7/1/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

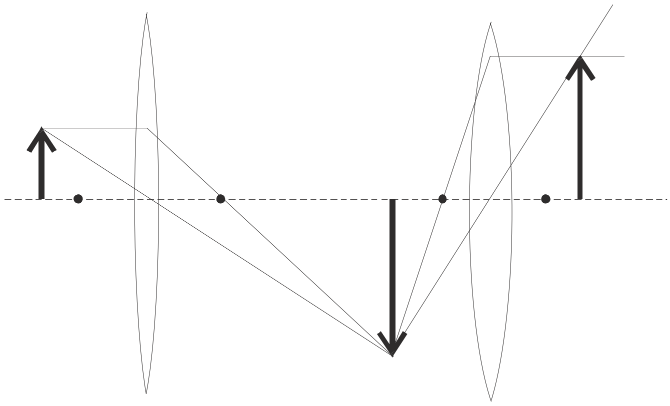
ΦΥΕ 34 2008-09

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 3/2/08

Άσκηση 1

Α)



Β)Για το σχηματισμό ειδώλου από τον πρώτο φακό έχουμε $p_1 = 12\text{cm}$ (θετικό γιατί είναι αντικείμενο στη μεριά που ξεκινάνε οι ακτίνες), $f_1 = 8\text{cm}$ και εφαρμόζοντας την εξίσωση του

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow q_1 = 24\text{cm}$$

επομένως το είδωλο βρίσκεται στην πλευρά που περνάει το φως (δεξιά του φακού) και είναι πραγματικό. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το είδωλο ως αντικείμενο για το δεύτερο φακό. Αυτό βρίσκεται σε απόσταση $p_2 = 36\text{cm} - 12\text{cm}$=24cm δεξιά από αυτόν (στην περιοχή απ'όπου έρχεται το φως). Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά τον τύπο του Descartes

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{6} \Rightarrow q_2 = 12\text{cm}$$

Επομένως το είδωλο είναι πραγματικό και ορθό και βρίσκεται σε απόσταση 12cm δεξιά του δεύτερου φακού.

Γ) Η μεγέθυνση του πρώτου φακού είναι

$$M_1 = -\frac{24\text{cm}}{12\text{cm}} = -2$$

του δευτέρου

$$M_2 = -\frac{12\text{cm}}{12\text{cm}} = -1$$

και του συστήματος $M = M_1 M_2 = 2$. Ο δεύτερος φακός απλώς φέρνει το είδωλο στην ορθή θέση.

Δ) Έστω x η απόσταση των φακών. Το είδωλο από τον πρώτο σχηματίζεται σε απόσταση $p_2 = x - 24$ από τον δεύτερο. Ζητείται το είδωλο από τον δεύτερο να σχηματιστεί σε απόσταση $x+12$ από τον δεύτερο και επειδή είναι από την πλευρά που πέφτουν οι ακτίνες $q_2 = -(x+12)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Descartes παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-24} + \frac{1}{-(x+12)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2 - 12x - 504}{-6(x-24)(x+12)} = 0 \Rightarrow x = 6\left(1 \pm \sqrt{15}\right)$$

Από τις οποίες αποδεκτή, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, είναι μόνο η θετική

