17/11/2008

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2008-09

2η ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 16/12/08

Άσκηση 1

Α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (18.46) του βιβλίου των Alonso και Finn βρίσκουμε για το κυματάνυσμα $\vec{k}$

$$-\vec{k}\cdot\vec{r} = 3x - y - z \Rightarrow -x\,k_x - y\,k_y - z\,k_z = 3x - y - z \Rightarrow \vec{k} = \left(-3,1,1\right)$$

Η διεύθυνση του οποίου είναι και η διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Β) Το μήκος κύματος δίνεται από

$$\lambda = \frac{2\pi}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} = 1.89\text{m}$$

Γ) Από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow$$

$$10^{-6}\left[\frac{\partial}{\partial x}\cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) + b\frac{\partial}{\partial z}\cos\left(\omega t + 3x - y - z\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(-3 + 2 + b\right)\sin\left(\omega t + 3x - y - z\right) = 0 \Rightarrow b = 1\text{T}$$

Δ) Επίσης

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$10^{-6}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) & 2\cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) & \cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -c^2 10^{-6}\left(\hat{x} - 4\hat{y} + 7\hat{z}\right)\sin\left(\omega t + 3x - y - z\right) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -c^2 10^{-6}\left(\hat{x} - 4\hat{y} + 7\hat{z}\right)\int dt\,\sin\left(\omega t + 3x - y - z\right) + \vec{f}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = c^2\frac{10^{-6}}{\omega}\left(\hat{x} - 4\hat{y} + 7\hat{z}\right)\cos\left(\omega t + 3x - y - z\right) + \vec{f}(x,y,z)$$

όπου $\omega = c\left|\vec{k}\right| = c\sqrt{11} = 3\times10^8\sqrt{11} = 9.95\times10^8\,\text{Hz}$.

Καθώς όμως δίνεται ότι πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικό κύμα και άρα συνάρτηση του $\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$, η αυθαίρετη συνάρτηση $\vec{f}(x,y,z)$ δεν μπορεί παρά να είναι μια σταθερά η οποία αντιστοιχεί σε στατικό πεδίο και μπορούμε να την επιλέξουμε ίση με μηδέν. Επομένως

$$\begin{aligned}\vec{E} &= c\frac{10^{-6}}{k}\left(\hat{x}-4\hat{y}+7\hat{z}\right)\cos\left(\omega t+3x-y-z\right)= \\ &=3\times10^{8}\frac{10^{-6}}{\sqrt{11}}\left(\hat{x}-4\hat{y}+7\hat{z}\right)\cos\left(\omega t+3x-y-z\right) \\ &=90.5\left(\hat{x}-4\hat{y}+7\hat{z}\right)\cos\left(\omega t+3x-y-z\right)\text{V/m}\end{aligned}$$

E)

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{90.5}{1.257\times10^{-6}}10^{-6}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 1 & -4 & 7\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\cos^2\left(\omega t+3x-y-z\right)$$

$$=72.0\left(-18\hat{x}+6\hat{y}+6\hat{z}\right)\cos^2\left(\omega t+3x-y-z\right)$$

$$=432.\left(-3\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\right)\cos^2\left(\omega t+3x-y-z\right)=432.\vec{k}\cos^2\left(\omega t+3x-y-z\right)$$

$$I=\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle=432.\times\sqrt{11}\left\langle\cos^2\left(\omega t+3x-y-z\right)\right\rangle=$$

$$=432.\times\sqrt{11}\times\frac{1}{2}=716.\,\text{W/m}^2$$

Άσκηση 2

Α) Η διεύθυνση διαδόσεως είναι $-\hat{\mathbf{z}}$, άρα έχουμε κυματοσυναρτήσεις $f(k\,z+\omega\,t)$, όπου $\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{z}}$, και $E_z=0=B_z$. Το ότι είναι δεξιόστροφο (ή αριστερόστροφο), δεν σχετίζεται με την φορά διαδόσεως [μια βίδα είναι δεξιόστροφη (ή αριστερόστροφη) και όταν ξεβιδώνεται]. Στον ορισμό δεξιόστροφο - αριστερόστροφο υπάρχει σύμβαση: Σε ένα σημείο του χώρου το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου περιστρέφεται προς τα δεξιά συναρτήσει του χρόνου για ένα παρατηρητή στη διεύθυνση διάδοσης που κοιτάει προς την πηγή.

