10/10/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2009-10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 10/11/09

Άσκηση 1

Α) Θεωρούμε μετατόπιση της μάζας m_1 , από το σημείο ισορροπίας του ελατηρίου k_1, κατά x_1 και αντίστοιχα μετατόπιση κατά x_2 της μάζας m_2 από το σημείο ισορροπίας του ελατηρίου k_2 και x_3 την απόσταση της μάζας m_3 από το σημείο ισορροπίας του ελατηρίου k_1, όπως στο σχήμα. Στη μάζα m_1 ασκούνται οι δυνάμεις των ελατηρίων k_1, k_2 και η οριζόντια συνιστώσα της τάσης της ράβδου $T\sin\theta$, ενώ η κάθετη συνιστώσα και το βάρος εξουδετερώνονται από την αντίδραση του τραπεζιού. Στη μάζα m_2 ασκείται η δύναμη του ελατηρίου k_2 ενώ το βάρος της εξουδετερώνεται από την αντίδραση του τραπεζιού. Στη μάζα m_3 ασκείται το βάρος της και η τάση της ράβδου. Για μικρές γωνίες θεωρούμε την κάθετη συνιστώσα της τάσης ίση με το βάρος $T\cos\theta = m_3 g \Rightarrow T \approx m_3 g$ καθώς για $\theta \ll 1$, $\cos\theta \approx 1$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κάθε μάζα και ειδικά για τις οριζόντιες μετατοπίσεις και χρησιμοποιώντας $\sin\theta = \dfrac{x_3 - x_1}{\ell}$ έχουμε

$$(m_1): m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_2\left(x_1 - x_2\right) + T\sin\theta$$

$$= -\left(k_1 + k_2\right)x_1 + k_2 x_2 + mg\frac{x_3 - x_1}{\ell} = -\left(k_1 + k_2 + \frac{m_3 g}{\ell}\right)x_1 + k_2 x_2 + \frac{m_3 g}{\ell}x_3$$

$$(m_2): m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +k_2\left(x_1 - x_2\right)$$

$$(m_3): m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -T\sin\theta = -m_3 g\frac{x_3 - x_1}{\ell}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \left(-4x_1 + x_2 + x_3\right)\omega_0^2$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \left(3x_1 - 3x_2\right)\omega_0^2$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = \left(3x_1 - 3x_3\right)\omega_0^2$$

Β) Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_i = A_i \cos(\omega t + \phi), i = 1,2$ παίρνουμε

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -3\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε λύσεις για

$$\det\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -3\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3\omega_0^4\left(3\omega_0^2 - \omega^2\right) + \left(3\omega_0^2 - \omega^2\right)\left[\left(4\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(3\omega_0^2 - \omega^2\right) - 3\omega_0^4\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(3\omega_0^2 - \omega^2\right)\left[\omega^4 - 7\omega^2\omega_0^2 + 6\omega_0^4\right] = 0 \Rightarrow \left(3\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(6\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0$$

όπου αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς την τελευταία στήλη και επιλύσαμε τη δευτεροβάθμια $\omega^4 - 7\omega^2\omega_0^2 + 6\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2}\omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 = 6\omega_0^2, \omega_0^2$

Συνεπώς οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$\omega = \omega_0, \sqrt{3}\omega_0, \sqrt{6}\omega_0$$

Γ) Οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης υπολογίζονται από την (1) Επομένως έχουμε

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow -3\omega_0^2 A_1 + 2\omega_0^2 A_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{2}$$

$$-3\omega_0^2 A_1 + 2\omega_0^2 A_3 = 0 \Rightarrow \frac{A_3}{A_1} = \frac{3}{2}$$

$$\omega = \sqrt{3}\omega_0 \Rightarrow -3\omega_0^2 A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 - \omega_0^2 A_3 = 0 \Rightarrow \frac{A_3}{A_2} = -1$$

$$\omega = \sqrt{6}\omega_0 \Rightarrow -3\omega_0^2 A_1 - 3\omega_0^2 A_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = -1$$

$$-3\omega_0^2 A_1 - 3\omega_0^2 A_3 = 0 \Rightarrow \frac{A_3}{A_1} = -1$$

Άσκηση 2

(Α) Εφαρμόζουμε τον ακόλουθο τύπο για το φαινόμενο Doppler ηχητικών κυμάτων: $f' = f\dfrac{u-u_o}{u-u_s}$, όπου u η ταχύτητα του ήχου, u_o και u_s η ταχύτητες του παρατηρητή και της πηγής αντίστοιχα. f και f' είναι η συχνότητα εκπομπής της πηγής και η συχνότητα που μετράει ο παρατηρητής αντίστοιχα. Θεωρούμε θετική φορά των ταχυτήτων τη διεύθυνση πηγής παρατηρητή. Όταν το αυτοκίνητο πλησιάζει τον παρατηρητή η συχνότητα που αυτός ακούει είναι (η ταχύτητα της πηγής έχει θετική φορά):

