5/5/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2008-09

Ενδεικτικές λύσεις 6ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 2/6/09

Άσκηση 1

(i) Αποδεκτή, έχει 7 ηλεκτρόνια και αφού είναι ουδέτερο Z=7 άρα πρόκειται για διεγερμένο άτομο N (άζωτο) με $2p \to 3s$

(ii) Απαράδεκτη η στοιβάδα s δεν μπορεί να φιλοξενήσει περισσότερα από δύο ηλεκτρόνια

(iii) Αποδεκτή, έχει 18 ηλεκτρόνια άρα Z=18 και πρόκειται για διεγερμένο άτομο Ar (Αργό) με ένα ηλεκτρόνιο $3p \to 4s$ και δύο ηλεκτρόνια της στοιβάδας $3p \to 4p$.

(iv) Αποδεκτή έχει 15 ηλεκτρόνια άρα Z=15 και πρόκειται για το στοιχείο P (Φωσφόρος) στη θεμελιώδη του κατάσταση. Η διάταξη των σπιν των ηλεκτρονίων σύμφωνα με τον κανόνα του Hund δίνεται από

$$\underbrace{\boxed{\downarrow\uparrow}}_{n=1,\ s}\quad \underbrace{\boxed{\downarrow\uparrow}}_{n=2,\ s}\ \underbrace{\boxed{\downarrow\uparrow}\boxed{\downarrow\uparrow}\boxed{\downarrow\uparrow}}_{n=2,\ p}\quad \underbrace{\boxed{\downarrow\uparrow}}_{n=3,\ s}\ \underbrace{\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}}_{n=3,\ p}$$

Άσκηση 2

Η ψ είναι μή μηδενική όταν $s_1 = \uparrow,\ s_2 = \downarrow$ αλλά όχι όταν $s_2 = \uparrow,\ s_1 = \downarrow$. Πράγματι, με αντιμετάθεση των σωματίων $x_1, s_1 \leftrightarrow x_2, s_2$ (ή των «τροχιακών» $\phi_0\alpha \leftrightarrow \phi_0\beta$) η ψ μηδενίζεται. Άρα η ψ περιγράφει διακριτά σωμάτια.

Ενώ η Ψ είναι μή μηδενική όταν $s_1 = \uparrow,\ s_2 = \downarrow$ ή $s_2 = \uparrow,\ s_1 = \downarrow$. Με αντιμετάθεση των σωματίων, ή των τροχιακών, η Ψ αλλάζει πρόσημο, όπως απαιτείται για φερμιόνια, και είναι αδύνατον να διακρίνουμε ποιό σωμάτιο έχει $s = \uparrow$ και ποιό $s = \downarrow$. Επί πλέον, αν τα δύο σωμάτια ευρίσκοντο στο ίδιο τροχιακό ($\phi_0\alpha = \phi_0\beta$), η ορίζουσα θα εμηδενίζετο. Άρα η Ψ ικανοποιεί την αρχή του Pauli.

Η εξίσωση του Schroedinger για το ιδεατό σύστημα των δύο σωματίων είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\begin{vmatrix}\alpha(s_1) & \alpha(s_2)\\ \beta(s_1) & \beta(s_2)\end{vmatrix} = \left(E-V\right)\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\begin{vmatrix}\alpha(s_1) & \alpha(s_2)\\ \beta(s_1) & \beta(s_2)\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\phi_0(x_1)}{\partial x_1^2}\phi_0(x_2)+\frac{\partial^2\phi_0(x_2)}{\partial x_2^2}\phi_0(x_1)\right) = \left(E-V\right)\phi_0(x_1)\phi_0(x_2) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi_0(x_1)}{\phi_0(x_1)\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi_0(x_2)}{\phi_0(x_2)\partial x_2^2}\right) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V-E\right)$$

Εκτός του πηγαδιού είναι (δίδεται) $V = \infty,\ \phi_0 = 0$. Εντός του πηγαδιού είναι

$$V = 0,\ \phi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\phi_0(x) \Rightarrow \frac{\partial^2\phi_0}{\phi_0(x)\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Άρα για τα δύο σωμάτια

$$\left(\frac{\partial^2\phi_0(x_1)}{\phi_0(x_1)\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2\phi_0(x_2)}{\phi_0(x_2)\partial x_2^{\,2}}\right)=\frac{2m}{\hbar^2}\left(V-E\right)\Rightarrow\left(-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}E\Rightarrow$$

$$E=2\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2=2E_0\,.$$

όπου E_0 η ενέργεια του ενός σωματίου, όπως βλέπουμε απο την εξίσωση του Schroedinger για το ένα σωμάτιο

