16/3/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2008-09

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 5ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 5/5/09

Άσκηση 1

Στην συχνότητα $f = c/\lambda$ είναι $e\,V = hf - \phi = hc/\lambda - \phi$.

Όταν $f = c/(\lambda + \Delta\lambda)$, ήταν $0 = hc/(\lambda + \Delta\lambda) - \phi \Rightarrow \lambda = hc/\phi - \Delta\lambda$

Άρα $e\,V = \dfrac{\phi}{\dfrac{hc}{\phi\Delta\lambda} - 1}$

Όταν $f = c/(\lambda - \Delta\lambda)$, ήταν $e\,V' = \dfrac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} - \phi = \dfrac{hc}{\dfrac{hc}{\phi} - 2\Delta\lambda} - \phi = \dfrac{\phi}{\dfrac{hc}{2\Delta\lambda\,\phi} - 1}$.

Η συχνότητα κατωφλίου $f_0 = \dfrac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \dfrac{\phi}{h}$

Η μέση κινητική ενέργεια εξόδου των φωτοηλεκτρονίων στο μικρότερο μήκος κύματος $\lambda - \Delta\lambda$ ήταν $\dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = e\,V' \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{2e\,V'}{m}}$

Αντικαθιστούμε τις τιμές. Είναι hc=1240 eV nm

Άρα λ=589 nm, V=0.306 V, f_0= 4.35 10^{14} Hz, V'= 0.737 V, υ=509 km/s.

Άσκηση 2

Α) Στη συνάρτηση $u_P(f,T) = 8\pi h f^3 \Big/ \left\{c^3\left[e^{hf/(kT)} - 1\right]\right\}$, για μικρές συχνότητες το εκθετικό $e^x = 1 + x$, άρα η $u_P(f,T) = 8\pi h f^3 \Big/ \left\{c^3\, h\,f \big/ \left(k\,T\right)\right\} = 8\pi f^2 \big/ c^3\ kT$.

Για μεγάλες συχνότητες, το εκθετικό $e^x \gg 1 \Rightarrow e^x - 1 = e^x$, άρα η $u_P(f,T) = 8\pi h f^3 \Big/ \left\{c^3 e^{hf/(kT)}\right\} = 8\pi h f^3 \big/ c^3\ e^{-hf/(kT)} = Af^3 e^{-Bf/T}$, όπου $A = 8\pi h / c^3$, $B = h/k$

Β) Αν οι τιμές των Α,Β είναι γνωστές πειραματικώς, τότε $h = Ac^3/8\pi$ και $k = h/B = Ac^3/(8\pi B)$.

Αντιστρόφως, με δεδομένα τα h, k,

$A = 8\pi h/c^3 = 8 \times 3.1416 \times 6.626 \times 10^{-34}\mathrm{Js}/(3 \times 10^8 \mathrm{m/s})^3 = 6.2 \times 10^{-58}\mathrm{Js}^4/\mathrm{m}^3$

$B = h/k = 6.626 \times 10^{-34}\mathrm{Js}/(1.38 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}) = 4.8 \times 10^{-11}\mathrm{sK}$

Γ) Αν η κλασσική θεώρηση των Rayleigh – Jeans εξακολουθούσε να ισχύει και για $f \to \infty$ (αντί της συναρτήσεως του Wien), τότε η πυκνότητα ενέργειας μέσα στην κοιλότητα $u_{RJ}(f,T) = 8\pi f^2 kT/c^3 \to \infty$, όπερ αδύνατον. (Πράγματι, αντιθέτως, στην φύση $u_P(f,T) \underset{f\to\infty}{\approx} u_W(f,T) \underset{f\to\infty}{\to} 0$). Άρα η (εύλογη) κλασσική θεώρηση οδηγεί σε λογικό άτοπον που βεβαίως ούτε επαληθεύεται πειραματικώς.