$$f_1' = f\frac{u}{u-u_s}, \tag{1}$$

ενώ όταν το αυτοκίνητο απομακρύνεται από τον παρατηρητή είναι (η ταχύτητα της πηγής έχει αρνητική φορά):

$$f_2' = f\frac{u}{u+u_s}. \tag{2}$$

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{u+u_s}{u-u_s} \Rightarrow u_s = u\frac{f_1'-f_2'}{f_1'+f_2'} = 331.45\frac{272-256}{272+256}m/s = 10.0m/s$$

Λύνουμε την (1) ως προς f :

$$f = f_1'\frac{u-u_s}{u} = 272\frac{331.45-10}{331.45}Hz = 263.8Hz$$

(Β) Θεωρούμε ότι ο παρατηρητής κινείται με την θετική φορά και έχουμε:

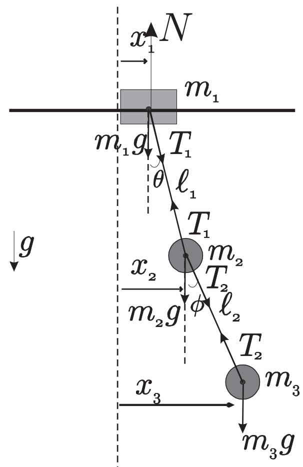
$$f' = f\frac{u-u_o}{u-u_s} \Rightarrow u_o = u-\frac{f'}{f}(u-u_s) = 331.45m/s - \frac{280}{263.8}(331.45-10)m/s = -9.74m/s$$

Ο παρατηρητής πρέπει να κινείται με ταχύτητα 9.74m/s και με αρνητική φορά, δηλαδή να κινείται προς το αυτοκίνητο ενώ αυτό τον πλησιάζει.

Γ) Όταν το αυτοκίνητο τον προσπεράσει η συχνότητα που θα ακούει ο παρατηρητής θα είναι (η φορά της ταχύτητας του παρατηρητή είναι θετική πλέον, ενώ η φορά της ταχύτητας της πηγής είναι αρνητική):

$$f' = f\frac{u-u_o}{u+u_s} \Rightarrow f' = 263.8\frac{331.45-9.74}{331.45+10}Hz = 248.5Hz$$

Άσκηση 3



Α) Έστω x_1, x_2, x_3 οι οριζόντιες μετατοπίσεις των τριών μαζών από ένα σταθερό σημείο στον οριζόντιο άξονα και θ και φ οι γωνίες που σχηματίζουν οι δύο μπάρες με την κατακόρυφο όπως στο Σχήμα. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε μια από τις τρεις μάζες και για μικρές γωνίες θ και φ έχουμε

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = T_1 \sin \vartheta \qquad (1)$$

$$T_1 \cos\theta + m_1 g = N \qquad (2)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -T_1 \sin\theta + T_2 \sin\varphi \qquad (3)$$

$$T_1 \cos\theta = T_2 \cos\varphi + m_2 g \qquad (4)$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -T_2 \sin\varphi \qquad (5)$$

$$T_2 \cos\varphi = m_3 g \qquad (6)$$

Από τις (4),(6) βρίσκουμε

$$T_2 = \frac{m_3 g}{\cos\varphi}$$

$$T_1 = \frac{(m_3 + m_2) g}{\cos\theta}$$

Αντικαθιστώντας στις (1),(3),(5) βρίσκουμε

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = g(m_3 + m_2)\tan\theta \qquad (7)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -g(m_3 + m_2)\tan\theta \; + m_3 g \tan\varphi \qquad (8)$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -m_3 g \tan\varphi \qquad (9)$$

Για μικρές γωνίες , θ και φ

$$\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell_1}, \quad \tan\varphi \approx \sin\varphi = \frac{x_3 - x_2}{\ell_2}$$

και αντικαθιστώντας στις (7),(8),(9) καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{g}{\ell_1} \frac{(m_3 + m_2)}{m_1} (x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{g}{\ell_1} \frac{(m_3 + m_2)}{m_2} (x_2 - x_1) + \frac{g}{\ell_2} \frac{m_3}{m_2} (x_3 - x_2)$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{g}{\ell_2} (x_3 - x_2)$$