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\phi_0(x)\partial x^2}=-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2=\frac{2m}{\hbar^2}\left(V-E_0\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}E_0\Rightarrow E_0=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Για την κανονικοποίηση της Ψ πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλες τις τιμές του x δηλαδή από $x=-\infty$ έως $x=+\infty$ και σε όλες τις τιμές του s δηλαδή $s=\uparrow$ και $s=\downarrow$.

$$\sum_{s_1=\uparrow}^{\downarrow}\sum_{s_2=\uparrow}^{\downarrow}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\Psi^*\Psi=\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\phi_0^{\,2}(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\phi_0^{\,2}(x_2)\sum_{s_1=\uparrow}^{\downarrow}\sum_{s_2=\uparrow}^{\downarrow}\begin{vmatrix}\alpha(s_1)&\alpha(s_2)\\\beta(s_1)&\beta(s_2)\end{vmatrix}^2$$

Αλλά

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\phi_0^{\,2}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\phi_0^{\,2}(x_2)=1$$

(η ϕ_0 δόθηκε κανονικοποιημένη) και

$$\sum_{s_1=\uparrow}^{\downarrow}\sum_{s_2=\uparrow}^{\downarrow}\begin{vmatrix}\alpha(s_1)&\alpha(s_2)\\\beta(s_1)&\beta(s_2)\end{vmatrix}^2=\sum_{s_1=\uparrow}^{\downarrow}\left(\begin{vmatrix}\alpha(s_1)&\alpha(\uparrow)\\\beta(s_1)&\beta(\uparrow)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha(s_1)&\alpha(\downarrow)\\\beta(s_1)&\beta(\downarrow)\end{vmatrix}^2\right)=$$

$$\begin{vmatrix}\alpha(\uparrow)&\alpha(\uparrow)\\\beta(\uparrow)&\beta(\uparrow)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha(\uparrow)&\alpha(\downarrow)\\\beta(\uparrow)&\beta(\downarrow)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha(\downarrow)&\alpha(\uparrow)\\\beta(\downarrow)&\beta(\uparrow)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha(\downarrow)&\alpha(\downarrow)\\\beta(\downarrow)&\beta(\downarrow)\end{vmatrix}^2=$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}^2=2$$

Αν A η σταθερά κανονικοποιήσεως, τότε πρέπει A^2 1 1 2 =1 $\Rightarrow A=1/\sqrt{2}$

Αρα

$$\Psi(x_1,s_1;x_2,s_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\begin{vmatrix}\alpha(s_1)&\alpha(s_2)\\\beta(s_1)&\beta(s_2)\end{vmatrix}\quad\left[\equiv\text{"}\phi_0^{\,2}\left(\frac{\alpha\beta-\beta\alpha}{\sqrt{2}}\right)\text{"}\right].$$

Στην εναλλαγή των σωματίων (ή των τροχιακών) το χωρικό μέρος είναι συμμετρικό και η συνάρτηση του spin αντισυμμετρική, καθιστώντας την Ψ αντισυμμετρική.

Σημ. Στο πείραμα Stern-Gerlach, η Ψ, που προφανώς έχει ολικό spin S=0, θα έδινε μία μόνο δέσμη και λέγεται μοναδική (singlet). Ενώ αν τα σωμάτια ευρίσκοντο σε διαφορετικά τροχιακά, π.χ. $\phi_0(x_1)$, $\phi_1(x_2)$ με παράλληλα spin $\alpha(s_1),\alpha(s_2)$ ή $\beta(s_1),\beta(s_2)$, τότε επειδή η συνάρτηση του spin είναι συμμετρική, θα έπρεπε η χωρική συνάρτηση να είναι αντισυμμετρική $\left(\phi_0(x_1)\phi_1(x_2)-\phi_0(x_2)\phi_1(x_1)\right)/\sqrt{2}$, και θα υπήρχαν τρείς δέσμες, μία με $\alpha\alpha$ και ολικό $S_z=1$, μία με $\beta\beta$ και ολικό $S_z=-1$, και μία με $\dfrac{\alpha\beta+\beta\alpha}{\sqrt{2}}$ [ορθογώνια προς την μοναδική (singlet) Ψ] και ολικό $S_z=0$. Τότε λέγεται οτι η κατάσταση των σωματίων με ολικό spin S=1 είναι τριαδική (triplet).

Άσκηση 3

Α) Στην κατάσταση 5g έχουμε $n=5$, $\ell=4$ και $m_\ell=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$, δηλαδή αυτή η ενεργειακή κατάσταση εξαιτίας της αλληλεπίδρασης της τροχιακής μαγνητικής διπολικής ροπής με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο διασπάται σε 9 καταστάσεις.

Όταν $n=4$ τότε το ℓ μπορεί να είναι $0,1,2,3$ και αντίστοιχα το m_ℓ να είναι 0 (4 φορές) ±1 (3 φορές), ±2 (2 φορές) ή ±3 .