Άρα ένα στιγμιότυπο που έχει μέγιστο E_x στη θέση $z=z_0$ και ελάχιστο E_x στη θέση $z=z_0-\lambda/2$, θα έχει μέγιστο E_y στη θέση $z=z_0-\lambda/4$. Δηλαδή

$E_x=E_0\cos\left[k\left(z-0\right)+\omega t\right]$, και

$E_y=E_0\cos\left[k\left(z-\lambda/4\right)+\omega t\right]=E_0\cos\left[k\,z-2\pi/4+\omega t\right]=+E_0\sin\left[k\,z+\omega t\right]$.

Αφού η διεύθυνση διαδόσεως $\hat{\mathbf{k}}$ ορίζεται από τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ως $\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}}$, άρα

$\hat{\mathbf{B}}=\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{E}}=-\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{E}}$ ήτοι $c\mathbf{B}=-\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}$, όπου $\hat{\mathbf{z}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, και $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}E_0\cos\left[k\,z+\omega t\right]\\ E_0\sin\left[k\,z+\omega t\right]\\ 0\end{pmatrix}$. Επομένως

$$c\mathbf{B}=-\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & 0 & E_x\\ \hat{\mathbf{y}} & 0 & E_y\\ \hat{\mathbf{z}} & 1 & 0\end{vmatrix}=E_y\hat{\mathbf{x}}-E_x\hat{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}E_y\\ -E_x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_0\sin\left[k\,z+\omega t\right]\\ -E_0\cos\left[k\,z+\omega t\right]\\ 0\end{pmatrix}$$

Β) Η ισχύς P που διαπερνάει μια επιφάνεια A δίνεται από

$$P = \frac{dE}{dt} = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

όπου $\vec{S}$ το διάνυσμα του Poynting, το οποίο στην περίπτωσή μας ισούται με

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & E_x & B_x \\ \hat{\mathbf{y}} & E_y & B_y \\ \hat{\mathbf{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & E_x & E_y / c \\ \hat{\mathbf{y}} & E_y & -E_x / c \\ \hat{\mathbf{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{\mathbf{z}} \left(E_x^2 + E_y^2 \right) / (\mu_0 c) = -\hat{\mathbf{z}} E_0^2 \frac{1}{\mu_0 c}$$

και $d\vec{A}$ το στοιχειώδες εμβαδόν με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια το οποίο εδώ ισούται με

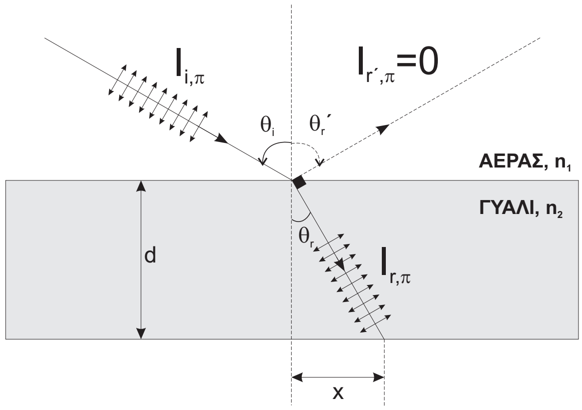
$$d\vec{A} = -\hat{\rho} R d\theta dx$$

όπου $\hat{\rho}$ το μοναδιαίο κατά μήκος της ακτίνας (το αρνητικό πρόσημο γιατί το κάθετο στην επιφάνεια για πρόσπτωση από έξω έχει φορά αντίθετη του $\hat{\rho}$). Άρα

$$\frac{dE}{dt} = -c\varepsilon_0 E_0^2 \int_A \hat{z} \cdot d\vec{A} = cR\varepsilon_0 E_0^2 \int_A \hat{z} \cdot \hat{\rho} dx d\theta =$$

$$= cR\varepsilon_0 E_0^2 \int_A \cos\theta dx d\theta = cR\varepsilon_0 E_0^2 \int_{x=0}^{L} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta dx = cR\varepsilon_0 E_0^2 L \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2RLc\varepsilon_0 E_0^2$$

Άσκηση 3



Α) Εφόσον για την συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης θ_i δεν παρατηρείται ανακλώμενη δέσμη, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για την γωνία ολικής πόλωσης που δίνεται από τον νόμο του Brewster

$$\tan\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την γωνία διάθλασης από τη σχέση $\tan\theta_r = \frac{x}{d} = \frac{5.77}{10} \Rightarrow \theta_r = 30.0^\circ$.