Β) Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{3g}{4\ell}(x_2 - x_1) = -\frac{3}{4}\omega_0^2 x_1 + \frac{3}{4}\omega_0^2 x_2 \qquad (10)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{3g}{4\ell}(x_2 - x_1) + \frac{2g}{\ell}(x_3 - x_2) = \frac{3}{2}\omega_0^2 x_1 - \frac{7}{2}\omega_0^2 x_2 + 2\omega_0^2 x_3 \qquad (11)$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}(x_3 - x_2) = \frac{g}{\ell} x_2 - \frac{g}{\ell} x_3 = \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_3 \qquad (12)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$. Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -3/4 & +3/4 & 0 \\ 3/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$$

καταλήγουμε σε

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -3/4 & +3/4 & 0 \\ 3/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3\omega_0^2/4 + \omega^2 & 3\omega_0^2/4 & 0 \\ 3\omega_0^2/2 & -7\omega_0^2/2 + \omega^2 & 2\omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει λύσεις όταν

$$\det\begin{pmatrix} -3\omega_0^2/4 + \omega^2 & 3\omega_0^2/4 & 0 \\ 3\omega_0^2/2 & -7\omega_0^2/2 + \omega^2 & 2\omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^6 - \frac{21}{4}\omega^4\omega_0^2 + \frac{15}{4}\omega^2\omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2\left(\omega^4 - \frac{21}{4}\omega^2\omega_0^2 + \frac{15}{4}\omega_0^4\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = 0,\ \omega = \frac{\sqrt{21-\sqrt{201}}}{2\sqrt{2}}\omega_0 \approx 0.923\omega_0,\ \omega = \frac{\sqrt{21+\sqrt{201}}}{2\sqrt{2}}\omega_0 \approx 2.10\omega_0$$

Ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης με μηδενική συχνότητα αντιστοιχεί σε μεταφορική κίνηση του συστήματος.

Άσκηση 4

A) Αν μ η γραμμική πυκνότητα του σχοινιού, τότε μικρή μάζα $dm = \mu dx$ ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του και των τάσεων $T(x+dx)$, προς τα πάνω, και $T(x)$, προς τα κάτω.

$$T(x+dx) = T(x) + dm\, g \Rightarrow T(x+dx) - T(x) = g\,\mu\,dx \Rightarrow T'(x) = g\mu$$

$$\Rightarrow T(x) = g\mu x$$

B) Έστω ότι η διαταραχή $\xi(x,t)$ είναι κατά μήκος του οριζόντιου άξονα y. Αν σε ύψος x η $T(x)$ σχηματίζει με την κατακόρυφο μικρή γωνία α, τότε

$$\sin\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$$

και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης (επαναφοράς)

$$
\begin{aligned}
dF_y &= T_y(x+dx) - T_y(x) = (T\sin\alpha)\big|_{x+dx} - (T\sin\alpha)\big|_x \\
&= \left(T\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x+dx} - \left(T\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Bigg|_x = \frac{d}{dx}\left(T(x)\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\right)dx = \left(T'\xi_x + T\xi_{xx}\right)dx \\
&= g\mu dx(\xi_x + x\xi_{xx})
\end{aligned}
$$

(βλ. και Κουρή παράδ. 5 κεφ 4.4).
Άρα η προκαλούμενη επιτάχυνση της dm είναι

$$\ddot{y} = \ddot{\xi} = dF_y / dm = g(\xi_x + x\xi_{xx})$$

η εξίσωση διαδόσεως της διαταραχής:

$$\ddot{\xi} = g(\xi_x + x\xi_{xx}),\ \eta' : \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + x\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}\right)$$

Γ) Η ξ' εκφράζει την απόκλίση από την κατακόρυφο, και η ξ'' την καμπυλότητα. Εξ υποθέσεως και οι δύο είναι μικρές. Αλλά, αυξανομένου του ύψους, x, ο β' όρος $x\xi_{xx}$ αυξάνει, ενώ ο ξ' παραμένει μικρός. Άρα είναι εύλογο
$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,t) \ll x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t)$.