Επιτρεπτές μεταβάσεις είναι αυτές οι οποίες σέβονται τους κανόνες επιλογής $\Delta\ell=\pm1, \Delta m_\ell=0,\pm1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι για να έχομε μετάβαση από την κατάσταση 5g στην κατάσταση με $n=4$ πρέπει υποχρεωτικά $\ell=3$. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι επιτρεπτές μεταβάσεις θα είναι:

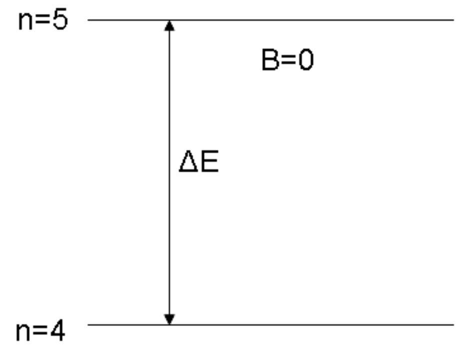
Από $n=5,\ell=4$	Σε $n=4,\ell=3$
$m_\ell=-4$	$m_\ell=-3$
$m_\ell=-3$	$m_\ell=-3,-2$
$m_\ell=-2$	$m_\ell=-3,-2,-1$
$m_\ell=-1$	$m_\ell=-2,-1,0$
$m_\ell=0$	$m_\ell=-1,0,1$
$m_\ell=1$	$m_\ell=0,1,2$
$m_\ell=2$	$m_\ell=1,2,3$
$m_\ell=3$	$m_\ell=2,3$
$m_\ell=4$	$m_\ell=3$

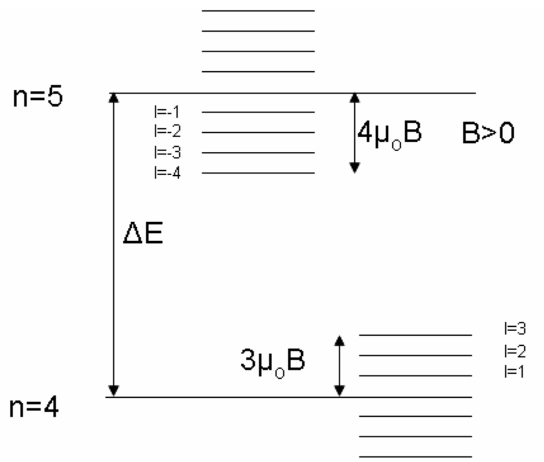
Δηλαδή υπάρχουν συνολικά 21 δυνατές μεταβάσεις. Κάθε μετάβαση θα συνοδεύεται από εκπομπή φωτονίου με (κυκλική) συχνότητα $\dfrac{E_5-E_4}{\hbar}+\omega_L\left(m_\ell-m_\ell'\right)=\omega_0+\omega_L\Delta m_\ell$ και (καθώς $\Delta m_\ell=0,\pm1$) θα έχουμε 3 φασματικές γραμμές.

Β) Η διαφορά (κυκλικών) συχνοτήτων διαδοχικών φασματικών γραμμών είναι $\omega_L=\dfrac{\mu_B B}{\hbar}$, όπου ω_L η συχνότητα Larmor. Οι δύο ακραίες φασματικές γραμμές θα απέχουν μεταξύ τους κατά $2\omega_L$

Γ) Αν μηδενιστεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο τότε η μόνη φασματική γραμμή θα είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μετάβαση $(n=5,\ell=4)\rightarrow(n=4,\ell=3)$

Δ)





Όπως φαίνεται από το σχήμα θα πρέπει:

$$\Delta\mathrm{E} \geq 4\mu_B B + 3\mu_B B \Rightarrow \Delta\mathrm{E} \geq 7\mu_B B \Rightarrow B \leq \frac{E_5 - E_4}{7\mu_B} \Rightarrow$$

$$B \leq \frac{13.6\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}\right)eV}{7 \times 5.78 \times 10^{-5}\,\frac{eV}{T}} \Rightarrow B \leq 756.3T$$

Άσκηση 4

A) Οι γραμμές απορρόφησης του φάσματος περιστροφής αντιστοιχούν σε μεταβάσεις μεταξύ δύο διαδοχικών καταστάσεων με κβαντικούς αριθμούς $\ell - 1$ → ℓ, ℓ → $\ell + 1$, $\ell + 1$ → $\ell + 2$, κ.ο.κ., και εμφανίζονται σε ενέργειες $E_1 = E_\ell - E_{\ell-1} = \frac{\hbar^2}{I_{CM}}\ell$, $E_2 = E_{\ell+1} - E_\ell = \frac{\hbar^2}{I_{CM}}(\ell+1)$, $E_3 = E_{\ell+2} - E_{\ell+1} = \frac{\hbar^2}{I_{CM}}(\ell+2)$, ... αντίστοιχα. Δύο διαδοχικές κορυφές έχουν απόσταση $\Delta E = \frac{\hbar^2}{I_{CM}}$ (σε μονάδες ενέργειας), δηλαδή $\Delta(1/\lambda) = \frac{1}{hc}\frac{\hbar^2}{I_{CM}}$ (σε μονάδες κυματάριθμου). Από τα δεδομένα του φάσματος βλέπουμε ότι η απόσταση $\Delta(1/\lambda)$ δύο διαδοχικών κορυφών είναι

