda_2}x), \qquad \frac{2L}{3} \le x \le L$$

με $L_1 = \frac{3\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{9}L$ και

$L_2 = \frac{5\lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{15}$, άρα

$$\begin{aligned} y_1(x) &= A_1 \sin(\frac{9\pi}{2L}x), \quad 0 \le x \le \frac{2L}{3} \\ y_2(x) &= A_2 \sin(\frac{15\pi}{2L}x), \quad \frac{2L}{3} \le x \le L \end{aligned}.$$

Πράγματι, η συνάρτηση αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο του σχήματος αφού:

$y_1(0) = 0,\ y_1(\frac{2L}{3}) = A_1 \sin(3\pi) = 0 = A_2 \sin(5\pi) = y_2(\frac{2L}{3})$ και

$y_2(L) = A_2 \sin(\frac{15\pi}{2}) = -A_2$

Β) Η σχέση για τα πλάτη προκύπτει από τη συνέχεια της πρώτης παραγώγου στο $x = 2L/3$, οπότε

$$y_1'(2L/3) = y_2'(2L/3) \Rightarrow A_1 \frac{9\pi}{2L}\cos(3\pi) = A_2 \frac{15\pi}{2L}\cos(5\pi) \Rightarrow 3A_1 = 5A_2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{5}$$

Οι γωνιακές συχνότητες ταλάντωσης στα δύο τμήματα της ράβδου είναι

$\omega_1 = \upsilon_1 k_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}\frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \upsilon_2 k_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho_2}}\frac{2\pi}{\lambda_2}$. Για να ταλαντώνεται η ράβδος αρμονικά,

πρέπει $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}\frac{2\pi}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{G}{\rho_2}}\frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{25}{9}$.

Άσκηση 5

(Α) Έστω s_1, s_2 οι απομακρύνσεις των μαζών m_1, m_2 από την ισορροπία. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m_1\ddot{s}_1 = 2k(s_2 - s_1)$$

$$m_2\ddot{s}_2 = -2k(s_2 - s_1)$$

Αν φ_1, φ_2 οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος, δήλ, $s_{1,2} = \varphi_{1,2}e^{-i\omega t}$ έχουμε

$$\left[2k - m_1\omega^2\right]\varphi_1 - 2k\varphi_2 = 0$$

$$-2k\varphi_1 + \left[2k - m_2\omega^2\right]\varphi_2 = 0$$

Δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \left[2k - m_1\omega^2\right] & -2k \\ -2k & \left[2k - m_2\omega^2\right] \end{vmatrix} = 0$$

Βρίσκουμε τις λύσεις $\omega^2 = 0$ και $\omega^2 = 2k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ οι οποίες για τις ειδικές τιμές μαζών του προβλήματος γίνονται

$\omega^2 = 0$, $\omega^2 = \dfrac{3k}{m}$

(B) Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2k}{m_1} & -\dfrac{2k}{m_1} \\ -\dfrac{2k}{m_2} & \dfrac{2k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε την μία από τις δύο εξισώσεις και βρίσκουμε $\phi_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\varphi_2$, δηλαδή $\varphi_1 = 2\varphi_2$.

(Γ) Η τιμή $\omega = 0$ αντιστοιχεί σε ελεύθερη περιστροφή της αλυσίδας είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

Άσκηση 6

Α) Αφού δεν υπάρχει διασπορά, η ταχύτητα φάσεως είναι κοινή $\upsilon = \omega / k = \omega' / k'$, $\omega = \upsilon k$, $\omega' = \upsilon k'$. Οπότε,

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda + \delta\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda\left(1 + \dfrac{\delta\lambda}{\lambda}\right)} \simeq \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right) = k\left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Άρα

$$\omega' = \upsilon k\left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right) = \omega\left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Η συμβολή δίνει διακρότημα συχνότητος $(\omega + \omega')/2$ με κυματάνυσμα $(k + k')/2$.

$$\frac{\omega + \omega'}{2} = \frac{\omega + \omega\left(1 - \dfrac{\delta\lambda}{\lambda}\right)}{2} = \omega - \omega\frac{\delta\lambda}{2\lambda} = \omega\left(1 - \frac{\delta\lambda}{2\lambda}\right) \simeq \omega$$

και ομοίως, $(k + k')/2 \simeq k$. Άρα το μήκος κύματος του διακροτήματος είναι $\simeq \lambda$.

