10/2/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2008-09

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

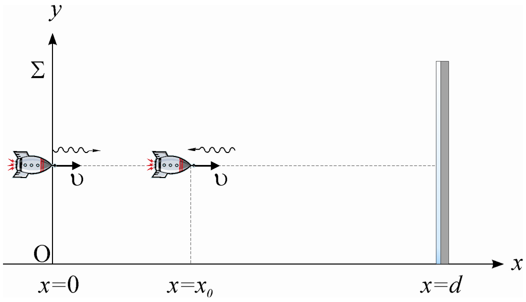
Προθεσμία παράδοσης 10/3/09

Άσκηση 1

(Α) Στο σύστημα αναφοράς Σ (Γη):

Γεγονός 1: $t_1 = 0, x_1 = 0$: εκπομπή φωτονίου

Γεγονός 2: $t_2 = \tau, x_2 = x_0$: συνάντηση φωτονίου-πυραύλου μετά από ανάκλαση του φωτονίου στον καθρέφτη.



Η ζητούμενη ποσότητα είναι ο συνολικός χρόνος ταξιδιού του φωτεινού παλμού, $\Delta t = t_2 - t_1 = \tau$. Η απόσταση που διανύει το φωτόνιο είναι $d + (d - x_0) = c\tau$ (1)

όπου d η απόσταση πυραύλου-καθρέφτη κατά τη στιγμή της εκπομπής στο Σ. Λόγω της συστολής Lorentz, στο σύστημα αναφοράς του πυραύλου Σ′ η απόσταση αυτή είναι $d' = d/\gamma \Rightarrow d = \gamma d'$ (2)

Η απόσταση που διανύει ο πύραυλος είναι

$x_0 = 0.8c\tau$ (3).

Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε

$$d + (d - 0.8c\tau) = c\tau \Rightarrow 2d = 1.8c\tau \Rightarrow \tau = \frac{d}{0.9c} = \gamma \frac{d'}{0.9c} = \frac{5}{3} \frac{10 \times 10^3}{0.9 \times 3 \times 10^8} s \Rightarrow \tau = 61.7\,\mu\text{s}$$

.

(Β) Στο σύστημα αναφοράς του πυραύλου Σ′:

Γεγονός 1: $t_1' = 0, x_1' = 0$: εκπομπή φωτονίου

Γεγονός 2: $t_2' = \tau', x_2' = 0$: συνάντηση φωτονίου-πυραύλου μετά από ανάκλαση του φωτονίου στον καθρέφτη. Τα δύο γεγονότα είναι ισότοπα στο Σ′, άρα από τη σχέση διαστολής χρόνου έχουμε $\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{\gamma}\Delta t \Rightarrow \tau' = \frac{3}{5}\tau \Rightarrow \tau' = 37.0\,\mu s$.

Άσκηση 2

Α) Έστω ότι στο ΣΑ του αργού διαστημοπλοίου το γρήγορο διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα υ (που είναι και η ζητούμενη σχετική ταχύτητα των δύο διαστημοπλοίων). Επομένως, το μήκος του γρήγορου διαστημοπλοίου συστέλλεται και ισούται με

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Ο χρόνος προσπέρασης θα είναι λοιπόν

$$T=\frac{L'}{\upsilon}=\frac{L}{\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Rightarrow\frac{T}{L}\upsilon=\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Rightarrow$$

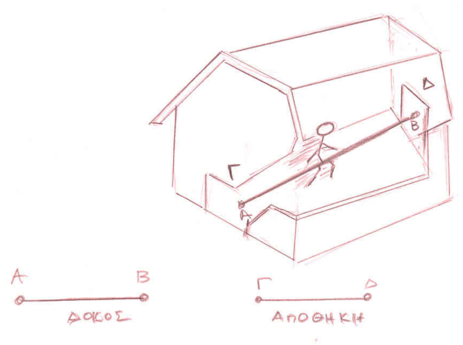
$$\frac{T^2}{L^2}\upsilon^2=1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\Rightarrow\upsilon^2\left(\frac{T^2}{L^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1\Rightarrow\upsilon^2\frac{T^2}{L^2}\left(1+\frac{L^2}{T^2c^2}\right)=1\Rightarrow$$