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
20.81	20.60	20.64	20.52	20.34	20.37	20.26

με μέσο όρο $\Delta(1/\lambda) = 20.50\,\mathrm{cm}^{-1}$, οπότε

$$I_{CM} = \frac{1}{4\pi^2 c}\frac{h}{\Delta(1/\lambda)} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 2.998 \times 10^8}\frac{6.626 \times 10^{-34}}{20.50 \times 10^2}\mathrm{Kg \cdot m^2} = 2.73 \times 10^{-47}\mathrm{Kg \cdot m^2}$$

Για το μόριο του $^{1}H^{35}Cl$ η ανηγμένη μάζα είναι $\mu = \frac{(1u)(35u)}{(1+35)u} = 0.9722u$ με $u = 1.66\times10^{-27}\,\mathrm{Kg}$. Η ροπή αδράνειας του μορίου ως προς το κέντρο μάζας είναι $I_{CM} = \mu R_0^{\,2}$, όπου R_0 η ζητούμενη απόσταση των δύο ατόμων (μήκος δεσμού).

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_{CM}}{\mu}} = \sqrt{\frac{2.73\times10^{-47}}{0.9722\cdot1.66\times10^{-27}}}\mathrm{m} \Rightarrow R_0 = 130\,\mathrm{pm}.$$

Β) Η πρώτη κορυφή αντιστοιχεί στη μετάβαση $\ell-1 \rightarrow \ell$, και εμφανίζεται στη θέση $1/\lambda_1 = \frac{1}{4\pi^2 c}\frac{h^2}{I_{CM}}\ell = 83.32\,\mathrm{cm}^{-1} \Rightarrow \ell = \frac{83.32\,\mathrm{cm}^{-1}}{\frac{1}{4\pi^2 c}\frac{h^2}{I_{CM}}} = \frac{83.32\,\mathrm{cm}^{-1}}{20.50\,\mathrm{cm}^{-1}} \approx 4$, άρα βρίσκουμε

	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	8→9	9→10	10→11
$1/\lambda(\mathrm{cm}^{-1})$	83.32	104.13	124.73	145.37	165.89	186.23	206.60	226.86

Γ) Για το μόριο του $^{2}H^{35}Cl$ η ανηγμένη μάζα είναι $\mu' = \frac{(2u)(35u)}{(2+35)u} = 1.8919u$.

Χρησιμοποιώντας το ίδιο μήκος δεσμού $R_0 = 130\,\mathrm{pm}$, υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας $I_{CM}' = \mu' R_0^{\,2} = 5.31\times10^{-47}\,\mathrm{Kg\cdot m}$ και την απόσταση των κορυφών $\Delta(1/\lambda) = \frac{1}{hc}\frac{\hbar^2}{I_{CM}'} = 10.54\,\mathrm{cm}^{-1}$. Άρα οι θέσεις των αντίστοιχων κορυφών είναι

	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	8→9	9→10	10→11
$1/\lambda(\mathrm{cm}^{-1})$	42.16	52.70	63.24	73.78	84.32	94.86	105.4	115.94

Άσκηση 5

Σύμφωνα με τους κανόνες επιλογής για την περιστροφική μετάπτωση έχουμε $\Delta\ell = \pm1$ και επομένως το μόριο μεταπίπτει από την κατάσταση $\ell = 2$ στην $\ell = 1$. Η διαφορά ενέργειας είναι

$$\Delta E_{21} = \frac{\hbar^2}{2I}\left[2(2+1) - 1(1+1)\right] = \frac{2\hbar^2}{I}$$

όπου $I = \mu r_0^2$ όπου μ η ανηγμένη μάζα. Συνεπώς

$$\Delta E_{21} = \frac{2\hbar^2}{\mu r_0^2} \rightarrow$$

$$\mu = \frac{2\hbar^2}{\Delta E_{21} r_0^2} = \frac{2\left(1.055\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\right)^2}{\left(8.841\times10^{-4}\,\mathrm{eV}\times1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J/eV}\right)\left(0.8860\times10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2.0014\times10^{-28}\,\mathrm{Kg}$$

