19/11/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2009-10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 2ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 22/12/09

Άσκηση 1

Η γενική μορφή ενός ΗΜ κύματος δίνεται από

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) \qquad (1)$$

Α) Το μέτρο του πλάτους πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από

$$E_0 = \left|\left(-4\hat{x} + \sqrt{20}\hat{y}\right)\times 10^4 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)\right| = \sqrt{4^2+20}\times 10^4 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) = 6\times 10^4 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Β) Η διεύθυνση διάδοσης είναι αυτή του κυματανύσματος το οποίο δίνεται σύμφωνα με την (1) από

$$\vec{k} = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}\hat{x} + 2\hat{y}\right)\times 10^7\,\text{m}^{-1}$$

Γ) Έχουμε

$$\lambda = \frac{2\pi}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}\times 10^7 \times \sqrt{5+2^2}}\,\text{m=}2\times 10^{-7}\,\text{m=0.2μm}$$

$$\text{f=}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.42\times 10^{15}}{2\pi}s^{-1} = 1.5\times 10^{15}s^{-1}$$

Δ) Από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$10^4 \times \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^7 - 9.42\times 10^{15}t\right] & \sqrt{20}\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^7 - 9.42\times 10^{15}t\right] & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -10^{11} \times \left[\frac{\pi}{3}(10+8)\right] \times \hat{z}\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] \Rightarrow$$

$$\vec{B} = -6\pi\,\hat{z}\times 10^{11}\int dt\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] + \vec{f}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \hat{z}\frac{6\pi\times 10^{11}}{9.42\times 10^{15}}\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] + \vec{f}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\vec{B} = 2.00\times 10^{-4}\ \ \hat{z}\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] + \vec{f}(x,y,z)$$

Καθώς όμως δίνεται ότι πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικό κύμα και άρα συνάρτηση του $\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$, η αυθαίρετη συνάρτηση $\vec{f}(x,y,z)$ δεν μπορεί παρά να είναι μια σταθερά η οποία αντιστοιχεί σε στατικό πεδίο και μπορούμε να την επιλέξουμε ίση με μηδέν. Επομένως το μαγνητικό πεδίο δίνεται από

$$\vec{B} = 2.00\times 10^{-4}\ \mathrm{T}\ \hat{z}\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right]$$

E)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = 1.59\times 10^{6}\frac{W}{m^2}\times$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -4\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] & \sqrt{20}\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right] \end{vmatrix}$$

$$= 3.18\times 10^{6}\left(\sqrt{5}\hat{x}+2\hat{y}\right)\frac{W}{m^2}\sin^2\left[\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\times 10^{7} - 9.42\times 10^{15} t\right]$$

Άσκηση 2

(Α) Αντικαθιστούμε τις δοθείσες εκφράσεις στις εξισώσεις του Maxwell στο κενό. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{B}} = 0$ ικανοποιούνται αυτόματα. Για τις άλλες δύο εξισώσεις έχουμε

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} =$$

$$= -2E_0 k\cos\left(2kz - 2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + \left\{2E_0\cos^2(kz-\omega t) - 2E_0 k\sin^2(kz-\omega t)\right\}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -2E_0 k\sin(2kz-2\omega t)\hat{x} + 2E_0 k\cos(2kz-2\omega t)\hat{y} \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 2\frac{E_0\omega}{c}\cos\left(2kz - 2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + 2\frac{E_0\omega}{c}\sin\left(2kz - 2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -2\frac{E_0\omega}{c}\sin(2kz - 2\omega t)\hat{x} + 2\frac{E_0\omega}{c}\cos(2kz - 2\omega t)\hat{y} \quad (2)$$

Από τη δεδομένη σχέση $\omega = ck$ και τις (1), (2) βρίσκουμε $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Επίσης,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y} =$$

$$= -2\frac{E_0 k}{c}\sin\left(2kz - 2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + 2\frac{E_0 k}{c}\cos\left(2kz - 2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = -2\frac{E_0 k}{c}\cos(2kz - 2\omega t)\hat{x} - 2\frac{E_0 k}{c}\sin(2kz - 2\omega t)\hat{y} \quad (3)$$