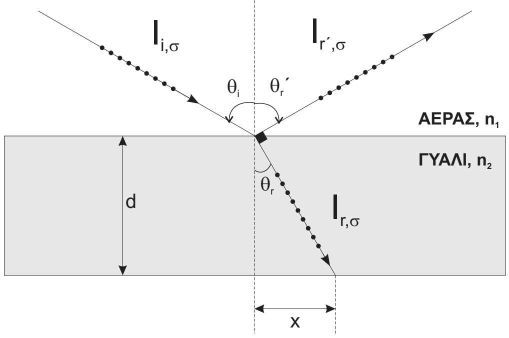
Επίσης από το νόμο του Snell έχουμε $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_r$ (2)

Από τις (1),(2) βρίσκουμε $\sin\theta_i = \tan\theta_i \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_i = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i} \sin\theta_r \Rightarrow \cos\theta_i = \sin\theta_r$

[Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό για την περίπτωση της ολικής πόλωσης, δηλαδή θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας $\theta_r + \theta_i = 90^\circ$]. Άρα βρίσκουμε $\theta_i = 60.0^\circ$.

Β) Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε $n_2 = 1.73$.

Γ) Ο συντελεστής ανάκλασης για την περίπτωση κάθετης πόλωσης στο επίπεδο πρόσπτωσης δίνεται από τις σχέσεις (Alonso-Finn 20.25, σελ. 154)

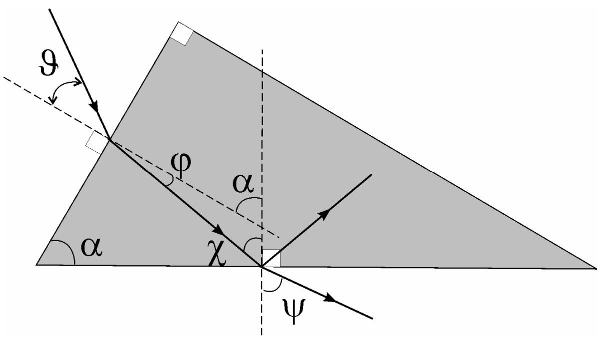


$$R_\sigma = \frac{E_{r',\sigma}}{E_{i,\sigma}} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_r}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_r} = \frac{1\cdot\frac{1}{2} - 1.73\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + 1.73\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -0.4982,$$

και επειδή για τις εντάσεις έχουμε $\frac{I_{r',\sigma}}{I_{i,\sigma}} = \frac{\left|E_{r',\sigma}\right|^2}{\left|E_{i,\sigma}\right|^2} \Rightarrow \frac{I_{r',\sigma}}{I_{i,\sigma}} = R_\sigma{}^2 \Rightarrow I_{r',\sigma} = 24.8\%\, I_{i,\sigma}$.

Άσκηση 4

Εδώ έχουμε το φαινόμενο ολικής ανάκλασης της διαθλώμενης ακτίνας στην κάτω πλευρά του πρίσματος που μπορεί να συμβεί όταν έχουμε πρόσπτωση από πυκνότερο (γυαλί) σε αραιότερο (αέρας) οπτικό μέσο. Καθώς η γωνία ϑ μειώνεται, η γωνία ψ υπό την οποία εξέρχεται η δέσμη αυξάνεται και εάν γίνει ίση με 90^o τότε έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση.



Σ’αυτή την κατάσταση έχουμε $n\sin\chi = \sin\psi \Rightarrow n\sin\chi = 1$ (1)

Επίσης έχουμε $\sin\vartheta_{o\rho} = n\sin\varphi$ (2) και $\varphi + \chi = \alpha$ (3)

Συνδυάζοντας τις τρεις σχέσεις και με δεδομένα $\vartheta_{o\rho} = 30^0$ και $\alpha = 60^0$ βρίσκουμε:

$$n\sin\varphi = \sin\vartheta_{o\rho} \Rightarrow n\sin(\alpha - \chi) = \frac{1}{2} \Rightarrow n\sin\alpha\cos\chi - n\cos\alpha\sin\chi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\chi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n\cos\chi = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow n\sqrt{1-\sin^2\chi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow n^2 - 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow n = 1.53$$

Άσκηση 5

Α) Η ισχύς που εκπέμπεται από ηλεκτρικό δίπολο δίνεται από τη σχέση 19.28 του βιβλίου των Alonso και Finn

$P = \dfrac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$ η οποία ισχύει για αποστάσεις $r \gg \lambda$. Λύνοντας ως προς την άγνωστη συχνότητα βρίσκουμε $\nu = \dfrac{\sqrt{12\pi\varepsilon_0 c^3}\sqrt{P}}{2\pi I_0 z_0} = \dfrac{\sqrt{12\pi \dfrac{10^7}{4\pi c^2} c^3}\sqrt{P}}{2\pi I_0 z_0} = 1.31\,\mathrm{MHz}$. Το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι $\lambda = c/\nu = 229\,m$, πολύ μικρότερο από την απόσταση 2.5 Km, άρα η προσέγγιση ισχύει.