Όσον αφορά στην ταλαντωτική αποδιέγερση και πάλι οι κανόνες επιλογής επιβάλουν $\Delta n = \pm1$, επομένως έχουμε μετάπτωση $n \rightarrow n-1$ και η διαφορά ενέργειας είναι

$$\Delta E_{n,n-1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{K}{\mu}} \rightarrow$$

$$K = \mu\left(\frac{\Delta E_{n,n-1}}{\hbar}\right)^2 = 2.0014\times10^{-28}\,\mathrm{Kg}\left[\frac{0.2560\mathrm{eV}}{\left(1.055\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\right)\left(6.583\times10^{-16}\,\mathrm{eV\cdot s}\right)}\right]^2 \rightarrow$$

$$K = 30.27\mathrm{N/m}$$

Άσκηση 6

Α)Το εύρος στη κρίσιμη πυκνότητα πληθυσμού υπολογίζεται από την σχέση (10.17) του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer ως εξής:

$$\frac{\Delta N_c}{V} \approx \frac{4\pi^2 f^2 \Delta f}{u^3}\left(\frac{t_s}{t_p}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta f \approx \frac{\frac{\Delta N_c}{V}u^3 t_p}{4\pi^2 f^2 t_s} = \frac{\frac{\Delta N_c}{V}u^3\lambda^2 t_p}{4\pi^2 c^2 t_s} \qquad (1)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του φωτός στο μέσο, t_s ο χρόνος ζωής της ανώτερης στάθμης και t_p η σταθερά χρόνου απωλειών φωτονίων. Όπως και στο παράδειγμα 10.2 του βιβλίου η σταθερά χρόνου t_p υπολογίζεται ως εξής:

$$t_p = \frac{L}{a\cdot u},$$

Εφόσον οι απώλειες οφείλονται μόνο στο κάτοπτρο, α=0.02 ο συντελεστής διαπερατότητας του κατόπτρου. Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$\Delta f \approx \frac{\frac{\Delta N_c}{V}u^3\lambda^2 t_p}{4\pi^2 c^2 t_s} = \frac{\frac{\Delta N_c}{V}u^2\lambda^2 L}{4\pi^2 c^2 t_s a} = \frac{\frac{\Delta N_c}{V}\lambda^2 L}{4\pi^2 n^2 t_s a}$$

Και αντικαθιστώντας τις τιμές έχουμε

$$\Delta f \approx \frac{\left(4\times10^{20}m^{-3}\right)\cdot\left(8\times10^{-7}m\right)^2\cdot 0.15m}{4\cdot 3.14^2\cdot 1.76^2\cdot\left(2\times10^{-4}s\right)\cdot 0.02} = 7.85\cdot10^{10}s^{-1}$$

Β)Η ισχύς ανά μονάδα όγκου που ακτινοβολείται από το Laser είναι (εξίσωση (10.18) βιβλίου):

$$P = \frac{\Delta N_c}{V}\frac{hf}{t_s} = \frac{\Delta N_c}{V}\frac{hc}{t_s\lambda} \Rightarrow$$

$$P = \left(4\times10^{20}m^{-3}\right)\cdot\frac{\left(6.626\times10^{-34}J\cdot s\right)\cdot 3\times10^8 m/s}{\left(2\times10^{-4}s\right)\cdot 8\times10^{-7}m} = 5\cdot10^5 W/m^3$$

Η ακτινοβολούσα ισχύ, p, από το Laser είναι:

$$p = P\cdot V_L = P\cdot L\cdot\pi r^2 = \left(5\times10^5 W/m^3\right)\cdot 0.15m\cdot 3.14\cdot\left(2.5\times10^{-3}m\right)^2 = 1.47W$$

όπου V_L ο όγκος της κοιλότητας.

Άσκηση 7

Α) Η ενέργεια Fermi δίνεται από τη σχέση (9.31)

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \quad (1)$$

όπου m η μάζα των σωματιδίων, N το πλήθος τους και V ο όγκος που καταλαμβάνουν. Για έναν πυρήνα ακτίνας r_0 ο όγκος είναι $V = \frac{4\pi}{3} r_0^{\,3}$, άρα έχουμε

$$E_{F,p} = \frac{h^2}{2m_p}\left(\frac{3N_p}{8\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(6.626\times10^{-34})^2}{2\times1.6726\times10^{-27}}\left(\frac{3\times20}{8\pi\frac{4\pi}{3}(4.1\times10^{-15})^3}\right)^{2/3}\mathrm{J} = 5.37\times10^{-12}\,\mathrm{J} = 33.5\,\mathrm{MeV}$$

$$E_{F,p} = \frac{h^2}{2m_n}\left(\frac{3N_n}{8\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(6.626\times10^{-34})^2}{2\times1.6749\times10^{-27}}\left(\frac{3\times20}{8\pi\frac{4\pi}{3}(4.1\times10^{-15})^3}\right)^{2/3}\mathrm{J} = 5.36\times10^{-12}\,\mathrm{J} = 33.4\,\mathrm{MeV}$$

οπότε $E_F = (E_{F,p} + E_{F,n})/2 \simeq 33.4\,\mathrm{MeV}$.