Δ) Η ένταση που βγαίνει από την οπή παρατηρήσεως της κοιλότητος είναι

$$I(T) = \tfrac{1}{4} cu(T) = \frac{c}{4}\int_0^\infty u_P(f,T)df = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty df\, f^3 \Big/ \left[e^{hf/(kT)} - 1\right]$$

Θέτω $x = \dfrac{hf}{kT}$, $f = \dfrac{kT}{h}x$, $f^3 = \left(\dfrac{kT}{h}\right)^3 x^3$, $df = \dfrac{kT}{h}dx$, οπότε

$$I(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(e^x - 1)} = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{k^4}{h^4}T^4 \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4, \text{ όπου}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} = \frac{2\times(3.1416)^5\,(1.38\times10^{-23}\ \text{J/K})^4}{15\times(6.626\times10^{-34}\ \text{J s})^3(3\times10^8\,\text{m/s})^2} = 5.67\times10^{-8} W/\text{m}^2/K^4$$

η σταθερά Stefan-Boltzmann.

Άσκηση 3

Σύμφωνα με τη σχέση (2.34) του βιβλίου των Alonso και Finn η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου δίνεται από

$$K = E - mc^2 = h(f - f') = h\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right) \qquad (1)$$

όπου

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη για ελάχιστο f' δηλαδή μέγιστο λ' το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται $\cos\theta = -1$ για $\theta = \pi$. Τότε η (2) δίνει

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_e c} = \lambda + 2\lambda_C$$

και αντικαθιστώντας στην (1)

$$K = ch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + 2\lambda_C}\right) = ch\frac{2\lambda_C}{\lambda(\lambda + \lambda_C)} \Rightarrow \lambda^2 + \lambda\lambda_C - \frac{2ch\lambda_C}{K} = 0 \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος βρίσουμε $\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c} = 2.426\times10^{-12} m = 0.02426\,\text{Å}$ και $\dfrac{2ch\lambda_C}{K} = 1.003\times10^{-22}\,\text{m}^2 = 0.01003\,\text{Å}^2$

και επιλύοντας την (3) παίρνουμε

$$\lambda = 0.0888\,\text{Å}$$

και την αρνητική ρίζα $\lambda = -0.113\,\text{Å}$ η οποία προφανώς απορρίπτεται. Το μήκος κύματος αυτό $\lambda \approx 0.01\text{nm}$ βρίσκεται στο κάτω όριο του μήκους κύματος των ακτίνων Χ.

Άσκηση 4
Η συχνότητα περιστροφής του φωτονίου δίνεται από

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\upsilon_n}{2\pi r_n} = \frac{\upsilon_n}{2\pi r_n} = \frac{n\hbar/m\, r_n}{2\pi\, r_n} = \frac{n\hbar}{2\pi m \dfrac{n^4\hbar^4}{m^2k^2e^4}} = \frac{m k^2 e^4}{2\pi n^3\hbar^3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (3.24) και (3.28) του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer.
Η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου δίνεται από

$$f = \frac{c}{\lambda} = cR\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = cR\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

Η οποία για $n \gg 1$ δίνει

$$f = cR\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = cR\frac{2}{n^3} = \frac{k\,e^2}{2h\hbar^2/mke^2}\frac{2}{n^3} = \frac{mk^2\,e^4}{2\pi n^3\hbar^3} = \nu$$

Άσκηση 5
Α)Εφόσον η πιθανότητα διέλευσης είναι πολύ μικρότερη της μονάδας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση που περιγράφεται από την εξίσωση 6.9 του βιβλίου. Έχουμε:

$$T(E) = \left(\frac{4k\delta}{1+(k\delta)^2}\right)^2 e^{-2L/\delta}, \qquad (1)$$

όπου

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \qquad (2)$$

και

$$(k\delta)^2 = \frac{E}{U-E}. \qquad (3)$$

Από την (3) έχουμε

$$(k\delta)^2 = \frac{5.5eV}{10.0eV - 5.5eV} = 1.222 \Rightarrow k\delta = 1.106 \qquad (4)$$

Από την (2) έχουμε:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2\cdot 9.11\times10^{-31}\cdot 5.5\cdot 1.602\times10^{-19}}{\left(1.055\times10^{-34}\right)^2} \Rightarrow k = 1.2\times10^{10}\,m^{-1}$$

Αντικαθιστούμε στην (4) την τιμή του k:

$$\delta = \frac{1.106}{1.2\times10^{10}} = 9.22\times10^{-11}\,m.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές του δ και του k στην εξίσωση (1) και έχουμε:

$$e^{2L/\delta} = \left(\frac{4k\delta}{1+(k\delta)^2}\right)^2\frac{1}{T(E)} = \left(\frac{4\cdot 1.106}{1+(1.106)^2}\right)^2\frac{1}{0.001} = 3.96\times10^3 \Rightarrow L = 3.82\times10^{-10}\,m$$