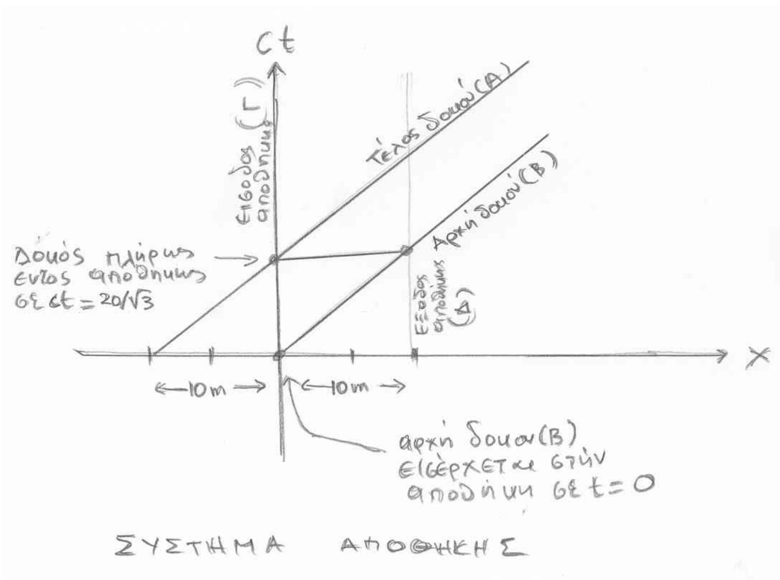
$$\upsilon=\frac{L}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L^2}{T^2c^2}}}=\frac{300}{2.00\times10^{-6}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{300}{2.00\times10^{-6}\times3.00\times10^{8}}\right)^2}}\Rightarrow$$

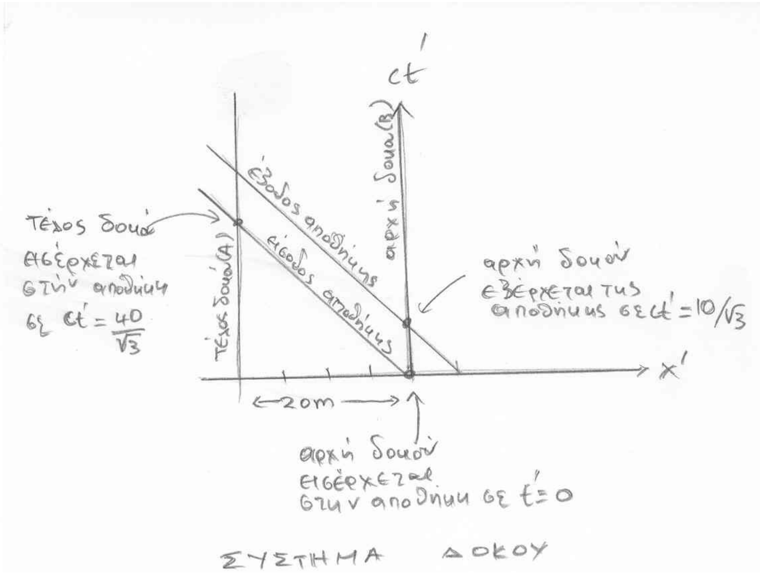
$$\upsilon=1.34\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$$

Β) Το «γρήγορο» διαστημόπλοιο θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο και βλέπει το αργό να κινείται με ταχύτητα $-\upsilon$. Καθώς το μήκος των δύο διαστημοπλοίων είναι ίδιο δεν υπάρχει καμιά διαφορά μεταξύ των δύο παρατηρητών και ο χρόνος είναι επίσης $2.00\mu\mathrm{s}$.

Άσκηση 3







Από την συστολή του μήκους βρίσκουμε $\gamma = 2$ και άρα $\beta \equiv \upsilon / c = \sqrt{3}/2$. Έστω ότι η δοκός ΑΒ προσεγγίζει την αποθήκη ΓΔ από αριστερά (Β το εμπρόσθιο άκρο της ενώ Γ το εμπρόσθιο άκρο της αποθήκης).