Β) Η ένταση του σήματος (ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας) δίνεται από τη σχέση

$I(\theta) = \dfrac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \dfrac{\sin^2\theta}{r^2}$, όπου θ η γωνία παρατήρησης. Εδώ έχουμε $\tan\theta = \dfrac{2500}{500} \Rightarrow \theta = 78.7^\circ$ και $r = \sqrt{2500^2 + 500^2} = 2550\,m$. Θέτοντας στον τύπο βρίσκουμε

$$I(\theta) = \frac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{I_0^2 4\pi^2 \nu^2 z_0^2}{32\pi^2 \dfrac{10^7}{4\pi c^2} c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{\pi I_0^2 \nu^2 z_0^2}{2\times 10^7 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} = 5.32\times 10^{-6}\, W/m^2$$

Γ) Όταν η κεραία είναι κατακόρυφη, τότε η μέγιστη ένταση εμφανίζεται για $\theta=\pi/2$, δηλαδή στο επίπεδο του σταθμού εκπομπής. Επειδή υπάρχει αξονική συμμετρία (δηλαδή η ένταση δεν εξαρτάται από τη γωνία φ) όλοι οι δέκτες που βρίσκονται στο επίπεδο του σταθμού και στην ίδια ακτίνα r λαμβάνουν την ίδια ένταση, άρα δεν υπάρχει κατευθυντικότητα που είναι ζητούμενο για ένα ραδιοφωνικό σταθμό. Αντίθετα, όταν η κεραία είναι οριζόντια (έστω ότι κατευθύνεται από νότο προς βορρά) η έντασή της εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή: παρατηρητές σε βορρά (θ=0) και νότο (θ=π) λαμβάνουν μηδενική ένταση, ενώ παρατηρητές σε ανατολή (θ=π/2, φ=π/2) και δύση (θ=π/2, φ=-π/2) λαμβάνουν μέγιστη ένταση, άρα υπάρχει έντονη κατευθυντικότητα (μειονέκτημα για ραδιοφωνικό σταθμό).

Άσκηση 6

Για να εκτιμήσουμε τον συνολικό χρόνο πτώσης του ηλεκτρονίου πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα: (α) Να βρούμε σε πόσο χρόνο dt και ενώ το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ακτίνα r χάνει ενέργεια dE. Αυτό δίνεται από τον τύπο Larmor. (β) Όταν χάνει ενέργεια dE τότε η ακτίνα του ηλεκτρονίου ελαττώνεται κτά dr. Για το βήμα αυτό χρησιμοποιούμε την διατήρηση ενέργειας αγνοώντας την ακτινοβολία. (γ) Συνδέουμε τις δύο προηγούμενες σχέσεις και βρήσκουμε σε πόσο χρόνο dt η ακτίνα του ηλεκτρονίου ελαττώνεται κατά dr. (δ) Τέλος υπολογίζουμε τον συνολικό χρόνο πτώσης ολοκληρώνοντας στις ακτίνες μέχρι να μηδενιστούν περίπου.

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

η οποία με χρήση της κινηματικής εξίσωσης της κυκλικής κίνησης

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

Γίνεται

$$E = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Από τη κινηματική εξίσωση βρίσκουμε $\upsilon / c \cong 2\times 10^{-2}$ στην ακτίνα Bohr.
Αντικαθιστούμε την έκφραση $a = \omega^2 r$ στην σχέση 19.38 (τύπος Larmor) και έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^4 r^2}{c^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2(\omega r)^4}{c^3 r^2}$$

Από τον κινηματικό νόμο παίρνουμε

$(\omega r)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση για την ακτινοβολούμενη ισχύ:

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3 \frac{2}{3}\frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}$$

Από την εξίσωση της ενέργειας (απόλυτη τιμή) βρίσκουμε την σχέση ανάμεσα στην μεταβολή της ενέργειας όταν αλλάζει λίγο η ακτίνα, δηλ.

$$dE = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}dr$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε

$$dt = -\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}dr}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3 \frac{2}{3}\frac{e^6}{c^3 m^2 r^4}} = -\frac{3}{4}\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 c^3}{e^4} r^2 dr$$

Μετά από ολοκλήρωση παίρνουμε

$$t = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2}{e^4} R^3$$

Όπου R είναι η ακτίνα Bohr και m η μάζα του ηλεκτρονίου. Μετά από αντικατάσταση βρίσκουμε $t = 1.32\times 10^{-11}\sec \cong 13 ps$ (p=10^{-12} pico) Εύκολα βρίσκουμε ότι η περίοδος του ηλεκτρονίου στην ακτίνα Bohr είναι $T = 1.4\times 10^{-16} = 0.14 fs$ (f=10^{-15}=femto) και άρα το ηλεκτρόνιο κάνει περί τις 10^5 περιστροφές πρωτού το καταβροχθίσει ο πυρήνας.