$$x = 6\left(1+\sqrt{15}\right) \approx 29.2\text{cm}$$

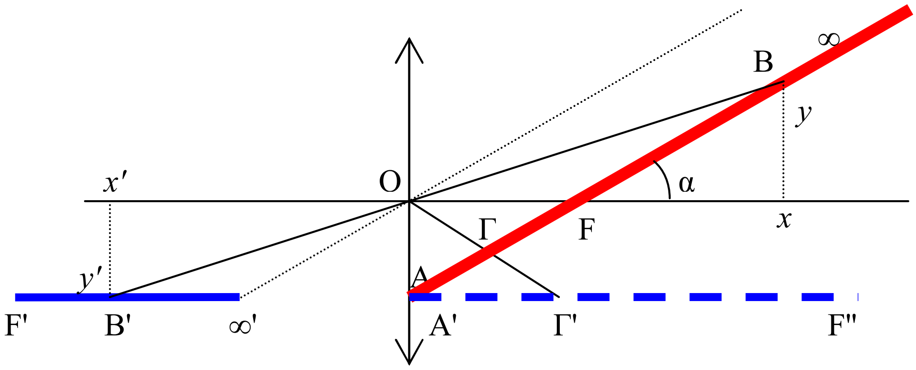
Ε) Το είδωλο σε αυτήν την περίπτωση θα είναι φανταστικό, αφού βρίσκεται από τη μεριά που πέφτουν οι ακτίνες. Η μεγέθυνση του δεύτερου φακού θα είναι

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-(x+12)}{(x-24)} = \frac{18+6\sqrt{15}}{18-6\sqrt{15}} = 4+\sqrt{15} = 7.87$$

Η συνολική μεγέθυνση του συστήματος θα είναι $M = M_1 M_2 \approx -15.7$ και επομένως το είδωλο θα είναι ανεστραμμένο και 15.7 φορές μεγαλύτερο του αντικειμένου δηλαδή έχει μέγεθος $8 \times 7.87 = 126.\text{cm}$

Άσκηση 2

Α) Φακός συγκλίνων



Έστω (ΑΓFB∞) η ημιευθεία που διέρχεται από την εστία F, και έχει κλίση α. Από το σχεδιάγραμμα κυρίων ακτίνων φαίνεται οτι το είδωλο του τμήματος (FB∞) είναι το (F'B'∞') πραγματικό, όπου το σημείο ∞' είναι στο εστιακό επίπεδο, ενώ το είδωλο του (ΑΓF) είναι το (Α'Γ'F'') φανταστικό.

Για σημείο (x,y), έχουμε από την εξίσωση του φακού

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \Rightarrow x' = \frac{f\,x}{x-f} \tag{1}$$

Από δε τα όμοια τρίγωνα (ΟΒx), (Ο'Β'x') έχουμε $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$, οπότε από την (1) παίρνουμε

$$y' = y\frac{x'}{x} = \frac{f\,y}{x-f} \tag{2}$$

Για το τμήμα (F'B'∞') όταν το $x \to f^+$, τότε το $x' \to \infty$ $(x' > 0)$ δηλαδή προς την μεριά εξόδου (πραγματικό). Όταν το $x \to \infty$, τότε το $x' \to f$ (πραγματικό).

Είναι $y' < 0$, άρα το είδωλο ανεστραμμένο.
Για το τμήμα (ΑΓF) όταν το $x \to f^-$, τότε το $x' \to -\infty$ $(x' < 0)$, όχι προς την μεριά εξόδου (φανταστικό). Όταν το $x \to 0^+$, τότε το $x' \to 0^-$ $(x' < 0)$ και πάλι φανταστικό. Τώρα είναι $y < 0,\ y' < 0,\ (y'/y) > 0$ άρα το είδωλο είναι ορθό.
Από την εκφώνηση, η εξίσωση της ημιευθείας είναι

$$y = a(x - f)\ ,\ (x > 0) \qquad (3)$$

Άρα, από (2), ή και από το τρίγωνο ΟΑF, έχουμε $y' = a\,f$, δηλαδή το είδωλο βρίσκεται σε σταθερό ύψος ανάλογο της κλίσεως a που ορίζεται από το σημείο τομής της ημιευθείας με τον φακό.

Β) Φακός αποκλίνων
Αν ο φακός είναι αποκλίνων θα έχει $f = -|f| < 0,\ x' = -|x'| < 0$ Το είδωλο είναι πάντοτε φανταστικό και ορθό, αφου οι εξερχόμενες ακτίνες αποκλίνουν, άρα

$$\frac{y'}{y} = \frac{|x'|}{x}, \text{ και } \frac{1}{x} + \frac{1}{-|x'|} = \frac{1}{-|f|}, \text{ όπου τώρα } y = a(x - |f|)$$

Απαλείφοντας τα x, y από τις δύο τελευταίες και αντικαθιστώντας στην 1η, έχουμε

$$y' = -a|f| + 2a|x'|$$

δηλαδή ευθεία που διέρχεται από την αρχή της δοθείσης ημιευθείας και έχει διπλάσια κλίση από την δοθείσα. Βρίσκεται ολόκληρη στο μέρος της δοθείσης.