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{z} =$$

$$= \frac{2E_0}{c^2}\left\{-\omega\cos^2(kz - \omega t) + \omega\sin^2(kz - \omega t)\right\}\hat{x} - \frac{2E_0}{c^2}\omega\cos\left(2kz - 2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{2E_0}{c^2}\omega\cos(2kz - 2\omega t)\hat{x} - \frac{2E_0}{c^2}\omega\sin(2kz - 2\omega t)\hat{y} \qquad (4)$$

Από τη δεδομένη σχέση $\omega = ck$ και τις (3), (4) βρίσκουμε $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

(Β) Απλοποιώντας τις σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0\sin(2kz - 2\omega t)\hat{x} - E_0\cos(2kz - 2\omega t)\hat{y} \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{c}\cos(2kz - 2\omega t)\hat{x} + \frac{E_0}{c}\sin(2kz - 2\omega t)\hat{y} \end{aligned} \qquad (5)$$

από τις οποίες προκύπτει $f = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}$ και $\lambda = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$.

(Γ) Από την σχέση (5) μπορούμε εύκολα να βρούμε (σχεδιάζοντας τα διανύσματα Ε, Β στη θέση z=0 για χρόνους $t = 0, \quad \pi/4\omega, \ \pi/2\omega, \ \pi/\omega$) ότι πρόκειται για δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο Η/Μ κύμα.

Άσκηση 3

(Α) Από την εξίσωση 19.39 των A-F έχουμε την εκπεμπόμενη ένταση σαν συνάρτηση της γωνίας θ, που ορίζεται από την ταχύτητα και την διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας

$$I(\theta) = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2}\sin^2(\theta).$$

Από την γεωμετρία που φαίνεται στο σχήμα έχουμε:

$$\sin^2(\theta) = \frac{R^2}{R^2 + h^2} \text{ και } r = \sqrt{R^2 + h^2}$$

Επίσης η μέση ένταση προκύπτει από την μέση τιμή της επιτάχυνσης κατά την διάρκεια της ταλάντωσης που είναι

$$\left\langle a^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\omega^4 d^2$$

Επίσης ζητάμε την ισχύ της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας του δαπέδου, οπότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον παράγοντα

$$\cos(\theta) = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$I(\theta) = \frac{q^2 \frac{1}{2}\omega^4 d^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 (R^2 + h^2)} \frac{R^2}{R^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \Rightarrow$$

$$I(\theta) = \frac{q^2 \omega^4 d^2 h}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{R^2}{\left(R^2 + h^2\right)^{5/2}}$$

Μέγιστο έχουμε εκεί που η παράγωγος του $I(\theta)$ μηδενίζεται το οποίο συμβαίνει στο σημείο $R = h\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(Β) Ολοκληρώνουμε σε όλο το επίπεδο και έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = \int I(\theta) dA = 2\pi \int_0^\infty I(\theta) R dR \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi \frac{q^2 \omega^4 d^2 h}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{R^2}{\left(R^2 + h^2\right)^{5/2}} R dR =$$

$$\frac{q^2 \omega^4 d^2}{16\pi c^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{x^3}{\left(x^2 + 1\right)^{5/2}} dx = \frac{q^2 \omega^4 d^2}{24\pi c^3 \varepsilon_0}$$

Η ολική μέση ακτινοβολούμενη ενέργεια προκύπτει από την σχέση 19.41 του A-F και είναι:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{average} = \frac{q^2 \omega^4 d^2}{12\pi c^3 \varepsilon_0}$$

Παρατηρούμε ότι η προσπίπτουσα ισχύ πάνω στην επιφάνεια του πατώματος είναι το μισό της ολικής ακτινοβολούμενης ισχύς. Έτσι και πρέπει να είναι εφόσον το επίπεδο καλύπτει το μισό της συνολικής στερεάς γωνίας γύρω από το φορτίο.