Άσκηση 7

(α) Για στατικά πεδία ($\omega = 0$) ισχύει

$$\chi = \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} = 3.19 \times 10^3 N \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}$$

Για την πυκνότητα N έχουμε περί τα 10^{28} άτομα ανά m^3 για στερεά και υγρά ενώ για αέρια είναι περίπου 10^{25}. Στην οπτική περιοχή $\omega_i \approx 5 \times 10^{15}\, Hz$ και κατά συνέπεια το άθροισμα $\sum_i \frac{f}{\omega_i^2} \approx 4 \times 10^{-32}$. Τελικά βρίσκουμε $\chi \approx 1$ για στερεά ενώ για αέρια $\chi \approx 10^{-3}$.

(β) Με βάσει τα ανωτέρω, για αέρια ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της εξ. (19.58) του βιβλίου των Alonso και Finn είναι μικρός και έτσι με ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0} \left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \right)$$

Εφόσον οι συχνότητες συντονισμού βρίσκονται στην υπεριώδη περιοχή, στο οπτικό έχουμε $\omega < \omega_i$. Ισχύει

$$\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_i^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_i^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right) = \frac{1}{\omega_i^2} + \frac{\omega^2}{\omega_i^4}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για τον δείκτη διάθλασης παίρνουμε

$$n = 1 + \left(\frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} \right) + \left(\frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^4} \right) \omega^2$$

Συναρτήσει του μήκους κύματος στο καινό $\omega = 2\pi c / \lambda$ γράφεται

$$n = 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

Όπου A, B οι ποσότητες που υπολογίζονται άμεσα από τις δύο τελευταίες σχέσεις. Παρατηρούμε ότι $dn / d\omega > 0$ και άρα έχουμε ομαλή διασπορά.

Άσκηση 8

Α) Η πλάκα είναι τέλειος απορροφητής. Η δύναμη $F = pA$ όπου $p = u =$ πυκνότητα ενεργείας.

Από την ένταση που δίδεται $I = uc \Rightarrow u = I/c = p$.

Άρα η δύναμη $F = IA/c = 1400\,\mathrm{W/m^2}\ 2\,\mathrm{m^2} / 3\times10^8\,\mathrm{m/s} = 9.33\ 10^{-6}\,\mathrm{N}$

Β) Σε διπλάσια απόσταση η ένταση υποτετραπλασιάζεται, $I' = I/4$

Άρα $F' = I'A/c = F/4 = 2.33\ 10^{-6}\,\mathrm{N}$

Γ) Η δύναμη ισούται με την μεταβολή της ορμής, που στον τέλειο απορροφητή, χωρίς ανάκλαση, είναι κατά την διεύθυνση διαδόσεως (ενώ, με ανάκλαση, θα ήταν κάθετη στην επιφάνεια) ανά μονάδα χρόνου. Η ορμή ανά μονάδα χρόνου ισούται με την ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που προσκρούει στην επιφάνεια / c^2 επί την ταχύτητα c, δηλαδή (dE/dt)/c. Η ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που προσκρούει στην επιφάνεια ισούται με την πυκνότητα ενεργείας u επί τον όγκο που διαπερνά την επιφάνεια (με ταχύτητα c) ανά μονάδα χρόνου. Ο όγκος αυτός ισούται με την βάση, που είναι η διατομή της επιφάνειας η κάθετη προς την διεύθυνση διαδόσεως, $dA \cos\theta$, επί το ύψος ανά μονάδα χρόνου, που ισούται με c. Άρα η κατακόρυφη (κατά την διεύθυνση διαδόσεως, λόγω πίεσης ακτινοβολίας) δύναμη σε μια επιφάνεια dA, εστραμμένη υπό γωνίαν θ, είναι $dF = u\, dA \cos\theta$.

dA=(*βάση*) x (*ύψος*) = $(Rd\theta)(R\sin\theta\, d\varphi)\ \Big|_{\phi=0}^{2\pi}$

$dF = (u \cos\theta)\, dA = u\, 2\pi R^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta = -I/c\; 2\pi R^2\, d(\cos^2\theta)/2\ \Big|_{\theta=0}^{\pi/2}$.