Άσκηση 3
Η διαφορά δρόμου ανάμεσα στα δύο ηχητικά κύματα όταν ο παρατηρητής βρίσκεται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα δίνεται από τον προσεγγιστικά από*

$$\Delta r_A = d\sin\theta_A$$
$$\Delta r_B = d\sin\theta_B$$

όπου d η απόσταση των ηχείων μεταξύ τους. Έστω $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ η διαφορά φάσης ανάμεσα από τα δύο ηχεία , αυτή αντιστοιχεί σε πρόσθετη διαφορά δρόμου

$\Delta r_\varphi = \dfrac{\Delta\varphi\,\lambda}{2\pi} = \dfrac{\Delta\varphi\,\upsilon}{2\pi f}$ όπου f η συχνότητα του ηχητικού κύματος και υ η ταχύτητα του ήχου. Τα μέγιστα παρουσιάζονται όταν η διαφορά δρόμου ισούται με ακέραια πολλαπλάσια του μήκους κύματος

$$\Delta r_A + \Delta r_\varphi = d\sin\theta_A + \frac{\Delta\varphi\,\lambda}{2\pi} = m\,\lambda \Rightarrow d\sin\theta_A = \left(m - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)\lambda,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots (1)$$

και τα ελάχιστα για

$$\Delta r_B + \Delta r_\varphi = d\sin\theta_B + \frac{\Delta\varphi\,\lambda}{2\pi} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow d\sin\theta_B = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)\lambda,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots (2)$$

Για το πρώτο μέγιστο και ελάχιστο θα έχουμε $n = 0, m = 0$ οπότε διαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2) βρίσκουμε

$$\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_A} = \frac{\Delta\varphi - \pi}{\Delta\varphi} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow 1 - \frac{\pi}{\Delta\varphi} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{\dfrac{OB}{OA} - 1} = -8.01^\circ$$

Αφαιρόντας τις (1), (2) παίρνουμε

$$d\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{1.00\left(12.2 - 0.52\right)}{30.0} = \frac{343}{2f} \Rightarrow f = 440.Hz$$

*Σημείωση: Ο τύπος αυτός είναι προσεγγιστικός και ισχύει για μικρές γωνίες θ. Μια ακριβέστερη έκφραση εδώ θα ήταν $\Delta r_A = \sqrt{30^2 + (12.2+0.5)^2} + \sqrt{30^2 + (12.2-0.5)^2}$ $= 0.01667$, $\Delta r_B = \sqrt{30^2 + (0.52+0.5)^2} + \sqrt{30^2 + (0.52-0.5)^2} = 0.3767$ η οποία οδηγεί σε παραπλήσια αποτελέσματα $\Delta\phi = -8.33^{\circ}, f = 476.Hz$

Άσκηση 4

Ο $2^{ος}$ λήπτης θα λαμβάνει πάντοτε τον κεντρικό κροσσό ανεξαρτήτως συχνότητος, επομένως θα είναι δέκτης κάθε σήματος που εκπέμπεται για τον $1^{ο}$ λήπτη.