Δ) Αν στην εξίσωση διαδόσεως της διαταραχής παραλειφθεί ο ξ_x, τότε

$$\xi_{tt} = gx\xi_{xx}$$

οπότε η ταχύτητα διαδόσεως, από την μορφή της διαφορικής εξίσωσης του κύματος, $\xi_{tt} = v^2\xi_{xx}$, είναι

$$v(x) = \sqrt{gx}\,.$$

Ε) Αν Τ ο χρόνος διαδόσεως, ολοκληρώνοντας την ταχύτητα για x από 0 εώς L, και για t από 0 έως Τ,

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx} \Rightarrow \int_0^L x^{-1/2}dx = \sqrt{g}\int_0^T dt \Rightarrow \left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_0^L = \sqrt{g}\, t\big|_0^T \Rightarrow T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Κόβοντας το σχοινί σε μήκος L' έτσι ώστε Τ ' = Τ/2, πρέπει

$$L' = \frac{L}{4}$$

Άσκηση 5
Α) Εστω οτι η μεμβράνη είναι πακτωμένη στις πλευρές $y = 0,\ y = L_y$ και $x = 0$, και ελεύθερη στην πλευρά $x = L_x$
Κατά μήκος του άξονα y η διακύμανση άρχεται με κόμβο και καταλήγει σε κόμβο, ενώ κατά μήκος του άξονα x άρχεται με κόμβο και καταλήγει σε κοιλία.
Άρα το στάσιμο κύμα έχει εξίσωση (22.53 Alonso-Finn)

$$\xi(x,y,t) = \xi_0 \sin k_x x\ \sin k_y y\ \sin(\omega t + \phi)$$

όπου

$$\xi\left(x, L_y, t\right)=0 \Rightarrow \sin\left(k_y L_y\right)=0 \Rightarrow k_y L_y = n_y \pi \,, n_y = 1,2,3\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi\left(L_x, y, t\right)=0 \Rightarrow \cos\left(k_x L_x\right)=0 \Rightarrow k_x L_x = \left(2n_x+1\right)\frac{\pi}{2}, n_x = 0,1,2,\ldots$$

όπου $n_x = 0,1,2,\ldots, n_y = 1,2,\ldots$ ακέραιοι (αν ήταν $n_y = 0$ η μεμβράνη θα ηρεμούσε) και η δεύτερη εξίσωση περιγράφει οτι η διακύμανση καταλήγει σε κοιλία, αφού η τάση είναι οριζόντια, οπότε $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ εκεί.

Από το κυματάνυσμα $\vec{k} = (k_x, k_y) \Rightarrow k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, έπεται

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{2\pi}k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\sigma}}\sqrt{\left(2n_x+1\right)^2\frac{\pi^2}{4L_x^2} + n_y{}^2\frac{\pi^2}{L_y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\sigma}}\sqrt{\frac{\left(2n_x+1\right)^2}{4L_x^2} + \frac{n_y{}^2}{L_y^2}}$$

.

Όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, τότε η ταχύτητα διαδόσεως είναι $v = \sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\sigma}}$ και το σχετικό τύπο για τη συχνότητα κάθε αρμονικής (βλ. 18.47-18.48, και παραδειγμα 18.12 Alonso-Finn)

Β) Η ελάχιστη συχνότητα είναι όταν $n_x = 0, n_y = 1$.

$$\nu = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\sigma}}\sqrt{\left(\frac{1}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{4L_x}\right)^2}$$

Το αντίστιχο μήκος κύματος

$$\lambda_0 = 1\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{4L_x}\right)^2}$$

Γ) Η ισοφασική γραμμή, έστω $\vec{a} = \left(a_x, a_y\right)$, είναι κάθετη στην διεύθυνση διαδόσεως $\vec{k} = \left(k_x, k_y\right)$, με εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{a}\cdot\vec{k} = 0 \Rightarrow a_x k_x + a_y k_y = 0 \Rightarrow \frac{a_y}{a_x} = -\frac{k_x}{k_y}$$

Άρα η διεύθυνση της ισοφασικής γραμμής ορίζεται από

$$\frac{a_y}{a_x} = -\frac{\pm 1/2L_x}{\pm 1/L_y} = \pm\frac{L_y}{2L_x}$$

όπου σε κάθε πρόσημο αντιστοιχούν δύο κύματα, οδεύον και ανακλώμενο $\left(k_x, k_y\right), \left(-k_x, -k_y\right)$ και $\left(-k_x, k_y\right), \left(k_x, -k_y\right)$.