Γ)Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη ανά πάσα χρονική στιγμή στο ταλαντούμενο φορτίο είναι

$$E = \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = kd \frac{dd}{dt}$$

Αντικαθιστούμε την συνολική αντινοβολούμενη ενέργεια και έχουμε

$$-\frac{q^2\omega^4 d^2}{12\pi c^3\varepsilon_0} = kd\frac{dd}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{q^2\omega^4}{12\pi c^3\varepsilon_0 k} d$$

Η διαφορική εξίσωση έχει λύση

$$d = d_0 \exp\left(-\frac{q^2\omega^4}{12\pi c^3\varepsilon_0 k} t\right)$$

Άσκηση 4

Α) Η εκπεμπόμενη ισχύς δίνεται από τη σχέση (19.24) του βιβλίου των Alonso και Finn

$$I(\theta) = \frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta$$

Η εκπεμπόμενη ισχύς στον ζητούμενο κώνο θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$P_\kappa = \int_{\kappa\omega\nu o\varsigma} dS\, I(\theta) = \int_{-x/2}^{+x/2} d\varphi \int_{\pi/2-x/2}^{\pi/2+x/2} d\theta\, r^2 \sin\theta = \frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_{-x/2}^{+x/2} d\varphi \int_{\pi/2-x/2}^{\pi/2+x/2} d\theta \sin\theta\sin^2\theta$$

$$= -\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_{-x/2}^{+x/2} d\varphi \int_{\pi/2-x/2}^{\pi/2+x/2} d\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right) = -\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3} x\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=\pi/2-x/2}^{\theta=\pi/2+x/2}$$

$$= -\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3} x\left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3} x\left[-\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin^3\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin^3 x\right] = \frac{\Pi_0^2\omega^4}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} x\left[\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{x}{2}\right]$$

Όπου στην ολοκλήρωση χρησιμοποιήσαμε στο στοιχειώδες εμβαδό σε σφαίρα ακτίνας r που δίνεται από $dS = r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta$.

Β) Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την ολική ισχύ

$$P_{o\lambda} = \frac{\Pi_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

βρίσκουμε

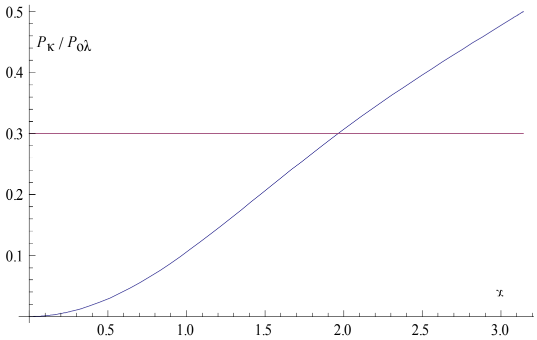
$$\frac{P_\kappa}{P_{o\lambda}} = \frac{3}{4\pi} x\left[\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{x}{2}\right] = \frac{3}{4\pi} x\sin\frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\sin^2\frac{x}{2}\right]$$

Επιλύοντας γραφικά

$$\frac{P_\kappa}{P_{o\lambda}} = 30\%$$

(βλ Σχήμα) βρίσκουμε

$x = x \approx 1.96 \approx 112.5^\circ$



Άσκηση 5

Από την εξίσωση 18.59 του βιβλίου Alonso-Finn έχουμε για την ταχύτητα ομάδας:

$$\upsilon_g = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} \quad (1)$$

Από την εξίσωση 19.56 του βιβλίου Alonso-Finn έχουμε για την ταχύτητα φάσης:

$$\upsilon = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + B/\lambda^2} = \frac{c}{A + Bk^2/\left(4\pi^2\right)} \quad (2)$$

Όπου αντικαταστήσαμε $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\upsilon_g = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon - k\frac{c}{\left[A + Bk^2/\left(4\pi^2\right)\right]^2}\frac{2Bk}{4\pi^2} = \frac{c}{A + B/\lambda^2} - \frac{2cB\lambda^2}{\left(A + B/\lambda^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(A - B/\lambda^2\right)}{\left(A + B/\lambda^2\right)^2}c = \frac{\lambda^2\left(A\lambda^2 - B\right)}{\left(A\lambda^2 + B\right)^2}c$$