Η περιβάλλουσα δίδεται από

$$\cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2}t - \frac{k - k'}{2}x\right)$$

Αλλά

$$\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{\omega - \omega\left(1 - \dfrac{\delta\lambda}{\lambda}\right)}{2} = \omega\frac{\delta\lambda}{2\lambda}$$

και ομοίως $(k - k')/2 \simeq k\delta\lambda / (2\lambda)$. Άρα η περιβάλλουσα μεταβάλλεται ως

$$\cos\left[\frac{\delta\lambda}{2\lambda}(\omega\, t-\kappa\, x)\right]=\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\upsilon\, t}{\left(\frac{2\lambda}{\delta\lambda}\right)}-\frac{x}{\left(\frac{2\lambda}{\delta\lambda}\right)}\right)\right]\equiv\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T_\pi}-\frac{x}{\lambda_\pi}\right)\right]$$

Άρα ένα στιγμιότυπο αυτής έχει μήκος κύματος $\lambda_\pi=2\lambda^2/\delta\lambda$.

Όμως δύο κόμβοι απέχουν $\lambda_\pi/2$, και άρα, περιέχουν $\frac{\lambda_\pi/2}{\lambda}=\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ μήκη κύματος.

Β) Η ταχύτητα ομάδος υ_g είναι $\upsilon_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(\upsilon k)}{dk}=\upsilon+\kappa\frac{d\upsilon}{dk}$

Αλλά

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\ \ dk=-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda,\ \ \frac{k}{dk}=-\frac{\lambda}{d\lambda}\ .$$

Άρα

$$\upsilon_g=\upsilon-\lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

Αφού δεν υπάρχει διασπορά, $\frac{d\upsilon}{d\lambda}=0\Rightarrow\upsilon_g=\upsilon$.

Άσκηση 7

Α) Κοντά στο τύμπανο, στο άκρον του σωλήνα, το κύμα μετατόπισης θα είναι

$$\xi(x,t)=\xi_0\cos(\omega\, t-k\, x)$$

όπου $k=2\pi/\lambda$ το κυματάνυσμα, οπότε για $x=0$ θα έχουμε επαφή με το τύμπανο.
Άρα η πίεση

$$p=p_0-u\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

όπου u το μέτρο ελαστικότητος όγκου. Αλλά $\partial\xi/\partial x=k\xi_0\sin(\omega\, t-k\, x)$, άρα

$$p=p_0+uk\xi_0\cos(\omega\ t-k\ x-\pi/2),$$

με διαφορά φάσεως $\pi/2$.
Ομοίως, η πυκνότητα

$$\rho=\rho_0-\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Άρα

$$\rho=\rho_0+\rho_0k\xi_0\cos(\omega\ t-k\ x-\pi/2),$$

όπου

$$\frac{\omega}{k}=\upsilon=\sqrt{\frac{u}{\rho_0}}$$

Β) Η ένταση σε dB, είναι $B=10\log(I/I_\alpha)$, όπου $I_\alpha=10^{-12}W/m^2$ η ένταση αναφοράς. Άρα

$$I=I_a10^{B/10}$$

Αλλά

$$I=\frac{P_0^2}{2\upsilon\rho_0}=\frac{u^2k^2\xi_0^2}{2\upsilon\rho_0}$$

όπου $k=\omega/\upsilon=2\pi f/\upsilon$ και $u=\rho_0\upsilon^2$, άρα

$$I_a 10^{B/10}=I=\frac{\rho_0^2\upsilon^4\omega^2/\upsilon^2\ \xi_0^2}{2\upsilon\rho_0}\Rightarrow \xi_0^2=\frac{I}{\omega^2}\frac{2}{\rho_0\upsilon}=\frac{I}{\pi^2f^2}\frac{1}{2\rho_0\upsilon}$$