Β) Σε θερμοκρασία 0 K η κατανομή Fermi-Dirac παίρνει την απλή μορφή

$$f_{FD}(E) = \begin{cases} 1 & 0 \le E \le E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases},$$

άρα από τη σχέση που δίνει τη μέση τιμή της ενέργειας

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty E\, n(E)dE}{N/V} = \frac{V}{N}\int_0^{E_F} E\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}E^{1/2}}{h^3}dE = \frac{V}{N}\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{\,3/2}dE = \frac{V}{N}\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{2}{5}E_F^{\,5/2}$$

η οποία σε συνδυασμό με την (1) δίνει

$$\overline{E} = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{h^2}{2m}\right)^{3/2}\frac{1}{E_F^{\,3/2}}\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{2}{5}E_F^{\,5/2} \Rightarrow \overline{E} = \frac{3}{5}E_F = 20.1\,\mathrm{MeV}$$

Γ) Η πιθανότητα είναι $f_{FD} = \dfrac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1}$ οπότε λύνοντας ως προς τη θερμοκρασία

$$T = \frac{E-E_F}{k\ln\left(\frac{1-f}{f}\right)} = \frac{(33.6-33.4)\times10^6}{8.618\times10^{-5}\ln\left(\frac{1-0.01}{0.01}\right)}\mathrm{K} = 5.05\times10^8\,\mathrm{K}$$

Άσκηση 8

Επειδή σε θερμοκρασία $T = 0$ η κατωτάτη ακατάληπτη στάθμη έχει ενέργεια $E = E_c$ και η ανώτατη κατειλημμένη έχει ενέργεια $E = E_c - E_g/10$, άρα η ενέργεια Fermi είναι $E_F = E_c - E_g/20$. Η πιθανότητα να διεγερθεί ένα ηλεκτρόνιο σε ενέργεια E είναι

$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1}.$$

Οπότε για να διεγερθεί μέχρι την ενέργεια $E = E_c$ (όπου $E - E_F = E_c - E_F = E_g/20$), έχει πιθανότητα $f_{FD}(E_c,T) = \dfrac{1}{e^{E_g/20kT}+1}$, που είναι αύξουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας, διότι

για $T > 0$ η παράγωγος $\dfrac{\partial f_{FD}(E_c,T)}{\partial T} = \dfrac{e^{E_g/20kT}}{\left(e^{E_g/20kT}+1\right)^2}\dfrac{E_g}{20kT^2} > 0$

και για $T = 0$ η $f_{FD}(E_c,T) = \dfrac{1}{e^{E_g/20k(T\to0)}+1} \to \dfrac{1}{e^\infty+1} \to 0$.

Αλλά η αγωγιμότητα είναι ανάλογη του πλήθους των ελευθέρων ηλεκτρονίων της ζώνης αγωγιμότητος, το οποίον αυξάνει όσο αυξάνεται η πιθανότητα $f_{FD}(E_c,T)$ διεγέρσεως από τις ανώτατες κατειλημμένες στάθμες στην ακατάληπτη ζώνη αγωγιμότητος. Άρα η αγωγιμότητα είναι αύξουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Άσκηση 9

Η σταθερά διάσπασης του ^{14}C είναι $\lambda = 3.84\times 10 s^{-12} s^{-1}$ (σελ. 458). Ο αριθμός πυρήνων άνθρακα-12 στα 5gr του υλικού είναι

$N(^{12}C) = 6.023\times 10^{23}\, nucl/mole \times 5gr/(12gr/mole) = 2.5\times 10^{23}\, nucl$

Μιά και ο λόγος ^{14}C προς ^{12}C είναι 1.3×10^{-12} βρίσκουμε οτι ο αριθμός των πυρήνων άνθρακα-14 στο δείγμα θα ήταν την εποχή πριν την έκρηξη ισος με

$N_0(^{14}C) = 1.3\times 10^{-12}\times 2.5\times 10^{23} = 3.25\times 10^{11}$

και η ενεργότητα την περίοδο εκείνη ίση με

$R_0 = N_0\lambda = 3.25\times 10^{11}\times 3.84\times 10^{-12} s^{-1} = 1.248 s^{-1} = 75\,\delta\iota\alpha\sigma\pi/\min$

Με βάσει την εξίσωση 13.8 έχουμε

$$-\lambda t = \ln\frac{R}{R_0} = \ln\frac{48}{75} = -.446$$

Δηλαδή

$$t = \frac{.446}{3.84\times 10^{-12} s^{-1}} = 1.16\times 10^{11} s = 3678\,\varepsilon\tau\eta$$

Τα δεδομένα της ραδιοχρονολόγησης παραπέμπουν συνεπώς στο έτος 1679 πΧ, πανω από ενα και μισό αιώνα πριν την συμβατική ημερομηνία.