Οι κροσσοί συμβολής περιγράφονται από την συνάρτηση

$$\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)} = \frac{\sin\left(\frac{Nf\pi d}{c}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{f\pi d}{c}\sin\theta\right)}$$

Εδώ $\sin\theta \approx \theta \approx y / L$ και $y = \upsilon t$

Ο $n^{ος}$ κροσσός γίνεται στον $n^{ον}$ μηδενισμό του παρονομαστού $(\sin a = 0 \Rightarrow a = n\pi)$, δηλαδή $\frac{f\pi d}{c}\sin\theta \approx \frac{f\pi d}{c}\frac{y}{L} = n\pi \Rightarrow f = n\frac{cL}{yd}, n = 1,2,\ldots$

Το $1^{ο}$ σήμα εκπέμπεται σε $t = 0$ και τα επόμενα σε $t = mT, m = 1,2,\ldots$

Για να έχουμε λήψη σε κάθε εκπομπή και από τους δύο χρήστες, αρκεί σε χρόνο $t = T$ ο $1^{ος}$ να πέσει σε μέγιστο, οπότε οι δυνατές τιμές της συχνότητας εκπομπής είναι

$$f = n\frac{cL}{\upsilon Td}, n = 1,2,\ldots$$

Β) Η ελάχιστη δυνατή συχνότητα αντιστοιχεί σε n=1 και είναι $f = \frac{cL}{\upsilon Td}$

Άσκηση 5

Α) Σύμφωνα με το Παράδειγμα 22.3 του Alonso για πλακίδιο με παράλληλες επιφάνειες πάχους a_0 έχουμε για κάθετη πρόσπτωση, συμβολή από ανάκλαση

Μέγιστα: $4na_0 = (2m+1)\lambda$

Ελάχιστα: $4na_0 = 2m\lambda$

όπου ο ακέραιος m παριστά την τάξη της συμβολής. Για το σφηνοειδές πλακίδιο έχουμε μεταβλητό πλάτος ίσο με $a = a_0 + \omega x$ (επειδή το πλακίδιο είναι λεπτό) και κατά συνέπεια τα μέγιστα/ελάχιστα είναι συνάρτηση της απόστασης x από την άκρη του πλακιδίου:

Μέγιστα: $4n(a_0 + \omega x) = (2m+1)\lambda$

Ελάχιστα: $4n(a_0 + \omega x) = 2m\lambda$

Β) Για να βρούμε την απόσταση Δx που απέχουν στο πλακίδιο δύο διαδοχικές τάξεις ενισχυτικής συμβολής χρησιμοποιούμε την πρώτη σχέση σε τάξη συμβολής m στην θέση x και τάξη m+1 στην θέση x+Δx:

Τάξη συμβολής m: $4n(a_0 + \omega x) = (2m+1)\lambda$

Τάξη συμβολής m+1: $4n[a_0 + \omega(x+\Delta x)] = (2m+1)\lambda$

Μετά από αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε $\omega\Delta x = \dfrac{\lambda}{2n}$. Παρατηρούμε ότι το επιπλέον ενεργό πάχος $\omega\Delta x$ λόγω της κεκλιμένης άνω επιφάνειας είναι ίσο με το μισό μήκος κύματος στο μέσο, δηλ. $\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{1}{n}$ και κατά συνέπεια μια πλήρης διαδρομή αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος, χαρακτηριστική ιδιότητα τα ενισχυτικής συμβολής. Η απόσταση Δx κροσσών διαδοχικής τάξης δεν εξαρτάται από το m ενώ είναι αντίστροφα ανάλογη της κλίσης των πλακών, μεγάλη κλίση αντιστοιχεί σε πυκνότερους κροσσούς.

Άσκηση 6

Α) Για περίθλαση κατά Fraunhofer από δύο όμοιες παράλληλες σχισμές πλάτους *b* που απέχουν απόσταση *a*, η κατανομή της έντασης είναι

$$I(\vartheta) = I_0\left(\frac{\sin(\pi b\sin\vartheta/\lambda)}{\pi b\sin\vartheta/\lambda}\right)^2 \cos^2\frac{\pi a\sin\vartheta}{\lambda} \quad (1)$$

Οι φωτεινοί κροσσοί αντιστοιχούν σε μέγιστα συμβολής (μεγιστοποίηση του όρου $\cos^2$), δηλαδή $\dfrac{\pi a\sin\vartheta}{\lambda} = \pm n\pi \Rightarrow \dfrac{a\sin\vartheta}{\lambda} = \pm n, \quad n = 0,1,2,3,...$ (2)