Επομένως, στα 400 Hz ,

$$\xi_0=\frac{\sqrt{I_\alpha}}{\pi f}\frac{10^{B/10}}{\sqrt{2\upsilon\rho_0}}=\frac{10^{-6}}{\pi}\frac{10^{B/10}}{\sqrt{2\cdot 1.29\cdot 345}}\frac{1}{400}m$$

με B σε dB.

Για $B=10dB\Rightarrow \xi_0=8.4\times10^{-11}m=0.84\,\text{Å}$ [μετακίνηση κατά την διάμετρο ενός (!) ατόμου του υδρογόνου].

Για $B=122\,dB\Rightarrow \xi_0=3.3\times10^{-5}m=33\mu m$ [για σύγκριση, το πάχος ενός τσιγαρόχαρτου είναι 10 μm].

Άσκηση 8

Α) Για να παραχθεί στάσιμο κύμα κατά τον άξονα x πρέπει η πλευρά $a=n_x\lambda_x/2$, όπου $\lambda_x=2\pi/k_x$ και k_x είναι η x-συνιστώσα του κυματανύσματος $\mathbf{k}$, μέτρου $k=2\pi/\lambda$ και n_x ακέραιος. Άρα $k_x=n_x\pi/a$. Ομοίως, $k_y=n_y\pi/a$.

Επειδή $k^2=k_x^2+k_y^2$ έπεται ότι $\lambda=2a\Big/\sqrt{n_x^2+n_y^2}$.

Κατά την x διεύθυνση έχω κόμβους στα άκρα, άρα για μέγιστο μήκος κύματος πρέπει να υπάρχει μία κοιλία, ήτοι $a=\lambda/2$, οπότε $n_x=1$.

Κατά την y διεύθυνση έχω κόμβους στα άκρα και στο μέσον $y=a/2$, άρα για μέγιστο δυνατό μήκος κύματος πρέπει να υπάρχει κοιλία και όρος εκατέρωθεν του μέσου, ήτοι $a=\lambda$, οπότε $n_y=2$.

Β)Άρα το μέγιστο μήκος κύματος είναι $\lambda=2a/\sqrt{1+4}=2a/\sqrt{5}$.

Γ) Από $\lambda f=\upsilon=\sqrt{\mathrm{T}/\rho}$ έπεται ότι η θεμελιώδης (μικρότερη δυνατή) συχνότητα δημιουργείται με το μέγιστο μήκος κύματος. Άρα $T=\rho\lambda^2f^2$

Άσκηση 9

Η ταχύτητα των διαμηκών κυμάτων είναι $\upsilon_L=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$ και των εγκάρσιων $\upsilon_T=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ όπου ρ η πυκνότητα της ράβδου $\rho=\dfrac{m}{\pi R^2L}$ και μ η γραμμική πυκνότητα $\mu=\dfrac{m}{L}$. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$\frac{\upsilon_L}{\upsilon_T}=0.850=\sqrt{\frac{Y/\rho}{T/m}}=\sqrt{\frac{Y}{T\pi R^2}}\Rightarrow$$

$$T=\frac{Y\pi R^2}{0.850^2}=\frac{6.8\times10^{10}\mathrm{N/m^2}\times\pi\times0.0020^2\mathrm{m^2}}{0.850^2}=1.18\times10^6\mathrm{N}$$

Άσκηση 10

Η γενική λύση για ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης θα είναι της μοφής

$$y(x,t) = \left(A\cos kx + B\sin kx\right)\cos(\omega t + \phi)$$

οπου $\upsilon = \sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\mu}} = \dfrac{\omega}{k},\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ελεύθερο στο $x = 0$ και σταθερό άκρο στο $x = L$. Άρα

$$y'(0,t) = 0 \Rightarrow \left(A\sin k0 + B\cos k0\right)\cos(\omega t + \phi) = B = 0$$