Άρα $F_{ολ}= I/c\; \pi R^2$

[Αν η επιφάνεια ήταν τέλειος ανακλαστής, η δύναμη θα ήταν κάθετη στην επιφάνεια με μέτρο ίσο προς $2 \cos\theta$ της ανωτέρω dF ($=2u \cos^2\theta\, dA$). Η συνιστώσα αυτής η κάθετη προς την διεύθυνση διαδόσεως θα ωθούσε την επιφάνεια προς το κέντρο, και θα εξισορροπείτο με την συμμετρική δύναμη στην αντιδιαμετρικά κείμενη επιφάνεια. Η παράλληλη προς την διεύθυνση διαδόσεως συνιστώσα ($\cos\theta$) θα ωθούσε προς τα κάτω. Άρα η ασκουμένη δύναμη θα ήταν $2u \cos^3\theta\, dA$, $= -2I/c\; 2\pi R^2\, d(\cos^4\theta)/4\ \Big|_{\theta=0}^{\pi/2}$
Άρα θα ήταν $F_{ολ}= I/c\; \pi R^2$ και πάλι.]

Άσκηση 9

Α) Από τον πρώτο πολωτή εξέρχεται γραμμικά πολωμένο φως με ηλεκτρικό πεδίο μήκος του άξονα πόλωσης. Επειδή ο δεύτερος πολωτής έχει άξονα κάθετο σε αυτό προφανώς η εξερχόμενη ένταση είναι μηδενική.

Β) Έστω I_0 η προσπίπτουσα ένταση. Επειδή το φυσικό φως είναι τυχαία πολωμένο η εξερχόμενη ένταση από τον πρώτο πολωτή είναι $I_0/2$ με ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς τον άξονα πόλωσης. Έστω ότι ο δεύτερος πολωτής σχηματίζει γωνία θ με τον πρώτον, τότε η εξερχόμενη από τον δεύτερο πολωτή ένταση θα είναι σύμφωνα με το νόμο του Malus

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta$$

και η εξερχόμενη από τον τρίτο πολωτή ένταση είναι

$$I_3 = I_1\cos^2\left(90^\circ - \theta\right) = I_1\sin^2\theta = \frac{I_0}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta$$

Επομένως

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta = \frac{1}{16} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$$

Γ) Η γωνία θ θα δίνεται από $\theta = \frac{\pi}{8} + \omega t$, συνεπώς

$$I_{out} = \frac{I_0}{8}\sin^2\left[\frac{\pi}{4} + 2\omega t\right] = \frac{I_0}{16}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\omega t\right)\right] = \frac{I_0}{16}\left[1 - \sin(4\omega t)\right]$$

Δ) Η εξερχόμενη ένταση μεταβάλλεται με συχνότητα 4ω

Άσκηση 10

Το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα πολώσεως δίνεται από

$$\hat{n} = \hat{x}\cos\frac{\pi}{3} + \hat{y}\sin\frac{\pi}{3} = \hat{x}\frac{1}{2} + \hat{y}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνεπώς η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που εξέρχεται από τον πολωτή είναι

$$E_{out} = \vec{E}\cdot\hat{n} = E_0\sin\frac{\pi}{3}\cos(kz-\omega t) + E_0\cos\frac{\pi}{3}\cos(kz-\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$= E_0\cos\frac{\pi}{3}\cos(kz-\omega t) - E_0\sin\frac{\pi}{3}\sin(kz-\omega t) = E_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

Η εξερχόμενη δέσμη είναι επίπεδα πολωμένη κατά μήκος του άξονα πόλωσης

$$\vec{E}_{out} = E_0\left(\hat{x}\frac{\sqrt{3}}{2} + \hat{y}\frac{1}{2}\right)\sin\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Η ένταση της εξερχόμενη δέσμης είναι (βλ Alonso και Finn 19.17)

$$I = \frac{c\varepsilon_0 E_0^{\ 2}}{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Στους συνήθεις αγωγούς ο λόγος *σ/ε* είναι στην περιοχή του υπεριώδους, και επομένως όλα τα Η/Μ κύματα από χαμηλές συχνότητες, ραδιοφωνικά, μικροκύματα, υπέρυθρα, μέχρι και ορατά, έχουν *ω<<σ/ε*. Τότε διεισδύουν μέχρι το επιδερμικό βάθος, το οποίον εναττώνεται με την συχνότητα. Υπό την έννοια αυτή, ως υψίσυχνα θεωρούνται π.χ. τα μικροκύματα, όχι όμως και οι πιό υψηλής συχνότητος ακτίνες, με *ω>>σ/ε*.