Από τα δεδομένα έχουμε ότι ο φωτεινός κροσσός με n=1 εμφανίζεται στη θέση *x*=177 mm, άρα βρίσκουμε $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta = x/\ell = 177\times10^{-3}/2 \Rightarrow \sin\vartheta = 88.5\times10^{-3}$ και $\lambda = a\sin\vartheta = 6\times10^{-6}\cdot 88.5\times10^{-3}\text{m} \Rightarrow \lambda = 531\,\text{nm}$.

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε φωτεινούς κροσσούς σε

$$x = \pm n\frac{\lambda\ell}{a} = \pm n\frac{531\times10^{-9}}{6\times10^{-6}}2m = \pm 0.177\,n$$

Η οποία αναπαράγει για $n = 1,\dots,6$ τα δεδομένα με εξαίρεση τον φωτεινό κροσσό στη θέση *x*=707 mm που αντιστοιχεί σε *n*=4 και γωνία $\sin\vartheta' \approx \tan\vartheta' = x/\ell = 707\times10^{-3}/2 \Rightarrow \sin\vartheta' = 353.5\times10^{-3}$. Αυτό σημαίνει ότι στη θέση αυτή εμφανίζεται το πρώτο ελάχιστο του όρου περίθλασης, άρα έχουμε $b\sin\vartheta' = \lambda \Rightarrow b = 531\times10^{-9}/353.5\times10^{-3}\text{m} = 1.5\,\mu\text{m}$.

Β) Το πλήθος των φωτεινών κροσσών περιορίζεται σε πρώτη φάση από τον αριθμό *n* των μεγίστων συμβολής που με τη σειρά του καθορίζεται από τη σχέση (2) και τη συνθήκη $\sin\vartheta \le 1 \Rightarrow \dfrac{n\lambda}{a} \le 1 \Rightarrow n \le \dfrac{a}{\lambda} = \dfrac{6\times10^{-6}}{531\times10^{-9}} = 11.3$, άρα $n_{\max} = 11$. Επιπλέον, λόγω του παράγοντα περίθλασης εμφανίζονται ελάχιστα στους κροσσούς τάξης *n*=4 και *n*=8. Άρα το πλήθος των φωτεινών κροσσών είναι 19 και εμφανίζονται στις θέσεις $x = \ell\sin\vartheta = \pm n\dfrac{\lambda}{\alpha}\ell, \quad n = 0,1,2,3,5,6,7,9,10,11$, δηλαδή

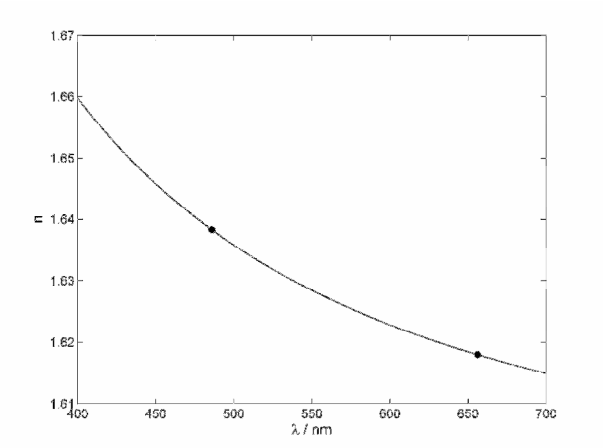
$x = 0, \pm177, \pm353, \pm530, \pm883, \pm1060, \pm1237, \pm1590, \pm1767, \pm1943\,\text{mm}$.