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow A\cos kL\cos(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \cos(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$k = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L} \equiv k_n,\ \lambda = \frac{4L}{2n+1} \equiv \lambda_n$$

Επομένως

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}k = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L} \equiv \omega_n$$

και έπεται

$$y_n(x,t) = \left(A\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left[\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}t + \phi\right],\ n = 0,1,2,...$$

όπου Α αυθαίρετο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Σ΄αυτές τις συχνότητες το μήκος κύματος είναι

$\lambda = \upsilon / f = 345m/(3000 \sim 4000)s^{-1} = (8 \sim 10)cm$, οπότε $\lambda/4 \sim (2{\sim}2.5)\ cm$,

συγκρίσιμο με το μήκος του ακουστικού πόρου, αν υποθέσουμε οτι είναι ημίκλειστος σωλήνας με κόμβο απομάκρυνσης στο τύμπανο και μέγιστο πλάτος απομάκρυνσης στην είσοδο. (Από την Άσκηση 7, πλάτος απομάκρυνσης ~ 10^{-7} - 10^{-2} mm είναι πρακτικά κόμβος).

2) Θεωρώντας θετική τη φορά πηγή $\rightarrow$ παρατηρητή η συχνότητα που θα ακούει ο παρατηρητής στην πρώτη περίπτωση θα είναι

$$f = f_0\frac{\upsilon_s}{\upsilon_s - \upsilon} \Rightarrow f_0 = \frac{\upsilon_s - \upsilon}{\upsilon_s}f$$

Ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε

$$f' = \frac{\upsilon_s + \upsilon/2}{\upsilon_s - \upsilon/2}f_0 = \frac{\upsilon_s + \upsilon/2}{\upsilon_s - \upsilon/2}\frac{\upsilon_s - \upsilon}{\upsilon_s}f = \frac{\left(\upsilon_s - \upsilon\right)\left(2\upsilon_s + \upsilon\right)}{\upsilon_s\left(2\upsilon_s - \upsilon\right)}f$$

Παρατηρούμε ότι παρά το γεγονός ότι σχετική ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής είναι διαφορετική. Αυτό οφείλεται ότι στο κλασικό φαινόμενο Doppler οι ταχύτητες πηγής και παρατηρητή μετρούνται ως προς τον αέρα που είναι το μέσο διάδοσης του κύματος.

3) Θέλουμε να βρούμε μια τιμή με την σωστή τάξη μεγέθους για την πίεση. Για απλότητα χρησιμοποιούμε την λύση της εξίσωσης κύματος στις δύο διαστάσεις με δεδομένη αρχική μετατόπιση, δηλ.

$$\eta(x,y,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t)\,,\ \ k_{x,y} = \frac{\pi}{l_{x,y}}$$

Για την ολική ενέργεια αρκεί να θεωρήσουμε ότι είναι της ίσιας τάξης με την αρχική την δυναμική ενέργεια του τζαμιού η οποία υπολογίζεται χρησιμοποιόντας την παραπάνω λύση, δηλ. για $t = 0$:

$$E_{ol} = \frac{1}{2}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y} f\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right] =$$

$$\frac{fA^2\pi}{2}\left[\frac{1}{l_x^2}\int_0^{l_x}\cos^2(\frac{\pi x}{l_x})dx\int_0^{l_y}\sin^2(\frac{\pi y}{l_y})dy + \frac{1}{l_y^2}\int_0^{l_x}\sin^2(\frac{\pi x}{l_x})dx\int_0^{l_y}\cos^2(\frac{\pi y}{l_y})dy\right]$$

$$= \frac{A^2 f}{8}\left[\frac{l_y}{l_x} + \frac{l_x}{l_y}\right] = 0.28\times 10^3 J$$