Στο σύστημα εργαστηρίου η δοκός έχει μήκος 10 μέτρα (ΑΒ’ = ΓΔ=10m) και θα εισέλθει πλήρως στην αποθήκη όταν το εμπρόσθιο άκρο της Β διανύσει όλο το τμήμα ΓΔ, δηλ. την χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\Gamma\Delta}{\upsilon} = \frac{\Gamma\Delta / c}{\beta} \quad \text{ή} \qquad ct_1 = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} = \frac{10m}{\sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}} m$$

Στο σύστημα του αθλητή η αποθήκη έχει μήκος 5 μέτρα (ΓΔ’=5m). Ο χρόνος που απαιτείται για να εξέλθει το εμπρόσθιο σημείο Β της δοκού από την αποθήκη είναι ο ίδιος που για τον κινούμενο παρατηρητή χρειάζεται το Β να διανύσει το την αποθήκη ΓΔ’, δηλ.

$$ct_2 = \frac{\Gamma\Delta'}{\beta} = \frac{5m}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}} m$$

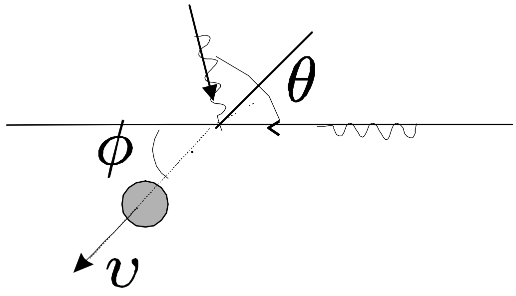
Από την άλλη μεριά ο χρόνος που απαιτείται ώστε το πίσω άκρο της δοκού Α εισέλθει στο εμπρόσθιο σημείο της αποθήκης είναι ίδιος με τον χρόνο που (στο σύστημα του αθλητή) χρειάζεται το μπροστινό σημείο της αποθήκης να διανύσει την δοκό, δηλ.

$$ct_3 = \frac{AB}{\beta} = \frac{20\text{m}}{\sqrt{3}/2} = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{m}$$

Παρατηρούμε ότι $t_3 > t_2$, δηλαδή για τον κινούμενο αθλητή πρώτα εξέρχεται το εμπρόσθιο άκρο της δοκού Β από το πίσω μέρος της αποθήκης Δ και αρκετά αργότερα φθάνει το πίσω μέρος της δοκού Α στο μπροστινό άκρο της αποθήκης Δ.
Ο αθλητής παρατηρεί ότι το μπροστινό μέρος της δοκού Β έχει εξέλθει από την αποθήκη πριν το πίσω άκρο της Α εισέλθει στην αποθήκη. Κατά συνέπεια ποτέ δεν βλέπει όλη την δοκό μέσα στην αποθήκη.

Άσκηση 4

Α) Έστω ότι το σώμα που προκύπτει κινείται (στο ΣΑ του εργαστηρίου) με ταχύτητα υ της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x όπως στο σχήμα.



Η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής δίνει

$$(\text{Ενέργεια}) \quad : \gamma M c^2 = 2E \qquad (1)$$

$$(\text{ορμή άξονας } x) \ : \gamma M \upsilon \cos\phi = \frac{E}{c} + \frac{E}{c}\cos\theta \quad (2)$$

$$(\text{ορμή άξονας } y) : \ \gamma M \upsilon \sin\phi = \frac{E}{c}\sin\theta \qquad (3)$$

Από την (1) βρίσκουμε

$$\gamma = \frac{2E}{Mc^2}$$

Υψώνοντας τις δύο (2), (3) στο τετράγωνο και αθροίζοντας παίρνουμε

$$\gamma^2 M^2 \upsilon^2 \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = \frac{E^2}{c^2}\left(1+\cos\theta\right)^2 + \frac{E^2}{c^2}\sin^2\theta \rightarrow \gamma^2 M^2 \upsilon^2 c^2 = 2E^2\left(1+\cos\theta\right) \rightarrow$$

$$\frac{4E^2\upsilon^2}{c^2} = 2E^2\left(1+\cos\theta\right) \rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{\left(1+\cos\theta\right)}{2} \rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Και αντικαθιστώντας στην (1)

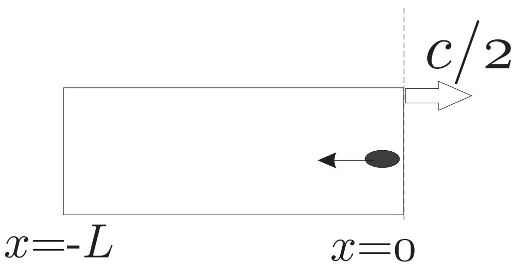
$$\gamma M c^2 = 2E \rightarrow \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} = 2E \rightarrow \frac{Mc^2}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|} = 2E \rightarrow M = \frac{2E}{c^2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