Γ) Στην περίπτωση που καλυφθεί η μία από τις δύο σχισμές με αδιαφανές πέτασμα η κατανομή της έντασης δίνεται από τον παράγοντα περίθλασης τα μέγιστα του οποίου εμφανίζονται στις θέσεις $x = 0, \pm1011, \pm1738\text{mm}$ (δες παράδειγμα 23.1)

Άσκηση 7

Α) Αφού το πρίσμα είναι ισόπλευρο, έχουμε $A = 60^\circ$ και άρα από τη σχέση 21.34

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}{\sin\frac{1}{2}A} \quad (1)$$



υπολογίζουμε τους συντελεστές διάθλασης για κόκκινο και μπλε φως $n_\kappa = 1.6180$ και $n_\mu = 1.6383$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σταθερές C, B στον τύπο του Cauchy $n = C + B/\lambda^2$ (21.36) με βάση τα δεδομένα:

$$\begin{aligned} 1.6180 &= C + B/(656\,\mathrm{nm})^2 \\ 1.6383 &= C + B/(486\,\mathrm{nm})^2 \end{aligned} \Rightarrow B = 10628\,\mathrm{nm}^2, C = 1.5933$$. Άρα η ζητούμενη έκφραση

$$n = 1.5933 + 10628/\lambda^2 \quad (2)$$

όπου το λ δίνεται σε nm.

Β) Από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $n_\pi = 1.6311$, οπότε λύνοντας τη σχέση (1) ως προς $\delta_{\min}$ βρίσκουμε τη γωνία ελάχιστης εκτροπής για το πράσινο φως, $\delta_\pi = 49.3^\circ$

Γ) Η διασπορά του πρίσματος ορίζεται από τη σχέση 21.35

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda} \quad (3)$$

Για τον υπολογισμό του γεωμετρικού όρου $d\delta/dn$ χρησιμοποιούμε τη σχέση (σελ. 216)

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r} \quad (4)$$

όπου i' και r οι γωνίες διάθλασης όπως ορίζονται στο σχήμα 21-23. Για τον υπολογισμό τους εφαρμόζουμε τον νόμο του Snell, οπότε έχουμε:

$\sin\vartheta = n_\pi \sin r \Rightarrow r = 33.8^\circ$.

Η γωνία πρόσπτωσης r' από την εσωτερική πλευρά του πρίσματος είναι $r' = A - r = 26.2^\circ$. Άρα η γωνία διάθλασης i' δίνεται από τη σχέση

$n_\pi \sin r' = \sin i' \Rightarrow i' = 46.2^\circ$.

Θέτοντας στη σχέση (4) βρίσκουμε $\frac{d\delta}{dn} = 1.5039\,\mathrm{rad}$. Επίσης η σχέση (2) δίνει $\frac{dn}{d\lambda} = -2\cdot 10628/\lambda^3$, οπότε η σχέση (3) δίνει τελικά

$$D = 1.5039\left(-\frac{2\cdot 10628}{530^3}\right)\mathrm{rad(nm)^{-1}} = -2.15\times 10^{-4}\,\mathrm{rad/nm}.$$

Άσκηση 8

Έστω η εγκάρσια μαγνητική λύση (TM) της σελίδας 279 του βιβλίου του Alonso:

$$E_x = -\frac{k_2}{k_1} E_0 \sin k_2 y \sin(\omega t - k_1 x), \quad E_y = E_0 \cos(k_2 y)\sin(\omega t - k_1 x), \quad E_z = 0$$

$$B_x = B_y = 0, \qquad \mathrm{B}_z = \frac{\omega}{k_1 c^2} E_0 \cos(k_2 y)\cos(\omega t - k_1 x)$$

Α) Η σχέση διασποράς για τον κυματαγωγό είναι $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_1^2 + k_2^2$, όπου k_1 στην κατεύθυνση διάδοσης x και $k_2 = \frac{n\pi}{a}$ από τις συνοριακές συνθήκες στην κατεύθυνση y. Ορίζουμε την συχνότητα αποκοπής ως $\omega_n = \frac{n\pi c}{a}$ και έχουμε

$$k_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}\,.$$

Για τις ταχύτητες διάδοσης ισχύει:

$$\upsilon_p = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\omega_n / \omega\right)^2}}$$

$$\upsilon_g = \frac{1}{dk_1 / d\omega} = c\sqrt{1-\left(\omega_n / \omega\right)^2}$$

Και άρα $\upsilon_p \upsilon_g = c^2$.