Άσκηση 6

Αν $n(y)$ ο δείκτης διαθλάσεως, τότε κατά τον νόμο του Snell (βλ. ΑΦ-20.31),

$$n(y)\sin\theta(y) = n_1 \sin\theta_1 = C \qquad (1)$$

όπου, για την δέσμη στην θέση του ματιού του παρατηρητή,

$$n_1 = 1.0002926,\ \tan\theta_1 = \frac{x_1}{y_1} = \frac{200m}{2m} = \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1}} \Rightarrow \sin\theta_1 = 0.99995,$$

$$C = 1.00024$$

Τοπικά, για λεπτό στρώμα αέρος κοντά στο έδαφος, στο οποίον η δέσμη εισέρχεται υπό γωνίαν θ,

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{ax^2+b^2}}{dx} = \frac{ax}{y} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta(y)}}{\sin\theta(y)}$$

Αντικαθιστώντας το x από την δεδομένη εξίσωση της υπερβολής και το $\sin\theta(y)$ από την (1), έχουμε

$$n(y) = C\sqrt{1 + a\left(1 - \frac{b^2}{y^2}\right)}$$

Από την εξίσωση της υπερβολής για τα δεδομένα σημεία από όπου περνάει (γραμμικό σύστημα ως προς $\left(a, b^2\right)$), έχουμε

$$\left.\begin{aligned} a{x_0}^2 + b^2 &= {y_0}^2 \\ a{x_1}^2 + b^2 &= {y_1}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= \frac{{y_1}^2 - {y_0}^2}{{x_1}^2 - {x_0}^2} \\ b^2 &= \frac{{y_0}^2{x_1}^2 - {y_1}^2{x_0}^2}{{x_1}^2 - {x_0}^2} \end{aligned}\right\}$$

που για $\left(x_0 = 0, y_0 = 0.2m\right)$ δίνει $b = y_0$

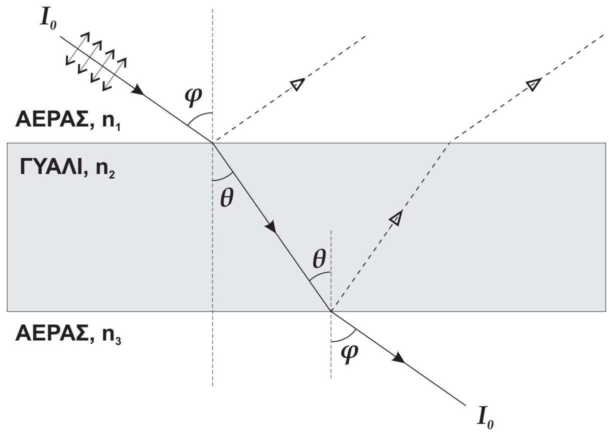
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα, $\left(a = 0.99 \times 10^{-4}, b = 0.2m\right)$

Άρα, για να ακολουθεί η ακτίνα την ως άνω υπερβολική τροχιά, ο δείκτης διαθλάσεως πρέπει να μεταβάλλεται ως

$$n(y) = 1.00024\sqrt{1 + 0.99\times 10^{-4}\left(1 - \frac{0.2^2\ m^2}{y^2}\right)} = 1.0024\sqrt{1 - \frac{3.96\times 10^{-6}\ m^2}{y^2}}\ .$$

Η υπερβολή, ως τροχιά, δεν είναι ρεαλιστική διότι οδηγεί σε $n<1$ αν η $n(y)$ επεκταθεί αρκετά κάτω του ελαχίστου της τροχιάς ($y<2.8\text{cm}$) .