Για την ειδική περίπτωση $\theta = 180^\circ$ παίρνουμε $M = 2E/c^2$ όλη δηλαδή η ενέργεια των φωτονίων γίνεται μάζα ηρεμίας του σώματος ($\upsilon = 0$). Για $\theta = 90^\circ$ έχουμε $M = \sqrt{2}E/c^2, \upsilon = \sqrt{2}c/2$ και τέλος για $\theta = 0^\circ$ παίρνουμε $M = 0$ που σημαίνει ότι είναι αδύνατον να παραχθεί μάζα σε αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 5

Α) Στο ΣΑ του τραίνου η μπάλα διανύει διάστημα $d = L$ σε χρόνο

$$T = \frac{L}{c/3} = \frac{3L}{c}$$



Σύμφωνα με το σχήμα τα δύο γεγονότα : εκκίνηση της μπάλας και άφιξη της μπάλας στο πίσω άκρο συμβαίνουν στα χωροχρονικά σημεία $\left(t_1 = 0, x_1 = 0\right)$ και $\left(t_2 = \dfrac{3L}{c}, x_2 = -L\right)$ και $\Delta t_T = t_2 - t_1 = \dfrac{3L}{c}$, $\Delta x_T = x_2 - x_1 = -L$

Β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Lorentz βρίσκουμε για το ΣΑ του εδάφους, ως προς το οποίο το τραίνο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = c/2$

$$\begin{pmatrix} c\Delta t_E \\ \Delta x_E \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t_T \\ \Delta x_T \end{pmatrix}$$

όπου $\beta = \dfrac{c/2}{c} = \dfrac{1}{2}$ και $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Συνεπώς

$$c\Delta t_E = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(3L - \frac{L}{2}\right) = \frac{5L}{\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta t_E = \frac{5L}{c\sqrt{3}}$$

$$\Delta x_E = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}3L - L\right) = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Γ) Στο ΣΑ της σφαίρας τραίνο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = c/3$ και $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1/3)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$ Το διάστημα που διανύει η σφαίρα είναι προφανώς $\Delta x_\Sigma = 0$ (παραμένει ακίνητη) και ο αντίστοιχος χρόνος θα δίνεται από

$$\Delta t_\Sigma = \frac{\Delta t_T}{\gamma} = \frac{\sqrt{8}}{3}\frac{3L}{c} = \frac{\sqrt{8}L}{c}$$

Δ) Το αναλλοίωτο διάστημα δίνεται από $s = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε

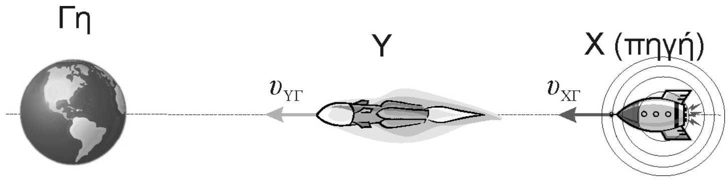
$$s_T = \left(c\Delta t_T\right)^2 - \left(\Delta x_T\right)^2 = 9L^2 - L^2 = 8L^2$$

$$s_E = \left(c\Delta t_E\right)^2 - \left(\Delta x_E\right)^2 = \frac{25L^2}{3} - \frac{L^2}{3} = 8L^2$$

$$s_B = \left(c\Delta t_B\right)^2 - \left(\Delta x_B\right)^2 = 8L^2 - 0 = 8L^2$$

και επιβεβαιώνουμε ότι παραμένει αναλλοίωτο.

Άσκηση 6



Η σχέση που συνδέει τη συχνότητα που μετράει ο παρατηρητής, f ,με τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή, f_0 είναι

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{\upsilon}{c}}{1+\dfrac{\upsilon}{c}}},$$

όπου η ταχύτητα υ της πηγής ως προς τον παρατηρητή λαμβάνεται θετική όταν η απόσταση παρατηρητή-πηγής αυξάνει. Εφαρμόζοντας τη σχέση στην περίπτωσή μας,

$$f_\Gamma = \sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon_{X\Gamma}}{c}}{1+\frac{\upsilon_{X\Gamma}}{c}}}\, f_X \Rightarrow \frac{1+\frac{\upsilon_{X\Gamma}}{c}}{1-\frac{\upsilon_{X\Gamma}}{c}} = \left(\frac{f_X}{f_\Gamma}\right)^2 \Rightarrow \frac{\upsilon_{X\Gamma}}{c} = \frac{f_X^{\,2} - f_\Gamma^{\,2}}{f_\Gamma^{\,2} + f_X^{\,2}} = -0.800 \Rightarrow \upsilon_{X\Gamma} = -0.800c$$

< 0 που σημαίνει ότι το Χ πλησιάζει τη Γη (συμβατό με τα δεδομένα).