Παρακάτω διευκρινίζεται η έννοια του «υψίσυχνου»:

Η διαφορική εξίσωση επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε αγώγιμο υλικό αγωγιμότητας σ, μαγνητικής επιδεκτικότητας μ, και διηλεκτρικής σταθεράς ε, είναι

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mu\sigma\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

όπου f οποιαδήποτε απο τις συνιστώσες του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

Έστω οτι το επίπεδο κύμα διαδίδεται κατά την x-διεύθυνση ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$).

Δοκιμάζω λύση $f = f_0 e^{i\omega t-\gamma x}$ με $\gamma = a + \iota\beta$ άγνωστο. Αντικαθιστώντας τις παραγώγους στην διαφορική εξίσωση παίρνω

$$\gamma^2 f = i\mu\sigma\omega f - \mu\varepsilon\omega^2 f \Rightarrow \gamma^2 = -\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Ο μιγαδικός αυτός αριθμός βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, άρα η τετραγωνική του ρίζα βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο, δηλ. $\gamma = a + \iota\beta$ με $a > 0,\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \beta > 0$. Για να βρώ την τετραγωνική ρίζα εξισώνω τα τετράγωνα (γ^2) και λύνω το δευτεροβάθμιο σύστημα ως προς $a(>0),\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \beta(>0)$

$$\{\ a^2-\beta^2=-\mu\varepsilon\omega^2,\ \ 2\alpha\beta=\mu\sigma\omega\ \} \Rightarrow \beta^2=\frac{2\mu\varepsilon\omega^2\pm\sqrt{\left(2\mu\varepsilon\omega^2\right)^2+4\left(\mu\sigma\omega\right)^2}}{4}$$

και επιλέγω τα θετικά α και β:

$$a=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}\ (>0),\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}\ (>0)$$

Αντικαθιστώτας στην λύση $f=f_0e^{i\omega t-\gamma x}=f_0e^{i\omega t-(a+\iota\beta)x}=f_0e^{i(\omega t-\beta x)-ax}=f_0e^{i(\omega t-\beta x)}e^{-ax}$, που παριστάνει κύμα (λόγω του 1^{ου} παράγοντα) με απόσβεση (λόγω του 2^{ου}), έχω

$$f=f_0e^{i\omega\left(t-x\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}\right)}e^{-x\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}}\equiv f_0e^{i\omega(t-x/\upsilon)}e^{-ax}.$$

Άρα στη διάδοση με απόσβεση υπεισέρχεται ο λόγος $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ (στους καλούς αγωγούς ο λόγος $\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ είναι στην περιοχή του υπεριώδους).

α) Αν $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$ ή $\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\ll\omega$ (π.χ. ακτίνες Χ, γ) τότε $f=f_0e^{i\omega\left(t-x\sqrt{\mu\varepsilon}\right)}e^{-x0}$, δηλαδή οι σκληρές ακτίνες περνούν χωρίς απόσβεση με ταχύτητα $\upsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ και μήκος κύματος $\lambda=\dfrac{1}{\nu\sqrt{\mu\varepsilon}}$ μέσα στο υλικό.

β) Αν $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$ ή $\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\gg\omega$ (π.χ. ραδιοφωνικά, μικροκύματα, θερμικά, μέχρι και ορατά) τότε $f=f_0e^{i\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}\right)}e^{-x\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}}\equiv f_0e^{i\left(\omega t-x\frac{2\pi}{\lambda}\right)}e^{-\frac{x}{x_0}}$, οπότε αυτά διεισδύουν σε «βάθος» $x_0=\sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$ με μήκος κύματος $\lambda=\dfrac{x_0}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$ μέσα στο υλικό, που και αυτό ελαττούται με την συχνότητα.

Άρα αυτά αποσβένυνται σε βάθος $x_0\approx 2\pi\lambda\sim(7-10)\lambda$, που σημαίνει οτι αν το πάχος του υλικού είναι μικρότερο από ~10λ, πάλι διαπερνούν τον αγωγό, όπως, π.χ., τα ραδιοφωνικά κύματα. Τούτο συμφωνεί και με την διαίσθηση, οτι αν το πάχος έτεινε στο 0 (δηλ. αν δεν υπήρχε υλικό) το κύμα θα συνέχίζε ανεπηρέαστο.