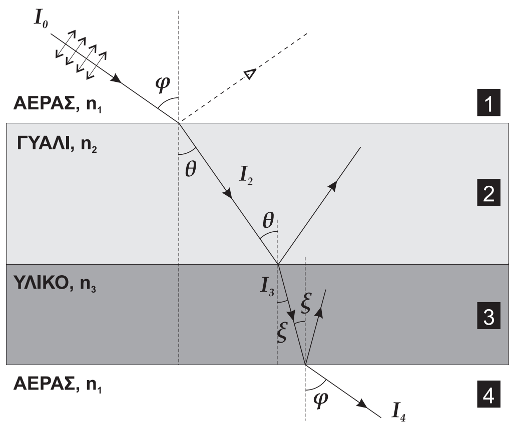
Άσκηση 7



(Α) Αφού η ένταση της διαθλώμενης δέσμης είναι ίση με της προσπίπτουσας, οι συντελεστές ανάκλασης στις δύο διαχωριστικές επιφάνειες είναι $R_{12}=R_{23}=0$. Αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο πόλωσης της αρχικής δέσμης είναι παράλληλο στο επίπεδο πρόσπτωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Διαφορετικά, αν υπήρχε κάθετη συνιστώσα στην αρχική δέσμη, θα έπρεπε να υπήρχε και ανακλώμενη δέσμη καθώς ο συντελεστής ανάκλασης της κάθετης συνιστώσας πόλωσης δεν μηδενίζεται ποτέ.

(Β) Εφόσον δεν υπάρχει ανακλώμενη δέσμη, η γωνία $\varphi=55^\circ$ είναι η γωνία ολικής πόλωσης (Brewster), οπότε έχουμε

$\tan\varphi = n_2/n_1 \Rightarrow n_2 = \tan\varphi = 1.43$



(Γ) Για τις γωνίες φ και θ έχουμε $\varphi=55^\circ$, $\theta=90^\circ-\varphi=35^\circ$, ενώ από τον νόμο του Snell υπολογίζουμε τη γωνία ξ,

$n_2\sin\theta = n_3\sin\xi \Rightarrow \sin\xi = \dfrac{n_2}{n_3}\sin\theta$, οπότε

$\xi = 19.8106^\circ$.

Η ένταση ενός Η/Μ κύματος δίνεται από τη σχέση 19.16

$I=\upsilon\varepsilon E^2$, όπου υ η ταχύτητα διάδοσης στο υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε και E το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου. Η σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί ως

$$I = \upsilon\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\varepsilon_0 E^2 = \upsilon\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 = \upsilon n^2\varepsilon_0 E^2 = (\upsilon n)n\varepsilon_0 E^2 = cn\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow I = n\varepsilon_0 cE^2$$

όπου κάναμε χρήση της σχέσης 19.57 $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=\sqrt{\varepsilon_r}$ (θεωρώντας ότι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου είναι $\mu_r=1$) και της γνωστής σχέσης $n=c/\upsilon$.

Άρα λοιπόν για διέλευση από το μέσο 1 στο 2 έχουμε:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2\varepsilon_0 cE_{r,\pi}{}^2}{n_1\varepsilon_0 cE_{i,\pi}{}^2} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{r,\pi}}{E_{i,\pi}}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}T_{12}{}^2 \Rightarrow I_2 = \frac{n_2}{n_1}T_{12}{}^2 I_1$$

όπου T_{12} ο συντελεστής διάθλασης (μετάδοσης) που δίνεται από τη σχέση 20.25

$$T_{12} = \frac{2n_1 \cos\varphi}{n_1 \cos\theta + n_2 \cos\varphi},$$

Επίσης για τις διέλευση από 2 προς 3 και από 3 προς 4, αγνοώντας πολλαπλές ανακλάσεις, έχουμε αντίστοιχα

$$T_{23} = \frac{2n_2 \cos\theta}{n_2 \cos\xi + n_3 \cos\theta},\ T_{34} = \frac{2n_3 \cos\xi}{n_3 \cos\varphi + n_1 \cos\xi},$$

και με αντικατάσταση:

$$T_{12} = 0.6998,\ T_{23} = 0.7045,\ T_{34} = 1.9543$$

Η ένταση της τελικής εξερχόμενης δέσμης είναι λοιπόν

$$I_4 = \frac{n_4}{n_3} T_{34}{}^2 I_3 = \frac{n_4}{n_3} T_{34}{}^2 \left(\frac{n_3}{n_2} T_{23}{}^2 I_2 \right) = \frac{n_4}{n_3} T_{34}{}^2 \frac{n_3}{n_2} T_{23}{}^2 \left(\frac{n_2}{n_1} T_{12}{}^2 I_1 \right) \Rightarrow I_4 = T_{12}{}^2 T_{23}{}^2 T_{34}{}^2 I_0$$

και με αντικατάσταση, $I_4 = 0.928 I_0$.