Έστω υ_{XY} η ταχύτητα του Χ (πηγής) ως προς τον παρατηρητή Υ. Τότε έχουμε

$$f_Y = \sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon_{XY}}{c}}{1+\frac{\upsilon_{XY}}{c}}}\, f_X \Rightarrow \frac{1+\frac{\upsilon_{XY}}{c}}{1-\frac{\upsilon_{XY}}{c}} = \left(\frac{f_X}{f_Y}\right)^2 \Rightarrow \frac{\upsilon_{XY}}{c} = \frac{f_X^{\,2} - f_Y^{\,2}}{f_Y^{\,2} + f_X^{\,2}} = 0.142 \Rightarrow \upsilon_{XY} = 0.142c \quad >$$

0, δηλαδή το Υ απομακρύνεται από το Χ και επειδή η άσκηση δίνει ότι το Υ βρίσκεται ανάμεσα στη Γη και το Χ (που πλησιάζει τη Γη), συμπεραίνουμε ότι το Υ πλησιάζει τη Γη. Η ταχύτητά του ως προς αυτή δίνεται από το μετασχηματισμό ταχυτήτων:

$$\upsilon_{Y\Gamma} = \frac{\upsilon_{YX} - \upsilon_{\Gamma X}}{1-\frac{\upsilon_{YX}\upsilon_{\Gamma X}}{c^2}} = \frac{-0.142c - 0.800c}{1+0.142\cdot 0.800} = -0.846c\,.$$

Άσκηση 7

Α)

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\upsilon) = m\upsilon\frac{d}{dt}(\gamma) + \gamma m\frac{d}{dt}(\upsilon) = m\upsilon\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \gamma m\frac{d}{dt}(\upsilon) =$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(-2\frac{\upsilon}{c^2}\right)\frac{d}{dt}(\upsilon) + \gamma m\frac{d}{dt}(\upsilon) = m\gamma\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\gamma^2 + 1\right)\frac{d}{dt}(\upsilon) = m\gamma\gamma^2 a \to$$

$$F = m\gamma^3 a \to a = \frac{F}{m\gamma^3} \to a = \frac{F}{m}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Β)

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F}{m}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2} \to \frac{d\upsilon}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{F}{m}dt \to \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\left(1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{F}{m}\int_0^t dt' \to$$

$$\frac{\upsilon}{\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}} = \frac{F}{m}t \to \frac{c^2\upsilon^2}{c^2-\upsilon^2} = \frac{F^2}{m^2}t^2 \to \upsilon^2\left(c^2 + \frac{F^2}{m^2}t^2\right) = \frac{c^2F^2}{m^2}t^2 \to$$

$$\upsilon = \frac{cFt/m}{\sqrt{\left(c^2 + \frac{F^2}{m^2}t^2\right)}} = \frac{cFt}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}$$

Άσκηση 8

A) Το τετράγωνο του τετρανύσματος της ορμής είναι

$p_0^{\mu} p_{0\mu} = n_{\mu\nu} p_0^{\mu} p_0^{\mu} = p_0^0 p_0^0 - \vec{p}_0^{\,2} = m_1^2 c^2$

Θεωρούμε την ταχύτητα του φωτός ίση με την μονάδα, οπότε η μάζα ηρεμίας του πρώτου σωματίου είναι

$m_1 = \sqrt{p_0^0 p_0^0 - \vec{p}_0^{\,2}} = 4MeV$.

Η τετραταχύτητα είναι

$U_0^{\mu} = \frac{p_0^{\mu}}{m_1} = (\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4})$ σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός.

Η κινητική ενέργεια του σωματίου είναι

$E_{kin} = E - m_1 = p_0^0 - m_1 = 5 - 4 = 1MeV$.