Β)Για πρωτόνιο, υπολογίζουμε το k από την (2) και το δ από την (4):

$$k^2 = \frac{2\cdot 1.673\times10^{-27}\cdot 5.5\cdot 1.602\times10^{-19}}{\left(1.055\times10^{-34}\right)^2} \Rightarrow k = 5.15\times10^{11}\,m^{-1}$$

$$\delta = \frac{1.106}{5.15\times 10^{11} m^{-1}} = 2.15\times 10^{-12} m,$$
και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:
$$T(E) = \left(\frac{4k\delta}{1+(k\delta)^2} \right)^2 e^{-2L/\delta} = 1.87\times 10^{-154},$$
η οποία πιθανότητα είναι πρακτικά μηδενική.

Άσκηση 6

Α)Δίνεται ότι λύση στην περιοχή $-a < x < 0$ είναι της μορφής
$$\psi_1(x) = Cx + D$$
Έστω $\psi_2(x)$ η κυματοσυνάρτηση στην περιοχή $0 < x < +a$. Στην ίδια περιοχή η εξίσωση του Scroedinger παίρνει τη μορφή
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - V_0\psi_2(x) = 0 \Rightarrow \psi_2''(x) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi_2(x) \Rightarrow \psi_2''(x) = -q^2\psi_2(x)$$
όπου $q = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$. Η γενική λύση είναι
$$\psi_2(x) = F\sin(q\,x) + G\cos(q\,x)$$
Στις περιοχές $x > +a$ και $x < -a$ πρέπει να έχουμε $\psi = 0$ λόγω απειρισμού του δυναμικού. Η συνέχεια της κυματοσυνάρτησης στα σημεία $x = -a$ και $x = +a$ απαιτεί
$$\psi_1(-a) = -a\,C + D = 0 \Rightarrow D = a\,C \Rightarrow \psi_1(x) = C(x+a) \quad (1)$$
$$\psi_2(+a) = F\sin(q\,a) + G\cos(q\,a) = 0 \Rightarrow G = -F\tan(q\,a) \quad (2)$$
Ενώ η συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου στο $x = 0$ απαιτεί
$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow C\,a = G \quad (3)$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow C = q\,F \quad (4)$$
Από τις (3),(4) βρίσκουμε $G = C\,a, F = C/q$ και επομένως η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < -a \\ C(x+a) & , \; -a < x < 0 \\ C\left[a\cos(qx) + \frac{1}{q}\sin(qx) \right] & , \; 0 < x < +a \\ 0 & , \; x > +a \end{cases}$$
Όπου η σταθερά C μπορεί να προσδιοριστεί από την κανονικοποίηση.

Β) Από τις (2) και (3), (4) έχουμε
$$G = -F\tan(q\,a) \Rightarrow C\,a = -\frac{C}{q}\tan(qa) \Rightarrow \tan(qa) = -qa$$
Χρησιμοποιώντας τη λύσεις της εξίσωσης $\tan x = -x$ από το τυπολόγιο βρίσκουμε ότι αυτή έχει λύσεις για συγκεκριμένες τιμές του $q\,a$ με ελάχιστη τιμή
$$qa = 2.03 \Rightarrow a\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = 2.03 \Rightarrow V_0 = 2.03^2\frac{\hbar^2}{2ma^2} = 2.08\text{J}=13.0\text{eV}$$

Άσκηση 7

Α) Η κλασικά επιτρεπτή περιοχή της θέσης x προσδιορίζεται από τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\,\omega^2\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\,\omega^2 x^2 = E$$

που οδηγεί σε $-\sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \le x \le \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}}$ όπου η ισότητα αντιστοιχεί σε $\upsilon = 0$.