Άσκηση 8

Α) Η δύναμη που ασκείται στο σκάφος είναι στην ακτινική κατεύθυνση από τον ήλιο και είναι ίση με $f = 2uA$ στην γειτονιά της Γης, όπου u η πυκνότητα ενέργειας που είναι ίση με $u = I/c$. Αρα η δύναμη είναι ίση με $f = 2IA/c = 2 \cdot 1400W/m^2 \cdot 10m^2 / 3 \cdot 10^8 m/s \approx 93\mu N$. Η επιτάχυνση είναι $a = 9.3 \cdot 10^{-7} ms^{-2}$, ο χρόνος του ταξιδιού (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση) $t=2.8x10^7s$, δηλ περίπου ένα έτος ενώ η ταχύτητα όταν φθάνει στη σελήνη $υ=26ms^{-1}$.

Β) Για πλάγια πρόσπτωση η πίεση της ακτινοβολίας πολλαπλασιάζεται επί cosθ λόγω της αντίστοιχης μείωσης της επιφάνειας. Για να βρούμε την δύναμη στην κατεύθυνση της ευθείας γης-σελήνης πρέπει να πολλαπλασιάσουμε επί cosθ ξανά. Άρα η δύναμη ώσης είναι $f' = f\cos^2\theta = f/2$ και ο χρόνος μεγαλώνει κατά ένα παράγοντα $\sqrt{2} \approx 1.4$.

Άσκηση 9

Α) Στον πολωτή 1 πέφτει φυσικό φως, που έχει τυχαία πόλωση. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Malus και παίρνοντας μέση τιμή ως προς τις γωνίες βρίσκουμε την εξερχόμενη από τον πρώτο πολωτή ένταση

$$I_1 = I_0 \left\langle \cos^2\varphi \right\rangle = \frac{I_0}{2} \qquad (1)$$

η οποία προσπίπτει στον πολωτή 2. Εφαρμόζοντας ξανά το νόμο του Malus βρίσκουμε την εξερχόμενη από το δεύτερο πολωτή ένταση

$$I_2 = I_0 \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{I_0}{4}$$

Β) Λόγω της μέσης τιμής στη σχέση (1) δεν έχει σημασία η γωνία του άξονα του πολωτή 1 με την κατακόρυφο. Το προσπίπτον φως είναι φυσικά πολωμένο άρα όλες οι διευθύνσεις του πολωτή 1 είναι ισοδύναμες. Κατά την πρόσπτωση στον πολωτή 2 η γωνία μεταξύ των 1 και 2 είναι ίδια με το ερώτημα (Α) και το αποτέλεσμα είναι λοιπόν το ίδιο και ίσο με $\frac{I_0}{4}$.

Γ) Μετά την εισαγωγή του πολωτή μπροστά από τον κύλινδρο από αυτόν σύμφωνα με το ερώτημα (Α) εξέρχεται φως έντασης $\frac{I_0}{2}$. Έστω ότι ο άξονας του πρόσθετου πολωτή σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα του πολωτή 1 του κυλίνδρου τότε το εξερχόμενο από τον κύλινδρο φως θα έχει ένταση

$$I' = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{I_0}{4}\cos^2\theta$$

Εφαρμόζοντας τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε

$$I' = \frac{I_0}{4}\cos^2\theta = \frac{I_0}{20} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 63.4^\circ$$

Άσκηση 10

Η διαφορά φάσης που προκύπτει από πλακίδιο πάχους d δίνεται από (βλ σελ 163 βιβλίου Alonso –Finn)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_1 - n_2\right)d$$

Για το χαλαζία έχουμε (βλ Πίνακας 20-2 βιβλίου Alonso –Finn) $n_1 = 1.5533, n_2 = 1.5442$. Συνεπώς για διαφορά φάσης $\lambda/4$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(n_1 - n_2\right)d = \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}, n = 0,1,2,\ldots$$