Β) Πυκνότητα ενέργειας

$$U = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right] =$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{k_2^2}{k_1^2} E_0^2 \sin^2 k_2 y \sin^2(\omega t - k_1 x) + E_0^2 \cos^2 k_2 y \cos^2(\omega t - k_1 x)\right] + \frac{\omega^2}{2\mu_0 c^4 k_1^2} E_0^2 \cos^2 k_2 y \cos^2(\omega t - k_1 x)$$

Μέση χρονική πυκνότητα ενέργειας

$$< U > = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + 2\cos^2(k_2 y)\right]$$

Και μετά από ολοκλήρωση στον άξονα y:

$$< U >_y = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 a \left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + 1\right] \quad (\alpha)$$

Για το διάνυσμα Poynting υπολογίζουμε μόνο την συνεισφορά των συνιστωσών E_y, B_z γιατί οι άλλες δύο E_x, B_z δίνουν μηδενική μέση χρονική τιμή. Έχουμε

$$S_x = \frac{1}{\mu_0} E_y B_z = \frac{\omega^2}{\mu_0 c^2 k_1} E_0^2 \cos^2 k_2 y \cos^2(\omega t - k_1 x)\,,$$

$$< S_x > = \frac{\varepsilon_0 \omega}{2k_1} E_0^2 \cos^2 k_2 y$$

Ενώ μετά από ολοκλήρωση στην κατεύθυνση y έχουμε

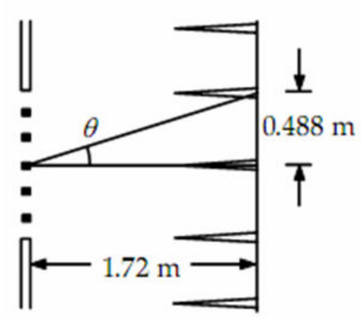
$$< S_x >_y = \frac{\varepsilon_0 \omega}{4k_1} E_0^2 a \quad (\beta)$$

Γ) Από τις σχέσεις (α) και (β) έχουμε

$$\frac{< S_x >_y}{< U >_y} = \frac{\omega k_1}{(k_1^2 + k_2^2)} = \frac{c^2}{\omega} k_1 = \frac{c^2}{\omega} \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2} = c\sqrt{1 - (\omega_n / \omega)^2} \equiv \upsilon_g$$

Άρα, η ενέργεια του TE τρόπου ταλάντωσης διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας. Ομοίως για τα κύματα TM.

Άσκηση 9



Τα κυρίως μέγιστα βρίσκονται ως εξής:

$d \sin\theta = m\lambda$, $\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Για m=1 έχουμε $\lambda = d \sin\theta$,

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του κεντρικού (m=0) και του μέγιστου πρώτης τάξης (m=1) όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τιμή της γωνίας θ μπορεί να υπολογιστεί από την απόσταση μεταξύ των μέγιστων και την απόσταση μεταξύ σχισμών και τοίχου. Από το σχήμα έχουμε:

$$\tan\theta = \frac{0.488m}{1.72m} = 0.284 \Rightarrow \theta = 15.8^o \Rightarrow$$

$\sin\theta = 0.273.$

Η απόσταση d είναι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών και ισούται με το αντίστροφο του αριθμού των σχισμών ανά μήκος:

$$d = \frac{1}{5310 cm^{-1}} = 1.88 \cdot 10^{-4} cm = 1.88 \cdot 10^3 nm.$$

Οπότε το μήκος κύματος του λέιζερ είναι :

$$\lambda = d \sin\theta = \left(1.88 \cdot 10^3 nm\right) \cdot 0.273 = 514 nm.$$

Άσκηση 10

Εφόσον 1<1.25<1.34, το φως από ανάκλαση στην πάνω και στην κάτω επιφάνεια του υμενίου υπόκειται σε αντιστροφή φάσης, οπότε η συνολική διαφορά φάσης είναι μηδενική. Η διαφορά δρόμου για κάθετη πρόσπτωση (δες και παράδειγμα 22.3 Alonso-Finn) είναι ίση με 2α, όπου α το πάχος του υμενίου.