Στη θεμελιώδη κατάσταση έχουμε $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ και επομένως $-\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}} \le x \le \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$

Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στη βασική κατάσταση είναι η $\psi(x) = \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$. Η πιθανότητα να ευρεθεί το σωματίδιο εκτός της περιοχής αυτή δίνεται από

$$P_c = 1 - \int_{-\sqrt{\hbar/m\omega}}^{+\sqrt{\hbar/m\omega}} dx\;\psi^2(x) = 1 - \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\sqrt{\hbar/m\omega}}^{+\sqrt{\hbar/m\omega}} dx\; e^{-m\omega x^2/\hbar} =$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{-1}^{+1} dz\; e^{-z^2} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{0}^{+1} dz\; e^{-z^2} \approx 15.7\%$$

όπου χρησιμοποιήσαμε αλλαγή μεταβλητής $z = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}x$ και το ολοκλήρωμα της υπόδειξης.

Β) Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της θέσης δίνεται από

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2}$$

όπου

$$\left\langle x \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x\left|\psi_0\right|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx x e^{-m\omega x^2/\hbar} = 0$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2\left|\psi_0\right|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-m\omega x^2/\hbar} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\pi\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3} = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Επομένως

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2} = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Γ) Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας δίνεται από

$$\left\langle V \right\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{4}\hbar\omega$$

Δ) Έχουμε

$$T + V = E \Rightarrow \left\langle T \right\rangle + \left\langle V \right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow \left\langle T \right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{4}\hbar\omega$$

Άσκηση 8

A)Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$$

η κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\psi(x,y)=C\left\{\cos\left[\frac{\pi}{L}(2x-y)\right]-\cos\left[\frac{\pi}{L}(2x+y)\right]\right\}=2C\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

Από την κανονικοποίηση θα έχουμε

$$\int_0^L dx\int_0^L dy\,|\psi|^2=1\Rightarrow 4C^2\int_0^L dx\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\int_0^L dy\,\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)=$$

$$=C^2\left[\int_0^L dx\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)\right]\left[\int_0^L dy\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)\right]=$$

$$=C^2\left[x-\frac{L}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{L}\right]_0^L\left[y-\frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]_0^L=C^2L^2=1\Rightarrow C=\frac{1}{L}$$

B) Σύμφωνα με τη συζήτηση στη σελ 227 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer η ενέργεια δίνεται από

$$E=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]\psi$$

$$=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(2^2+1^2\right)=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα αλλά και τη μορφή της κυματοσυνάρτησης $\psi=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ διαπιστώνουμε ότι αυτή αντιστοιχεί στο ενεργειακό επίπεδο με κβαντικούς αριθμούς $n_x=2, n_y=1$ και άρα είναι διπλά εκφυλισμένη.

Άσκηση 9

A) Η ενέργεια υδρογονοειδούς ατόμου είναι

$$E_n=-\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\}=(-13.6\text{eV})\frac{Z^2}{n^2},\quad n=1,2,3,...$$

Για το λίθιο έχουμε Z =3, οπότε βρίσκουμε $n=3\sqrt{\frac{-13.6}{-13.6}}=3$. Επομένως ο βαθμός εκφυλισμού αυτής της ενεργειακής στάθμης είναι $n^2=9$.

Το μέτρο της τροχιακής στροφορμής είναι

$$L=\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar=\sqrt{\ell(\ell+1)}\cdot 6.582\times 10^{-16}\text{ eV}\cdot\text{s}$$

από την οποία βρίσκουμε $\ell^2+\ell-6=0\Rightarrow\begin{cases}\ell=2\\ \ell=-3\end{cases}$, και επειδή η αρνητική λύση απορρίπτεται, έχουμε τελικά $\ell=2$. Ο κβαντικός αριθμός m_ℓ μπορεί να πάρει τις τιμές $m_\ell=-2,-1,0,1,2$ και εφόσον από τα δεδομένα της άσκησης δεν προσδιορίζεται, η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης του ιόντος είναι:

$$\Psi(r,\vartheta,\varphi)=R_{32}(r)\sum_{m_\ell} c_{m_\ell} Y_2^{m_\ell}(\vartheta,\varphi)=$$

$$=R_{32}(r)\left\{c_{-2}Y_2^{-2}(\vartheta,\varphi)+c_{-1}Y_2^{-1}(\vartheta,\varphi)+c_0Y_2^0(\vartheta,\varphi)+c_1Y_2^1(\vartheta,\varphi)+c_2Y_2^2(\vartheta,\varphi)\right\}$$

όπου c_{m_ℓ} σταθερές με $|c_{-2}|^2+|c_{-1}|^2+|c_0|^2+|c_1|^2+|c_2|^2=1$ (συνθήκη κανονικοποίησης).