Άσκηση 6

(A) Το κύμα απομάκρυνσης είναι

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right]$$

όπου k το κυματάνυσμα, λ το μήκος κύματος, ω η κυκλική και ν η συχνότητα του κύματος. Το κύμα πίεσης δίνεται από την σχέση (18.24) του βιβλίου του Alonso οπου κ το μέτρο ελαστικότητας όγκου:

$$\Delta p = p - p_0 = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\kappa k \xi_0 \cos(kx - \omega t) = -\kappa k \xi_0 \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{2})$$

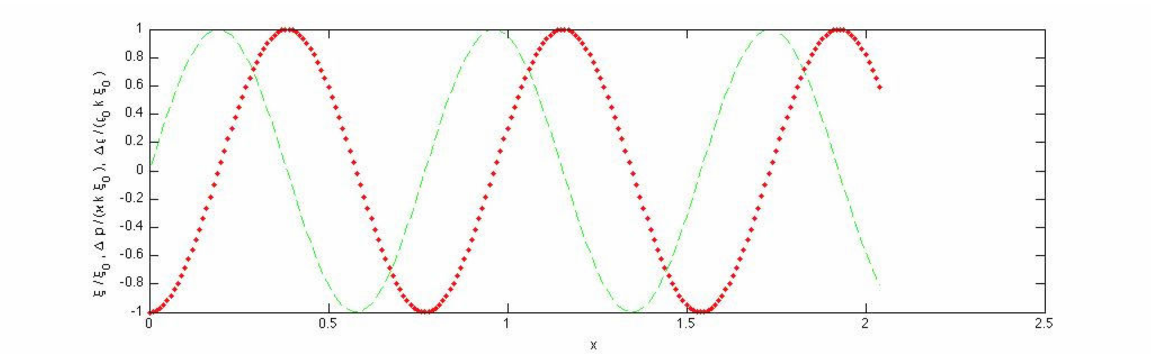
Το κύμα πυκνότητας δίνεται αντίστοιχα από την σχέση (18.21), δηλ.

$$\Delta \rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 k \xi_0 \cos(kx - \omega t) = -\rho_0 k \xi_0 \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{2})$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά φάσης των κυμάτων πίεσης και πυκνότητας από το κύμα μετατόπισης είναι π/2.

Ισχύει $\omega = \upsilon k$, όπου $\upsilon = \sqrt{\kappa / \rho_0}$. Από το Παράδειγμα 18.6 και την σχέση $\upsilon = 20.055\sqrt{T}$ $\mathrm{ms^{-1}}$ βρίσκουμε για T=273+25=298K την ταχύτητα ήχου $\upsilon = 346.20$ $\mathrm{ms^{-1}}$. Συνεπώς $\kappa = \upsilon^2 \rho_0 = 1.5 \times 10^5 kgm^{-1}s^{-2}$

B) Τα πλάτη των τριών κυμάτων είναι αντίστοιχα $\xi_0 = 1\mathring{A}$, $\kappa k \xi_0 = 12.4 \cdot 10^{-5} Nm^{-2}$ και $\rho_0 k \xi_0 = 1.05 \cdot 10^{-9} Kgm^{-3}$, όπου $k = 2\pi\nu / \upsilon = 8.16 m^{-1}$. Στο σχήμα σχεδιάζουμε τις ποσότητες διαιρεμένες με το αντίστοιχο πλάτος σαν συνάρτηση της απομάκρυνσης x (σε m). Η καμπύλη με τη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο κύμα απομάκρυνσης ενώ αυτή με τελείες στα κύματα πίεσης και πυκνότητας.



(Γ) Από το Παράδειγμα 18.11 έχουμε για την ένταση του κύματος

$$I = \frac{p_0^2}{2\upsilon\rho_0} = \frac{(\kappa k \xi_0)^2}{2\upsilon\rho_0} = 2\pi^2 \upsilon \rho_0 \nu^2 \xi_0^2$$

Μετά από αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε $I = 1.79 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Wm^{-2}}$ και κατα συνέπεια

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{1.79 \times 10^{-11}}{10^{-12}} \approx 12.5 \text{ dB}$$

Άσκηση 7

Ισχύει

$$\frac{1}{\upsilon_g}=\frac{dk}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)=\frac{1}{\upsilon}-\frac{\omega}{\upsilon^2}\frac{d\upsilon}{d\omega}=\frac{1}{\upsilon}-\frac{nA\omega^n}{\upsilon^2}=\frac{1}{\upsilon}-\frac{n}{\upsilon}$$

και άρα $\upsilon_g=\upsilon/(1-n)$

Έχουμε ομαλή (αντ. ανώμαλη) όταν $d\upsilon/d\lambda>0$ ($d\upsilon/d\lambda<0$). Εκφράζουμε την σχέση 18.58 συναρτήσει του μήκους κύματος:

$$\upsilon_g=\upsilon-\lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}$$

Παρατηρούμε ότι για $d\upsilon/d\lambda>0$ ισχύει $\upsilon_g<\upsilon$ ενώ για $d\upsilon/d\lambda<0$ έχουμε $\upsilon_g>\upsilon$. Από την σχέση ανάμεσα στις δύο ταχύτητες βρίσκουμε ομαλή (ανώμαλη) διασπορά για $n>1$ ή $n<0$ ($0<n<1$).