Θεμελιώδης συχνότητα $\omega_{1,1} = \pi c\left[\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right] \cong 0.9\times 10^4 s^{-1}$

$$I = \frac{E_{ol}\omega_{1,1}}{l_x l_y} = 1.7\times 10^4 W/m^2$$

Η σχέση με ένταση στην πηγή είναι

$$I = \frac{I_0}{r^2} \text{ και } I_0 = \frac{P_0^2}{2\rho\upsilon}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $P_0 = 2.2\times 10^5 Pa \cong 2.2 Atm$

4) Ο ήχος παράγεται μέσω μεταβολών της πίεσης του αέρα, οι οποίες με την σειρά τους ταλαντώνουν το τύμπανο του αυτιού. Το πλάτος ταλάντωσης του τελευταίου εξαρτάται γραμμικά από τις μεταβολές στην πίεση του αέρα. Όταν υπάρχει υπέρθεση συχνοτήτων με διαφορετικά πλάτη ταλάντωσης και θεωρήσουμε ότι το αυτί αποκρίνεται γραμμικά στους εξωτερικούς εξαναγκασμούς, τότε το τύμπανο κάνει στην ουσία ανάλυση Fourier του εξωτερικού σήματος. Μια και μας ενδιαφέρει η απόκριση του τυμπάνου και όχι η διάδοση του ήχου, η εξάρτηση από το κυματικό αριθμό δεν παίζει ουσιώδη ρόλο και την παραλείπουμε. Για δύο συχνότητες ω_1, ω_2 έχουμε συνισταμένη ταλάντωση (ίδιου πλάτους) που βρίσκεται σε φάση

$$\psi \approx A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$

Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου, δηλ

$$I \approx A^2\cos^2\omega_1 t + A^2\cos^2\omega_2 t + 2A^2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$$

Παίρνουμε την μέση τιμή στον χρόνο

$$I = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2 = I_1 + I_2 + A^2\left[< \cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t >\right] \approx I_1 + I_2$$

Άρα, αν δεν υπάρχει φασική διαφορά ανάμεσα στα δύο κύματα δεν φαίνεται η συνιστάμενη κίνηση να μπορεί να γίνει ανεκτή. Αν υπάρχει διαφορά φάσης ανάμεσα στους δύο ήχους η συνολική ένταση θα μπορούσε να γίνει μικρότερη ανάλογα με την διαφορά φάσης.

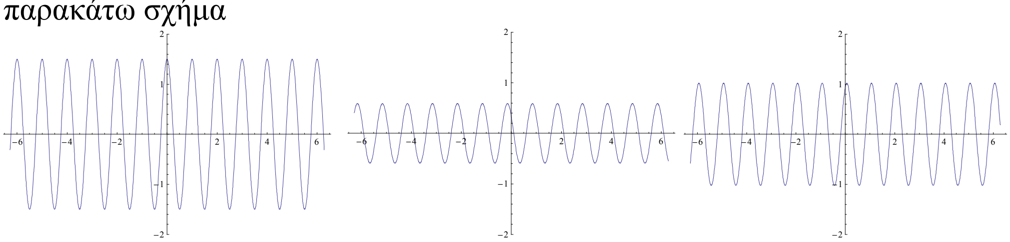
5) Θεωρούμε το A πραγματικό και γράφουμε σε μιγαδική μορφή

$$\eta_1 = A\,\mathrm{Re}\left[e^{i(kx-\omega t)}\right],\ \eta_2 = A\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}e^{i(kx+\omega t)}\right]$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A\,\mathrm{Re}\left[e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{2}e^{i(kx+\omega t)}\right] = A\,\mathrm{Re}\left[e^{ikx}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{2} + \cos(\omega t)\right)\right] =$$

$$\frac{A}{2}\left[3\cos kx\cos(\omega t) + \sin kx\sin(\omega t)\right]$$

Το συνιστάμενο κύμα είναι μια υπέρθεση δύο στάσιμων κυμάτων.
Η γραφική αναπαράσταση για διάφορες τιμές του $t = 0, \pi/4, \pi$ παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα



$t = 0$ $\qquad$ $t = \pi/4$ $\qquad$ $t = \pi$