B) Η κβαντική ακτίνα της κατάστασης n του μοντέλου Bohr είναι (σχέση 3.35)

$$r_n=(n^2)\frac{a_0}{Z}=(3^2)\frac{a_0}{3}=3a_0$$

με $a_0=0.529\times10^{-10}\,\mathrm{m}$. Η ζητούμενη πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο κάπου μέσα σε σφαίρα ακτίνας $3a_0$ είναι $P_{3a_0}=\int\limits_{r=0}^{3a_0}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}|\Psi(r,\vartheta,\varphi)|^2 r^2\sin\vartheta\cdot dr\cdot d\vartheta\cdot d\varphi=$

$\int\limits_{r=0}^{3a_0}|R_{32}(r)|^2 r^2dr=\int\limits_{r=0}^{3a_0}\left(\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2}\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/3a_0}\right)^2 r^2dr$, η οποία θέτοντας Z=3 γίνεται $P_{3a_0}=\frac{1}{a_0{}^7}\frac{2^3}{3^2\cdot5}\int\limits_{r=0}^{3a_0}r^6e^{-2r/a_0}dr$. Θέτονας $x=2r/a_0\Rightarrow r=a_0x/2$, έχουμε

$$P_{3a_0}=\frac{1}{a_0{}^7}\frac{2^3}{3^2\cdot5}\frac{a_0{}^7}{2^7}\int\limits_0^6 x^6e^{-x}dx=\frac{-1}{2^4\cdot3^2\cdot5}\left(x^6+6x^5+30x^4+120x^3+360x^2+720x+720\right)e^{-x}\Big|_0^6$$

και τελικά $P_{3a_0}=0.394=39.4\%$

Άσκηση 10

A) Για να γραφεί η κυματοσυνάρτηση πρέπει να βρεθούν οι κβαντικοί αριθμοί n, l και m_l της κατάστασης. Η ενέργεια υδρογονοειδούς ατόμου είναι

$$E_n=-\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\}=(-13.6\mathrm{eV})\frac{Z^2}{n^2},\quad n=1,2,3,...$$

Για το ήλιο έχουμε Z =2, οπότε βρίσκουμε $n=2\sqrt{\frac{-13.6}{-6.04}}=3$.

Εφόσον n = 3, οι δυνατές τιμές του l είναι l = 0, 1, 2.

Για l = 0 το μέτρο της στροφορμής είναι 0, ενώ για l = 1 οι δυνατοί προσανατολισμοί της στροφορμής ως προς τον άξονα z είναι θ = 0°, 90°, 180°. Άρα η μόνη λύση που είναι συμβατή με τη γωνία 35.25° είναι η l = 2. Επίσης, από τη σχέση (7.15) έχουμε

$$m_l=\sqrt{l(l+1)}\cos\theta=\sqrt{2(2+1)}\cos35.25^\circ=2$$

Άρα $n=3,\ell=2,m_l=2$ και η κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\Psi_{322}(r,\theta,\phi)=\left(\frac{2}{3a_0}\right)^{3/2}\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{2r}{a_0}\right)^2\exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)Y_2^2(\theta,\phi),$$

όπου $Y_2^2(\theta,\phi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\cdot e^{2i\phi}$ η σφαιρική αρμονική $\ell=2,m_l=2$.

B) Σε αυτή την κατάσταση η μέση απόσταση r του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα είναι

$$\langle r\rangle=\int_0^\infty r|R_{32}|^2 r^2 dr\cdot\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left|Y_2^2(\theta,\phi)\right|^2\sin\theta d\theta d\phi=\int_0^\infty\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\left(\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\right)^2\left(\frac{2r}{a_0}\right)^4\exp\left(-\frac{4r}{3a_0}\right)r^3dr$$

$$\langle r\rangle=\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\left(\frac{4\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\right)^2\int_0^\infty\left(\frac{2r}{a_0}\right)^4\exp\left(-\frac{4r}{3a_0}\right)r^3dr=\frac{2^{10}}{3^9 5a_0{}^7}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{4r}{3a_0}\right)r^7dr$$