Άσκηση 8

(Α) Το χωρικό μέρος του στάσιμου κύματος στις δύο περιοχές της ράβδου είναι

$$y(x)=\begin{cases} y_1(x)=A\sin(k_1x)+B\cos(k_1x) & 0<x<L_1 \\ y_2(x)=C\sin[k_2(x-L_1)]+D\cos[k_2(x-L_1)] & L_1<x<L \end{cases}$$

όπου $L=L_1+L_2$. Από τις οριακές συνθήκες έχουμε:

$$y_1(0)=0\Rightarrow B=0 \qquad (1)$$

$$y_1(L_1)=0\Rightarrow \sin(k_1L_1)=0\Rightarrow \sin(\frac{2\pi}{\lambda_1}L_1)=0\Rightarrow \lambda_1=2L_1/n_1,\quad n_1=1,2,3,... \qquad (2)$$

$$y_2(L_1)=0\Rightarrow D=0 \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} &y_2(L)=0\Rightarrow \sin[k_2(L-L_1)]=0\Rightarrow \sin(k_2L_2)=0\Rightarrow \sin(\frac{2\pi}{\lambda_2}L_2)=0 \\ &\Rightarrow \lambda_2=2L_2/n_2,\quad n_2=1,2,3,... \end{aligned} \qquad (4)$$

Οι συχνότητες ταλάντωσης είναι $f_1=\upsilon_1/\lambda_1$ και $f_2=\upsilon_2/\lambda_2$, όπου $\upsilon_1=\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}$, $\upsilon_2=\sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}$ οι ταχύτητες διάδοσης εγκαρσίων κυμάτων στις δύο ράβδους αντίστοιχα.

Αφού έχουμε στάσιμο κύμα, όλα τα σημεία της ράβδου ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα, άρα

$$f=f_1=f_2\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}=\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}\Rightarrow \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}=\frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}\Rightarrow \frac{n_1}{n_2}=\frac{L_1}{L_2}\sqrt{\frac{G_2}{G_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}} \qquad (5)$$

Από τον Πίνακα 18.1 βρίσκουμε ότι οι διατμητικές τάσεις του αλουμινίου και του σιδήρου είναι $G_1=0.24\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$ και $G_2=0.82\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$ αντίστοιχα. Με αντικατάσταση στη σχέση (5) καταλήγουμε στη σχέση $n_1/n_2=1.5$ που πρέπει να ισχύει προκειμένου να έχουμε στάσιμο κύμα. Η ελάχιστη συχνότητα προκύπτει για μέγιστο μήκος κύματος, άρα με βάση τις σχέσεις (2), (4), για τους μικρότερους δυνατούς ακέραιους n_1, n_2 που ικανοποιούν την $n_1/n_2=1.5$. Εύκολα βρίσκουμε

$n_1 = 3$ και $n_2 = 2$, και άρα $f = f_1 = \dfrac{n_1}{2L_1}\sqrt{\dfrac{G_1}{\rho_1}} = \dfrac{3}{2\times 6\times 10^{-2}}\sqrt{\dfrac{0.24\times 10^{11}}{2.70\times 10^{3}}}\mathrm{Hz} = 7.33\,\mathrm{kHz}$.

(Β) Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, το στάσιμο κύμα γίνεται

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = A\sin\left(\dfrac{3\pi}{L_1}x\right) & 0 < x < L_1 \\ y_2(x) = C\sin\left(\dfrac{2\pi}{L_2}(x - L_1)\right) & L_1 < x < L \end{cases}$$

Τα σημεία μηδενισμού (δεσμοί) έχουν $y(x) = 0$. Για τις δύο περιοχές έχουμε

$0 < x < L_1$:

$$A\sin\left(\frac{3\pi}{L_1}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{L_1}x = m\pi \Rightarrow x = m\frac{L_1}{3} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{L_1}{3},\ x_3 = 2\frac{L_1}{3},\ x_4 = 3\frac{L_1}{3}$$