2)Σε ένα τοπίο που καλύπτεται από ομίχλη έχουμε έντονα φαινόμενα σκέδασης του φωτός που δημιουργεί πρόβλημα στη φωτογραφία. Γνωρίζουμε ότι για κάθετη παρατήρηση στην διεύθυνση διάδοσης του φυσικού (μη πολωμένου) φωτός η σκεδαζόμενη ακτινοβολία είναι γραμμικά πολωμένη με επίπεδο πόλωσης κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις της αρχικής και της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας. Ετσι αν τοποθετήσουμε μπροστά από το φακό της φωτογραφικής μηχανής πολωτικό φίλτρο με τον οπτικό του άξονα παράλληλο στο επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις της αρχικής και της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας μπορούμε να μηδενίσουμε την ένταση της τελευταίας.

3) Στο πλακίδιο διαδίδονται η τακτική και η έκτακτη ακτίνα με δείκτες διάθλασης σύμφωνα με τον πίνακα 20-2 του βιβλίου των Alonso και Finn $n_o = 1.5533,\ n_e = 1.5442$. Αν το πάχος του κρυστάλλου είναι x σε αυτόν περιέχονται

$$N_e = \frac{x}{\lambda_e} = \frac{x\,n_e}{\lambda}$$

μήκη κύματος της έκτακτης ακτίνας και

$$N_o = \frac{x}{\lambda_o} = \frac{x\,n_o}{\lambda}$$

της τακτικής. Για να έχουμε πλακίδιο $\lambda/4$ θα πρέπει

$$N_e - N_o = \frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda}\left(n_e - n_o\right) \to x = \frac{\lambda}{4\left(n_e - n_o\right)} = 0.016\text{mm}$$

4) Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητες πολύ κοντά στη ταχύτητα του φωτός και, κατά συνέπεια, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Lienard για κυκλική κίνηση, εξ. 19.42 με κεντρομόλο επιτάχυνση $a \cong c^2/r$. Η ακτίνα του LHC είναι $r = C/2\pi = 27\times10^3 m/6.28 \cong 4.3\times10^3 m$. Για την ακτινοβολούμενη ισχύ έχουμε

$$P = \gamma^4 P_0$$

Όπου $$P_0 = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2 c^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3 r^2} = \frac{e^2 c}{6\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.6\times10^{-38} C^2 \cdot 3\times10^8 m/s}{6\cdot 3.14\cdot 8.8\times10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}\cdot 1.8\times10^7 m^2}$$

$$\cong 2.5\times10^{-27} W$$

Παρατηρούμε ότι για μη σχετικιστικές ταχύτητες η ακτινοβολία συγχρότρου ανά περιστροφή είναι αμελητέα.

Η ολική ενέργεια των σωματίων είναι $E = 7TeV$ ενώ η μάζα του πρωτονίου είναι $m_p = 1GeV/c^2$ και του ηλεκτρονίου $m_e \cong 0.5MeV/c$. Ο σχετικιστικός παράγοντας γ είναι για πρωτόνια:

$$\gamma_p = \frac{E}{m_p c^2} = \frac{7TeV}{1GeV} = 7\times10^3$$

Ενώ για ηλεκτρόνια

$$\gamma_e = \frac{E}{m_p c^2} = \frac{7TeV}{0.5MeV} = 14\times10^6$$

Τελικά έχουμε για ένα σωμάτιο $P_p = \gamma_p^4 P_0 \cong 6.2\times10^{-12} W$ και $P_e = \gamma_e^4 P_0 \cong 100W$ (!) ενώ για την κάθε δέσμη $P_{p,N} = NP_p \cong 0.6W$, $P_{e,N} = 10^{13} W$. Παρατηρούμε την πολύ μεγάλη διαφορά στην εκπομπή ανάμεσα στα πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Προφανώς το LHC δεν θα μπορούσε να επιταχύνει ηλεκτρόνια σε τόσο υψηλές ενέργειες.

Για να βρούμε την συνολική ενέργεια πού χάνεται υπολογίζουμε τον αριθμό περιστροφών σε 24 ώρες διαιρώντας την χρονική διάρκεια των 86400s με την περίοδο περιστροφής $T \approx 9\times10^{-5} s$ και βρίσκουμε περίπου 10^9 περιστροφές. Παρατηρούμε ότι η συνολική εκπομπή για πρωτόνια είναι της τάξης των 50kJ, δηλαδή αρκετά μικρή.

5) Το γωνιακό άνοιγμα του πεδίου είναι ίσο με $2\theta_c$ όπου θ_c η γωνία διαθλάσεως μιας εφαπτομενικής ακτίνας που πέφτει στο νερό

$$\sin\theta_c = \frac{1}{1.33} \Rightarrow 2\theta_c = 97.6°$$