Παρατηρούμε ότι μία μικρή απόκλιση στην μετρούμενη ενεργότητα της τάξης 48 ± 1 διασπάσεις ανά λεπτό μεταφέρει την ημερομηνία της έκρηξης κατα εκατόν πενήντα χρόνια περίπου (1509 πΧ και 1853 πΧ αντίστοιχα). Για να είναι αξιόπιστη η ραδιοχρόνολόγηση χρειάζεται μεγαλύτερα δείγματα έτσι ώστε μικρά σφάλματα στην μετρούμενη ενεργότητα να μην μετατρέπονται σε πολυ μεγάλες χρονικές αποκλίσεις.

Άσκηση 10

Α) Έστω Α ο μαζικός αριθμός και Ζ ο ατομικός αριθμός του άγνωστου στοιχείου Χ. Από την αντίδραση έχουμε

$$2+9 = X+4 \Rightarrow X = 7$$

$$1+4 = Z+2 \Rightarrow Z = 3$$

Συνεπώς το άγνωστο στοιχείο είναι το ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$

Β) Η μάζα των αντιδρώντων (σύμφωνα με τους πίνακες Παράρτημα Ζ του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer) ισούται με

$$m\left({}^{2}_{1}\mathrm{H}\right) + m\left({}^{9}_{4}\mathrm{Be}\right) = 2.014102\mathrm{u}+9.012182\mathrm{u}=11.26284\mathrm{u}$$

και η μάζα των προϊόντων είναι

$$m\left({}^{7}_{3}\mathrm{Li}\right) + m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) = 7.016005\mathrm{u}+4.002603\mathrm{u}=11.018606\mathrm{u}$$

Η αντίδραση είναι λοιπόν εξώθερμη. Η ενέργεια που απελευθερώνεται δίνεται από

$$Q = \left(11.26284\mathrm{u} - 11.018606\mathrm{u}\right)\times 931.50\ \mathrm{MeV/u} = 7.152\,\mathrm{MeV}$$

Γ) Χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό τύπο (13.1) του βιβλίου των Serway, Moses και Moyer για την ακτίνα των δύο πυρήνων, έχουμε

$$r_{\mathrm{Be}} = 1.2\times 10^{-15}\left(9\right)^{1/3} = 2.5\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

$$r_{\mathrm{H}} = 1.2\times 10^{-15}\left(2\right)^{1/3} = 1.5\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Συνεπώς η απόσταση των δύο πυρήνων όταν βρίσκονται σε επαφή είναι

$$R = r_{\mathrm{Be}} + r_{\mathrm{H}} = 4.0\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Η ενέργεια λοιπόν κατωφλίου για την αντίδραση, που είναι η ενέργεια Coulomb στο σημείο επαφής είναι

$$U = k\frac{Q_1Q_2}{R} = k\frac{4e^2}{R} = 8.988\times 10^9\,\mathrm{N\,m^2}\,\frac{4\left(1.602\times 10^{-19}\,\mathrm{C}^2\right)}{\left(4.0\times 10^{-15}\mathrm{m}\right)}\times\frac{1}{1.602\times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 1.4\mathrm{MeV}$$

Δ) Παρατηρούμε ότι ενώ η αντίδραση απελευθερώνει ενέργεια 7.4MeV, τα αντιδρώντα πρέπει να έχουν αρχική κινητική ενέργεια 1.4MeV για να ξεκινήσει η αντίδραση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου σε κυβικό κουτί πλευράς L δίνονται από

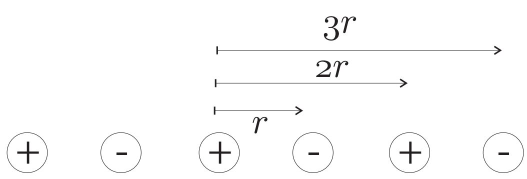
$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2,\quad n = 1,2,\ldots$$

Σε κάθε κατάσταση μπορούμε να έχουμε το πολύ δύο ηλεκτρόνια με αντιπαράλληλα σπιν οπότε η ενέργεια της βασικής κατάστασης θα δίνεται από

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}\left(2\times 1^2 + 2\times 2^2 + 3^2\right) = \frac{19\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}$$