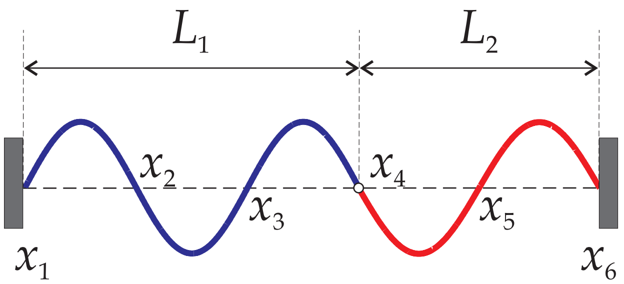
$L_1 < x < L$:

$$C\sin\left(\frac{2\pi}{L_2}(x - L_1)\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{L_2}(x - L_1) = \ell\pi \Rightarrow x - L_1 = \ell\frac{L_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 = L_1,\ x_5 = L_1 + \frac{L_2}{2},\ x_6 = L_1 + L_2$$

Συνεπώς έχουμε έξι δεσμούς στις θέσεις 0, 20.33, 40.67, 61, 83, 105 cm.

(Γ)

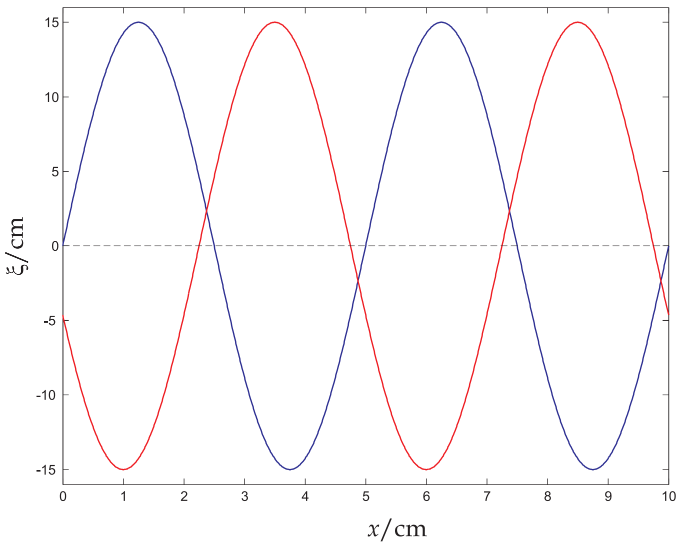


Άσκηση 9

(Α) Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση $\xi = \xi_0\sin(kx - \omega t) = \xi_0\sin\pi(\frac{2}{\lambda}x - 2ft)$ συμπεραίνουμε ότι τα ζητούμενα στοιχεία είναι:

Πλάτος:	$\xi_0 = 15\mathrm{cm}$
Συχνότητα:	$2f = 6\mathrm{s}^{-1} \Rightarrow f = 3\mathrm{Hz}$
Μήκος κύματος:	$2/\lambda = 0.4\mathrm{cm}^{-1} \Rightarrow \lambda = 5\mathrm{cm}$
Ταχύτητα κύματος:	$\upsilon = \omega/k = f\lambda = 15\mathrm{cm/s} = 0.15\,\mathrm{m/s}$

(Β)



(Γ) Η ταχύτητα ενός σωματίου που βρίσκεται στη θέση x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $u=\frac{\partial \xi}{\partial t}=-90\pi\cos\pi(0.4x-6t)$, άρα η μέγιστη ταχύτητα είναι 283 cm/s.

(Δ) $P=-F\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t}=-T{\xi_0}^2 k(-\omega)\cos^2(kx-\omega t)={\xi_0}^2 Tk\omega\cos^2(kx-\omega t)$, και άρα η μέση ισχύς είναι $\langle P\rangle=\frac{1}{2}{\xi_0}^2 Tk\omega=\frac{1}{2}{\xi_0}^2\upsilon^2\mu k\omega=\frac{1}{2}{\xi_0}^2\mu\upsilon\omega^2=60\,\mathrm{mW}$

Άσκηση 10

Σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Η γενική έκφραση θα είναι λοιπόν της μορφής.

$$\xi(x,t)=A(x)\cos(\omega t+\phi) \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Rightarrow -\omega^2 A=\frac{T}{\mu}\frac{d^2 A}{dx^2}\Rightarrow \frac{d^2 A}{dx^2}=-\frac{\mu\omega^2}{T}A\Rightarrow A(x)=C\cos(k\,x)+D\sin(k\,x) \quad (2)$$

με $k=\omega\sqrt{\frac{\mu}{T}}$.