Η αντίστοιχη διαφορά φάσης μεταξύ των ανακλώμενων ακτινών από τις δύο επιφάνειες του υμενίου θα είναι:

$$\delta = 2a \frac{2\pi}{\lambda / n} = \frac{4\pi a n}{\lambda}$$

όπου n ο δείκτης διάθλασης του λαδιού. Για να έχουμε μέγιστη ανάκλαση από το υμένιο θα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π:

$$\frac{4\pi a n}{\lambda} = 2\pi m \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Το μέγιστο πρώτης τάξης συμβαίνει για m=1, οπότε

$$\frac{4\pi a n}{\lambda} = 2\pi \cdot 1 \Rightarrow \frac{2an}{\lambda} = 1 \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow$$

$$a = \frac{500nm}{2 \cdot 1.25} = 200nm$$

Η επιφάνεια, Α, στην οποία έχει απλωθεί η κηλίδα ισούται:

$A = \frac{V}{a}$, όπου V ο όγκος του λαδιού.

$$A = \frac{1m^3}{200nm} = \frac{1m^3}{200(10^{-9}m)} = 5 \cdot 10^6 m^2 = 5km^2.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η μεγέθυνση ισούται με

$$M = -\frac{q}{p} = 8 \Rightarrow q = -8p$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 2.29\text{cm}$$

Συνεπώς πρόκειται για κοίλο κάτοπτρο εστιακής απόστασης $f = 2.29\text{cm}$

2) Για να βγει «παγωμένη κίνηση» χρειάζεται μικρός χρόνος εκθέσεως, άρα μεγάλος φωτισμός. Για να βγεί ευκρινές «ευρύ πεδίο» χρειάζεται μικρό διάφραγμα για να επιτρέπει μόνο τις κεντρικές (παραξόνιες) ακτίνες, διότι οι ακτίνες που περνούν μακρυά από το κέντρο του φακού εστιάζουν σε διαφορετική θέση από αυτές που περνούν κοντά στο κέντρο. Αλλά το μικρό διάφραγμα και πάλι απαιτεί μεγάλο φωτισμό.

3) Η μεγέθυνση του αντικειμενικού φακού είναι $M_o = -\frac{L}{f_o}$, του προσοφθάλμιου $M_e = \frac{\delta}{f_e}$, και η συνολική μεγέθυνση $M = M_o M_e = -\frac{L}{f_o}\frac{\delta}{f_e}$, όπου L η απόσταση των δύο φακών, δ = 25 cm είναι η ελάχιστη απόσταση για ευκρινή όραση και f_e, f_o οι ζητούμενες εστιακές αποστάσεις. Από τα δεδομένα βρίσκουμε $f_o = \frac{L}{M_o} = \frac{23}{50}\text{cm} = 0.46\,\text{cm}$ και $\frac{M}{M_o} = \frac{\delta}{f_e} \Rightarrow f_e = \delta\frac{M_o}{M} = 25\frac{50}{550}\text{cm} = 2.27\text{cm}$.

4) Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τυχόν σημείο της ελλείψεως με τις εστίες της έχουν σταθερό άθροισμα. Άρα όλοι οι δρόμοι που συνδέουν τις δύο εστίες, κατόπιν ανακλάσεως στον ελλειψοειδή τοίχο, είναι ίσοι. Άρα όσα κύματα ξεκινούν από την μία εστία, στην άλλη εστία συμβάλλουν ενισχυτικά.

5)

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N\,m \Rightarrow m = \frac{\lambda}{N\,\Delta\lambda} = \frac{(656.3 + 656.1)/2\,\text{nm}}{2 \times 820 \times (656.3 - 656.1)\text{nm}} \approx 2$$