2) Από την θεμελιώδη στάθμη ενέργειας E_1 διεγείρονται ηλεκτρόνια στην ανωτάτη στάθμη ενέργειας E_3, με απορρόφηση φωτονίων «αντλήσεως» ενέργειας $hf=E_3-E_1$. Η μεσαία στάθμη είναι μετασταθής, δηλ. τυχόν διηγερμένα ηλεκτρόνια σ'αυτήν δεν μπορούν να μεταπέσουν στην θεμελιώδη αυθορμήτως (με συνήθη ακτινοβολία διπόλου). Έτσι όσα ηλεκτρόνια από την E_3 πέσουν τυχαία στην E_2 μένουν εκεί (αναστροφή πληθυσμού) μέχρις ότου εξαναγκασθούν να μεταπέσουν όλα συγχρόνως στην E_1. Ετσι παράγεται σύμφωνο φώς ενεργειας $hf=E_2-E_1$ (προς όλες τις κατευθύνσεις). Όσα εξ αυτών προσπέσουν στα παράλληλα κάτοπτρα παλινδρομούν εντός του υλικού προκαλώντας την εξαναγκασμένη αποδιέγερση $E_2 \rightarrow E_1$ και ενισχύοντας την δέσμη. Όσο ακριβέστερη είναι η παραλληλία των κατόπτρων τόσο πιό παράλληλη είναι η δέσμη. Το ένα κάτοπτρο είναι εν μέρει διαπερατό για να εξέρχεται μέρος της δέσμης (προς χρήσιν).

3)



Επιλέγοντας ένα ιόν όπως στο σχήμα η δυναμική του ενέργεια θα δίνεται από το (άπειρο) άθροισμα των ενεργειών αλληλεπίδρασης με όλα τα άλλα ιόντα. Η συνολική δυναμική ενέργεια θα δίνεται από

$$U = \ldots - \frac{ke^2}{3r} + \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r} + \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{3r} + \ldots =$$
$$= -\frac{2ke^2}{r} + \frac{2ke^2}{2r} - \frac{2ke^2}{r} + \ldots = -\frac{2ke^2}{r}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right)$$
$$= -\frac{2ke^2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{ke^2}{r}2\ln 2 = -\frac{\alpha ke^2}{r}$$

όπου για να υπολογίσουμε το άπειρο άθροισμα χρησιμοποιήσαμε το πλήρες ανάπτυγμα Taylor

$$\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

για $x = 1$

4) Για τα αντιδρώντα έχουμε μαζικό αριθμό Α=6+2=8 και ατομικό Ζ=3+1=4. Κατα συνέπεια το στοιχειο Χ είναι ${}_4^8Be$ ενω το στοιχείο Υ είναι επίσης ήλιο. Η αντίδραση γράφεται

$${}_3^6Li + {}_1^2H \rightarrow {}_4^8Be^* \rightarrow 2\,{}_2^4He$$

Η ισοδύναμη ενέργεια λόγω διαφοράς μαζών προιόντων-αντιδρόντων είναι

$$Q = \left(6.015123 + 2.014102 - 2 * 4.002603\right) \times 931.5MeV = 22.374MeV$$

Η αντίδραση είναι εξώθερμη μιά και $Q > 0$.

Αγνοώντας την κινητική ενέργεια των πυρήνων, η ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται κατά τη διαδικασία ${}_4^8Be^* \rightarrow 2\,{}_2^4He$ είναι $E = \left(8.005305 - 2 \times 4.002603\right) \times 931.5MeV = 0.092MeV$
ενω η συχνότητά του $f = E/h = 2.23 \times 10^{19}\,Hz$.

5) (Α) Ο μαζικός αριθμός δεν μεταβάλλεται και ο ατομικός αριθμός ελαττώνεται κατά ένα, οπότε για να διατηρείται το φορτίο πρέπει να εκπέμπεται ποζιτρόνιο (e^+). Για να διατηρείται ο ηλεκτρονικός λεπτονικός αριθμός πρέπει να εκπέμπεται επίσης και ένα νετρίνο ηλεκτρονίου (v_e):

$${}_{14}^{27}\mathrm{Si} \rightarrow {}_{13}^{27}\mathrm{Al} + \mathrm{e}^+ + v_e$$

(Β) Ο μαζικός αριθμός ελαττώνεται κατά τέσσερα, οπότε έχουμε εκπομπή σωματίου α:

$${}_{92}^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\mathrm{Th} + {}_2^4\mathrm{He}$$

(Γ) Ο μαζικός αριθμός δεν μεταβάλλεται και ο ατομικός αριθμός αυξάνεται κατά ένα, οπότε για να διατηρείται το φορτίο πρέπει να εκπέμπεται ηλεκτρόνιο (e^-). Για να διατηρείται ο ηλεκτρονικός λεπτονικός αριθμός πρέπει να εκπέμπεται επίσης και ένα αντινετρίνο ηλεκτρονίου ($\overline{v}_e$):

$${}_{33}^{74}\mathrm{As} \rightarrow {}_{34}^{74}\mathrm{Se} + \mathrm{e}^- + \overline{v}_e$$