B)Το φορτισμένο σωμάτιο 1 βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο, οπότε η δύναμη που του εξασκείται είναι

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} \Rightarrow \vec{p} - \vec{p}_0 = e\vec{E}t \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0 + e\vec{E}t \Rightarrow$$

$$\vec{p} = (1,2,2) + t(0,0,3\cdot 10^8 \cdot \frac{8}{3} 10^4 \cdot 10^{-6}) = (1,2,2 + t\cdot 8\cdot 10^6) MeV/c ,$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με την ταχύτητα του φωτός και διαιρέσαμε με το φορτίο e για να έχουμε μονάδες eV/c, ενώ ο παράγοντας 10^{-6} είναι για την μετατροπή σε MeV/c. Τη χρονική στιγμή $t = 10^{-6} s$ η ορμή του πρώτου σωματιδίου θα είναι $\vec{p} = (1,2,10) MeV/c$, ενώ η ενέργεια του θα είναι

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m_1^2 = 105 + 4^2 \Rightarrow , \quad E = 11MeV$$

Οπότε το διάνυσμα της τετραορμής του θα είναι

$p_1^{\mu} = (11,1,2,10) MeV/c$

Το δεύτερο σωμάτιο θα έχει πριν την κρούση τετραορμή ίση με

$p_2^{\mu} = (2,0,0,0) MeV/c$ εφόσον είναι αρχικά ακίνητο. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής το συσσωμάτωμα θα έχει τετραορμή

$p_3^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu} = (13,1,2,10) MeV/c$

Η μάζα του συσσωματώματος είναι

$m_1 = \sqrt{p_3^0 p_3^0 - \vec{p}_3^{\,2}} = 8MeV$.

Άσκηση 9

A) Η ολική ενέργεια και ορμή τους συστήματος στο ΣΑ του εργαστηρίου δίνονται από

$$E_{o\lambda} = m_A \gamma_A c^2 + m_B \gamma_B c^2$$

$$p_{o\lambda} = m_A \gamma_A m_A + m_B \gamma_B \upsilon_A$$

όπου $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - \upsilon_i^2 / c^2}$

Σύμφωνα με την υπόδειξη η ολική ορμή στο K θα δίνεται από

$$p_{o\lambda}^{(K)} = \gamma_K p_{o\lambda} - \frac{\gamma_K \upsilon_K}{c^2} E_{o\lambda}$$

Από τον ορισμό του ΣΑ του κέντρου μάζας βρίσκουμε

$$p_{o\lambda}^{(K)} = 0 \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{K}} = \frac{p_{o\lambda} c^2}{E_{o\lambda}}$$

B) Αφού το A είναι ακίνητο, $E_{o\lambda} / c^2 = m_A + m_B \gamma_B$, και $p_{o\lambda} = m_B \gamma_B \upsilon_B$.
Άρα

$$\upsilon_{\mathrm{K}} = \frac{p_{o\lambda}}{E_{o\lambda} / c^2} = \frac{m_B \gamma \upsilon}{m_A + m_B \gamma} = \frac{m_B \upsilon}{m_A \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} + m_B}$$

Αλλά αφού το A είναι ακίνητο, η ταχύτητα του A ως προς το K, $\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} = -\upsilon_{\mathrm{K}}{}^{(\mathrm{A})}$ (όπου ο άνω δείκτης στην παρένθεση διαβάζεται «ως πρός»).
Άρα

$$\upsilon_A{}^{(K)} = -\frac{m_B \upsilon}{m_A \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} + m_B}$$

Αν θεωρούσαμε το B ακίνητο και το A κινούμενο με ταχύτητα $-\upsilon$, θα κάναμε τους ίδιους συλλογισμούς με εναλλαγή των A,B.
Άρα

$$\upsilon_B{}^{(K)} = +\frac{m_A \upsilon}{m_B \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} + m_A}$$

B΄ Τρόπος
Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε (μετά από πράξεις), θεωρώντας οτι ως προς το K, (εξ ορισμού του K),

$$p_A{}^{(\mathrm{K})} = -p_B{}^{(\mathrm{K})} \Rightarrow m_A \gamma_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} = -m_B \gamma_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})}$$

και ότι από την σύνθεση ταχυτήτων,

$$\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} + \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}}{1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2}$$

και λύνοντας το σύστημα ως προς $\upsilon_A{}^{(\mathrm{K})}$, $\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})}$.
Πράγματι,

$$-m_A \gamma_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} = m_B \gamma_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{m_B \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})}}{\sqrt{1 - \left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})}\right)^2 / c^2}}$$

Αλλά

$$\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} + \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}}{1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2}$$