Καθώς τα δύο άκρα είναι ελεύθερα σε αυτά πρέπει να μηδενίζεται η δύναμη $F=T\frac{\partial \xi}{\partial x}$ δηλαδή η παράγωγος του πλάτους. Εφαρμόζοντας στο πρόβλημά μας

$$A'(-L)=0\Rightarrow -k\,C\sin(-k\,L)+kD\cos(-k\,L)=0\Rightarrow$$

$$k\,C\sin(k\,L)+kD\cos(k\,L)=0 \qquad (3)$$

$$A'(2L)=0\Rightarrow -k\,C\sin(2k\,L)+kD\cos(2k\,L)=0 \qquad (4)$$

Για να έχει λύση το παραπάνω ομογενές σύστημα ως προς C,D θα πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών

$$\det\begin{vmatrix}\sin(kL) & \cos(kL)\\ -\sin(2kL) & \cos(2kL)\end{vmatrix}=0\Rightarrow \sin(k\,L)\cos(2kL)+\sin(2kL)\cos(kL)=0\Rightarrow$$

$$\sin(3k\,L)=0\Rightarrow 3k_n L=n\,\pi, n=1,2\ldots \ (5)$$

όπου εισάγαμε το δείκτη n για να περιγράψουμε τις διακριτές τιμές. Συνεπώς

$$3\omega_n\sqrt{\frac{\mu}{T}}L = \pi n \Rightarrow \omega_n = n\frac{\pi}{3L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n = 1, 2\ldots \Rightarrow f_n = \frac{n}{6L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n = 1, 2\ldots$$

Η λύση με $\omega = 0$ δεν αντιστοιχεί σε ταλάντωση καθώς σε αυτήν την περίπτωση η γενική λύση της κυματικής δεν είναι η (1).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η ένταση ενός ηχητικού κύματος δίνεται από $I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2\rho\upsilon}$. Εφόσον οι ιδιότητες του μέσου διάδοσης (αέρα) δεν μεταβάλλονται τα ρ και υ παραμένουν σταθερά και επομένως

(α) Το πλάτος μετατόπισης αυξάνεται κατά ένα παράγοντα $\sqrt{2}$

(β) Το πλάτος πίεσης αυξάνεται κατά ένα παράγοντα $\sqrt{2}$

(γ) Το επίπεδο έντασης δίνεται από $\beta = 10\text{dB}\log\frac{I}{I_0}$ επομένως το νέο επίπεδο είναι $\beta' = 10\text{dB}\log\frac{2I}{I_0} = 10\text{dB}\log\frac{I}{I_0} + 10\text{dB}\log 2 = \beta + 3.0\text{dB}$ αυξάνεται δηλαδή κατά 3.0dB.

2) Από το σχήμα η διάμετρος του κύκλου είναι ~ λ/10. Άρα στον φλοίσβο το ύψος του νερού που «σκάει» στην παραλία είναι ~ 20 cm, ενώ στο τσουνάμι είναι ~ 20 m.

3) Οι συχνότητες των αρμονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ανάλογες της ταχύτητας του ήχου στο αέριο του σωλήνα. Η ταχύτητα του ήχου σε ένα (ιδανικό) αέριο δίνεται από

$$\upsilon = \sqrt{\gamma RT / M}$$

όπου $\gamma = 1.4$ για τον αέρα και $\gamma = 5/3 = 1.67$ για το Ήλιο και M η γραμμομοριακή μάζα του αερίου που είναι 0.029 kg/mol για τον αέρα (μέση τιμή) και 0.004kg/mol για το Ήλιο. Επομένως η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο Ήλιο είναι μεγαλύτερη και μεγαλύτερη θα είναι και η συχνότητα που θα παράγει ο σωλήνας.

4)

(Α) Για $\omega = \omega_0$ έχουμε $\upsilon = \infty$ και $\upsilon_g = 0$

(Β) Για μεγάλες συχνότητες $\upsilon = \upsilon_g$

(Γ) Εφόσον $\upsilon_g < \upsilon$ για μικρές συχνότητες εχουμε ομαλή διασπορά ενώ για μεγάλες συχνότητες δεν έχουμε διασπορά.

(Δ)Δεν διαδίδονται κύματα για συχνότητες $\omega < \omega_0$

5) Από τη σχέση Doppler $f' = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f$, όπου $\upsilon = 340\text{m/s}$ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, υπολογίζουμε την ταχύτητα του αεροπλάνου, $\upsilon_s = 850\,\text{m/s} \approx 2.5\upsilon$ (2.5 Mach). Έχουμε δηλαδή υπερηχητικό αεροπλάνο και κύμα Mach, επομένως όταν το αεροπλάνο πλησιάζει τον παρατηρητή αυτός δεν ακούει το ηχητικό σήμα που εκπέμπει.