Εισάγοντας $z=\dfrac{4r}{3a_0}$ παίρνουμε

$$\langle r\rangle=\frac{2^{10}}{3^9 5a_0{}^7}\frac{3^8a_0^8}{2^{16}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z}z^7dz=\frac{1}{2^6 15}a_0\times 7!=\frac{5040}{2^6 15}a_0=\frac{21}{4}a_0=5.25a_0$$

Η ακτίνα που προβλέπει το μοντέλο του Bohr για $n=3$ είναι σύμφωνα με την σχέση 3.35 του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer $r_3=3^2a_0/2$ οπότε ο λόγος είναι

$$\frac{\langle r\rangle}{r_3}=\frac{21/4}{9/2}=\frac{7}{6}=1.17$$

Γ) Γ) Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας του ιόντος είναι

$$\langle U\rangle=-kZe^2\int_0^\infty\frac{1}{r}|R_{32}|^2r^2dr=-kZe^2\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\left(\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\right)^2\int_0^\infty dr\,r\left(\frac{2r}{a_0}\right)^4\exp\left(-\frac{4r}{3a_0}\right)=$$

$$=-kZe^2\frac{2^{10}}{5\times 3^9}\frac{1}{a_0{}^7}\int_0^\infty dr\,r^5\exp\left(-\frac{4r}{3a_0}\right)=-kZe^2\frac{2^{10}}{5\times 3^9}\frac{1}{a_0{}^7}\frac{3^6a_0{}^6}{4^6}5!=-\frac{2kZe^2}{9a_0}=$$

$$=-13.6\frac{8}{9}\mathrm{eV}=-12.1\mathrm{eV}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)

α) Η κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x)=Ce^{-x}\left(1-e^{-x}\right)$ για $x>0$ και η πιθανότητα να βρουμε το σωμάτιο στην περιοχή (x,dx) είναι $P(x)dx=C^2e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)^2dx$. Ισχύει

$$\int_0^\infty P(x)dx=1$$

Εύκολα βρισκουμε από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $C=\sqrt{12}$ και άρα $P(x)=12e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)^2$.

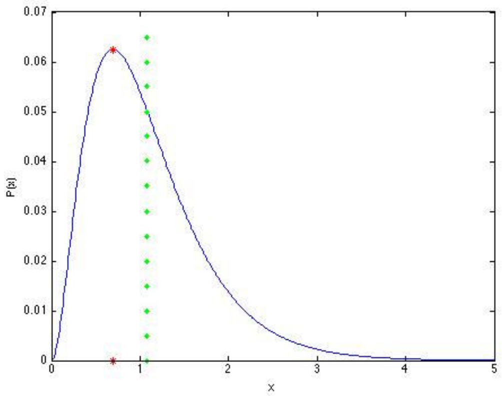
(β) Η πιό πιθανή τιμή της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται από την λύση της εξίσωσης $\dfrac{dP(x)}{dx}=0$, η οποία έχει λύση $x_m=\ln 2\cong 0.6931$ με αντίστοιχη πιθανότητα $P(x_m)\cong 0.0625$. Τα σημεία $(x_m,0)$ και $(x_m,P(x_m))$ δηλώνονται με αστερίσκο στο σχήμα στο οποίο παρουσιάζεται η μορφή της πιθανότητας P(x).

(γ) Η μέση τιμή της θέσης του ηλεκτρονίου βρίσκεται από

$$<x>=\int_0^\infty xP(x)dx=\frac{13}{12}\cong 1.0833$$

Η τιμή αυτή συμπίπτει με την διακεκομένη γραμμή στο σχήμα που είναι παράλληλη στον άξονα y.

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες x_m και $< x >$ δεν συμπίπτουν. Αυτό είναι σύνηθες σε μή συμμετρικές κατανομές πιθανότητας. Στην κβαντομηχανική, σε μέτρηση της θέσης του σωματίου θα παρατηρήσουμε την αναμενόμενη τιμή του x, δηλ. to $< x >$.



2)

Εάν τα ηλεκτρόνια κινούνται στη διεύθυνση x η ορμή τους p_x είναι πλήρως καθορισμένη ($\Delta p_x = 0$), ενώ η αβεβαιότητα της ορμής τους κατά τη διεύθυνση y μετά τη διέλευσή τους από τη σχισμή δίνεται από την αρχή της αβεβαιότητας $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar \Rightarrow \Delta p_y \geq \dfrac{\hbar}{\Delta y}$.