άρα στον παρονομαστή

$$1 - \left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} / c\right)^2 = 1 - \left(\frac{\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} / c + \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c}{1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2}\right)^2 = \frac{\left(1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2\right)^2 - \left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} + \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}\right)^2 / c^2}{\left(1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - \left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} / c\right)^2\right)\left(1 - \left(\upsilon_A{}^{(K)} / c\right)^2\right)}{\left(1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2\right)^2} = \frac{\left(1 - \left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} / c\right)^2\right)}{\left(\gamma_A{}^{(K)}\right)^2 \left(1 + \upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})} \upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} / c^2\right)^2}$$

οπότε

$$-m_A\gamma_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{m_B \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}+\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}}{1+\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}/c^2}}{\sqrt{\dfrac{\left(1-\left(\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}/c\right)^2\right)}{\left(\gamma_A{}^{(K)}\right)^2\left(1+\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}/c^2\right)^2}}} = \frac{m_B\gamma_A{}^{(K)}\left(\upsilon+\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}\right)}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \Rightarrow$$

$$m_B\gamma\gamma_A{}^{(K)}\left(\upsilon+\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}\right)+m_A\gamma_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}=0 \Rightarrow m_B\gamma\upsilon+m_B\gamma\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}+m_A\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}=0$$

Άρα

$$\upsilon_A{}^{(K)} = -\frac{m_B\upsilon}{m_A\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}+m_B} = -\frac{m_B\gamma\upsilon}{m_A+m_B\gamma} = -\frac{p_{o\lambda}}{E_{o\lambda}/c^2} = -\upsilon_K{}^{(A)}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην

$$\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}+\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}}{1+\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{A})}\upsilon_{\mathrm{A}}{}^{(\mathrm{K})}/c^2} = \frac{\upsilon-\dfrac{m_B\gamma\upsilon}{m_A+m_B\gamma}}{1-\upsilon\dfrac{m_B\gamma\upsilon}{m_A+m_B\gamma}/c^2} = \frac{m_A\upsilon}{m_A+m_B\gamma(1-\upsilon/c)^2}$$

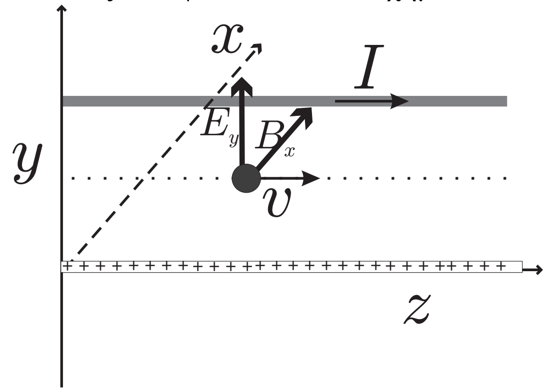
Αρα

$$\upsilon_{\mathrm{B}}{}^{(\mathrm{K})} = \frac{m_A\upsilon}{m_A+m_B\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

Γ) Τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα αλλά μεταφέρουν ορμή και ενέργεια άρα ο ορισμός του «κέντρου μάζας» θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 10

Α)Με βάση του κανόνα της δεξιάς παλάμης οι φορές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι αυτές που φαίνονται στο Σχήμα.



Άρα έχουμε τις συνιστώσες E_y και B_x (οι υπόλοιπες συνιστώσες μηδενίζονται).

Για να μηδενιστεί λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο αρκεί να μηδενιστεί η συνιστώσα $E_y^{'}$

Από τις σχέσεις που δίνονται στο βιβλίο του Περσίδη πρέπει να ισχύει:

$$E_y' = \gamma\left(E_y+\upsilon B_x\right)=0 \Rightarrow E_y+\upsilon B_x=0 \Rightarrow \upsilon=-\frac{E_y}{B_x} \qquad (1)$$

όμως από τα δεδομένα της άσκησης

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{L/2} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o L} \qquad (2)$$

και

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{L/2} \Rightarrow B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \quad (3)$$

Από τις (1)-(2)-(3) έχουμε:

$$\upsilon = -\frac{E_y}{B_x} = -\frac{\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_o L}}{\dfrac{\mu_0 I}{\pi L}} = -\frac{\lambda}{\mu_0\varepsilon_o \mathrm{I}} \Rightarrow \upsilon = -\frac{c^2\lambda}{I} \quad (4)$$

υπό την προϋπόθεση ότι $|\upsilon| < c \Rightarrow \dfrac{c^2\lambda}{I} < c \Rightarrow I > \lambda c$.