και

$$d = \left(2n+1\right)\frac{1}{4}\frac{\lambda}{\left(n_1 - n_2\right)}, n = 0,1,2,\ldots$$

Ελάχιστο πάχος θα έχουμε για $n = 0$, επομένως

$$d = \frac{1}{4}\frac{590\times10^{-9}}{\left(1.5533 - 1.5442\right)} = \frac{1}{4}\frac{590\times10^{-9}}{0.0091} = 1.62\times10^{-5}m = 16.2\mu\text{m}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Από τον νόμο του Snell, $\sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 / n_2$. Αν $n_2 > n_1$, τότε $\theta_2 < \theta_1$ (πλησιέστερα προς την κάθετο). Αλλά το ανομοιογενές μέσον μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πολλά στρώματα απειροστού πάχους το καθένα, με αυξανόμενο δείκτη διαθλάσεως. Επομένως το φως κάμπτεται όλο και περισσότερο (βλ. ΑΦ-Παράδειγμα 20.8)

2) Από το πρώτο μέρος του πειράματος προκύπτει ότι ο οπτικός άξονας είναι είτε παράλληλος είτε κάθετος στην επιφάνεια ΑΒ. Επειδή η πρόσπτωση είναι κάθετη, και οι δύο δέσμες (έκτακτη και τακτική) θα έχουν την ίδια διεύθυνση είτε έχουν ίδιους δείκτες διάθλασης (ΟΑ⊥ΑΒ) είτε διαφορετικούς (ΟΑ//ΑΒ). Στο δεύτερο μέρος του πειράματος, εφόσον και οι δύο δέσμες έχουν την ίδια εκτροπή, συμπεραίνουμε ότι έχουν ίδιους δείκτες διάθλασης, άρα ΟΑ⊥ΑΒ.

3) Ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι 1.0002926. Επομένως η ταχύτητα του φωτός στην ατμόσφαιρα είναι $\upsilon = c/1.0002926\ c/1.0002926$. Η διαφορά χρόνου που προκύπτει ακόμη και αν θεωρήσουμε την ατμόσφαιρα να εκτείνεται σε 1000Km ύψος είναι

$$\Delta t = \frac{1000 \times 10^3}{3 \times 10^8} \times \left(1.0002926 - 1\right) \approx 10^{-6} s = 1\mu\text{s}$$

άρα είναι αμελητέα.

4) Η σωστή απάντηση είναι το (α). Ένα μέρος από την προσπίπτουσα ακτινοβολία στην θάλασσα διαθλάται και εισέρχεται στο νερό ενώ το υπόλοιπο ανακλάται. Από το πρώτο τμήμα γίνεται απορρόφηση από τον ύφαλο και επανεκπομπή-έτσι βλέπουμε την ξέρα. Δεδομένου ότι το αρχικό φως δεν έχει κάποια συγκεκριμένη πόλωση, το φως από τον ύφαλο δεν είναι πολωμένο. Το ανακλώμενο τμήμα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι πολωμένο κάθετα στο επίπεδο ανάκλασης. Τα πολωτικά γυαλιά απορροφούν αυτή την ανακλώμενη ακτινοβολία από την επιφάνεια της θάλασσας και κατά συνέπεια διευκολύνουν την πιο ευκρινή παρατήρηση της ξέρας.

5) Σύμφωνα με το νόμο του Snell, για διάδοση από το υλικό με δείκτη διάθλασης n_1 σε αυτό με δείκτη διάθλασης n_2, η γωνία που σχηματίζει η διαθλώμενη ακτίνα με την κάθετο δίνεται από $\theta_r = \arcsin\left[\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_i\right]$. Όταν $n_2 > n_1$ (πυκνότερο προς αραιότερο) υπάρχει προσπίπτουσα γωνία θ_i για την οποία $\left[\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_i\right] > 1$ και ως εκ τούτου δεν υπάρχει η γωνία θ_r. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν $n_1 > n_2$ όπου έχουμε $\left[\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_i\right] \le 1$ για οποιοδήποτε θ_i.