Σαν μια τυπική γωνία περίθλασης μπορούμε να πάρουμε τον λόγω της κατακόρυφης ορμής προς την αρχική οριζόντια, $\vartheta \cong \dfrac{\Delta p_y}{p_x} \cong \dfrac{1}{\Delta y}\dfrac{\hbar}{p_x} \cong \dfrac{1}{\Delta y}\dfrac{\lambda}{2\pi}$, όπου λ το μήκος κύματος De Broglie των ηλεκτρονίων. Για ηλεκτρόνια ενέργειας $E = 10\,\text{eV}$ έχουμε $\lambda = \dfrac{h}{p_x} = \dfrac{h}{\sqrt{2mE}}$ και θεωρώντας ότι $\Delta y \cong \alpha / 2$ βρίσκουμε τελικά

$$\vartheta \cong \frac{2}{\alpha}\frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{2}{5\times 10^{-6}}\frac{1.054\times 10^{-34}}{\sqrt{2\times 9.11\times 10^{-31}\times 10\times 1.6\times 10^{-19}}}\,\text{rad} = 2.5\times 10^{-5}\,\text{rad}\,.$$

3)

Αν V=0 για 0<x<L και V=∞ εκτός του κουτιού, τότε η διαφορική εξίσωση Schrödinger με E=0 γίνεται $\psi'' = 0$ και πράγματι έχει λύση την $\psi = ax + b$.
Αλλά επειδή η ψ πρέπει στα άκρα, λόγω συνεχείας, να μηδενίζεται, άρα a=b=0, οπότε ψ=0 παντού. Όμως, αυτή δεν μπορεί να περιγράφει πυκνότητα πιθανότητος ευρέσεως υλικού σωματίου, διότι αυτό κάπου θα βρίσκεται μέσα στο κουτί, και θα πρέπει $\int_0^L \psi dx = 1$, όπερ άτοπον.

Σημ. Το $E \to 0$ και όταν το $L \to \infty$. Τότε μπορεί να περιγράφει σωμάτιο, διότι η αποδεκτή λύση $A\sin(\pi x / L) \xrightarrow[L\to\infty]{} ax + 0$ (με $a = A\pi x / L$).

4)
Στον μικρόκοσμο δεν υπάρχουν ακίνητα σωμάτια λόγω της αρχής απροσδιοριστίας του Heisenberg σύμφωνα με την οποία ένα ακίνητο σωμάτιο έχει μηδενική απροσδιοριστία στην ορμή και άρα άπειρη απροσδιοριστία στην ορμή και συνεπώς θα είναι πλήρως απεντοπισμένο. Ένα σωμάτιο που βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση είναι υποχρεωμένο να βρίσκεται σε μιά πεπερασμένη περιοχή του χώρου και συνεπώς έχει απροσδιοριστία στην ορμή του. Οταν το κινούμενο σωμάτιο βρισκεται σε στάσιμη κατάσταση η τιμή της ενέργειάς του είναι συγκεκριμένη και παραμένει σταθερή σαν συνάρτηση του χρόνου. Πειράματα σε σωμάτια που βρίσκονται στην ίδια στάσιμη κατάσταση δίνουν σαν αποτέλεσμα πάντα την ίδια τιμή ενέργειας. Επίσης η πυκνότητα πιθανότητας ($|\psi(x)|^2$) είναι ανεξάρτητη του χρόνου είναι δηλαδή στάσιμη.

5)
Τα σωμάτια α στην περίπτωση όπου έχουμε υδρογόνο θα σκεδάζονται από τους πυρήνες υδρογόνου, δηλαδή τα πρωτόνια. Από το παράδειγμα 3.4 του βιβλίου έχουμε ότι όταν ένα σωμάτιο α προσπίπτει κεντρικά πάνω σε αρχικά ακίνητο πρωτόνιο με ταχύτητα u_a, μετά την ελαστική κρούση η ταχύτητα του σωματίου α θα γίνει $u_a' = \frac{m_a - m_p}{m_a + m_p} u_a$. Οπότε, εφόσον η μάζα του σωματίου α είναι μεγαλύτερη από την μάζα του πρωτονίου δεν θα παρατηρήσουμε σκέδαση σε μεγάλες γωνίες (οπισθοσκέδαση).