Β) Όπως δείξαμε στο Α ερώτημα η μόνη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που υπάρχει είναι η B_x . Άρα η ζητούμενη Β΄ είναι ίση με:

$$B' = B'_x \Rightarrow B' = \gamma\left(B_x + \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right) \overset{(1)}{=} B_x\gamma\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = B_x\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$= B_x\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \overset{(3),(4)}{=} \frac{\mu_0 I}{\pi L}\sqrt{1-\frac{c^2\lambda^2}{I^2}} \quad (5)$$

Γ) Παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται για $1 - \dfrac{\lambda^2 c^2}{\mathrm{I}^2} = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = \pm\lambda c$

γεγονός που οδηγεί από την (4) σε $\upsilon = \pm c$ πράγμα αδύνατο για οποιοδήποτε υλικό σωματίδιο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για $x \ll 1$

$$\begin{aligned}(1-x)^a &= (1-x)^a\Big|_{x=0} + \frac{d}{dx}(1-x)^a\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(1-x)^a\Big|_{x=0} x^2 + \ldots \\ &= (1-x)^a\Big|_{x=0} - a(1-x)^{a-1}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2}a(a-1)(1-x)^{a-2}\Big|_{x=0} x^2 + \ldots , \\ &= 1 - a\,x + \frac{1}{2}a(a-1)x^2 + \ldots\end{aligned}$$

με $x = \upsilon / c$ παίρνουμε

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2 = mc^2\left[\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] = mc^2\left(\frac{\upsilon^2}{2c^2} + \frac{3\upsilon^4}{8c^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{3}{8}m\frac{\upsilon^4}{c^2} + \ldots$$

2) Τα τετρανύσματα είναι τα :

$$X = (ct, \vec{r}),\ V = (\gamma c, \gamma\vec{\upsilon}),\ P = (E/c, \vec{p})$$

και τα αναλλοίωτα σχηματίζονται με τα «εσωτερικά γινόμενα» στον τετραδιάστατο χώρο Minkowski

$$X \bullet X = c^2 t^2 - \vec{r}^{\,2} \quad , X \bullet V = \gamma\left(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{\upsilon}\right), \; X \bullet P = E\,t - \vec{r} \cdot \vec{p}$$

$$V \bullet V = \gamma^2\left(c^2 - \vec{\upsilon}^{\,2}\right) = c^2, \; V \bullet P = \gamma\left(E - \vec{\upsilon} \cdot \vec{p}\right)$$

$$P \bullet P = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2$$

3) Τα δύο γεγονότα βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις στον ίδιο χρόνο. Άρα ούτε ταυτίζονται, ούτε μπορούν να συνδεθούν με φωτεινό σήμα. Άρα το ένα δεν ανήκει ούτε στο παρόν, ούτε στο παρελθόν, ούτε στο μέλλον του άλλου, αλλά στο «αλλαχού».

4) Η «μάζα» του φωτονίου δίνεται από την σχέση $mc^2 = h\nu$. Από την διατήρηση ενέργειας έχουμε

$$h\nu = h\nu' + \frac{h\nu}{c^2} gz$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gz}{c^2}$$

Στην γή $\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{10^4}{9 \times 10^{16}} \approx -10^{-13}$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στον Ήλιο δίνεται από

$$g_H = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.67 \times 10^{11} \times 1.99 \times 10^{30}}{\left(6.96 \times 10^8\right)^2} = 274.\text{m/s}^2$$

Επομένως στον ήλιο $\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{10^{10}}{9 \times 10^{16}} \approx -10^{-12}$

Παρατηρούμε ότι γίνεται μετατόπιση προς το ερυθρό σαν συνάρτηση του ύψους.

5)Τα φωτόνια που εκπέμπονται δεν μπορούν να εξέλθουν από μια μελανή οπή. Από διατήρηση ενέργειας έχουμε

$$h\nu - \frac{GM}{R}\frac{h\nu}{c^2} = 0$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης δίνει την «κινητική» ενέργεια ενός φωτονίου συχνότητας ν ενώ ο δεύτερος την δυναμική του ενέργεια όταν βρίσκεται στην επιφάνεια σώματος με μάζα M και ακτίνα R. Εφόσον δεν μπορεί να εξέλθει το φωτόνιο από το πεδίο του ουρανίου σώματος, πολύ μακριά η συνολική ενέργειά του μηδενίζεται. Άρα

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

Παρατηρούμε ότι η «κλασσική» ακτίνα μελανής οπής (τη λύση αυτή γνώριζε ήδη ο Laplace) είναι μόλις η μισή από την ακτίνα Schwarzschild.