5/1/2009

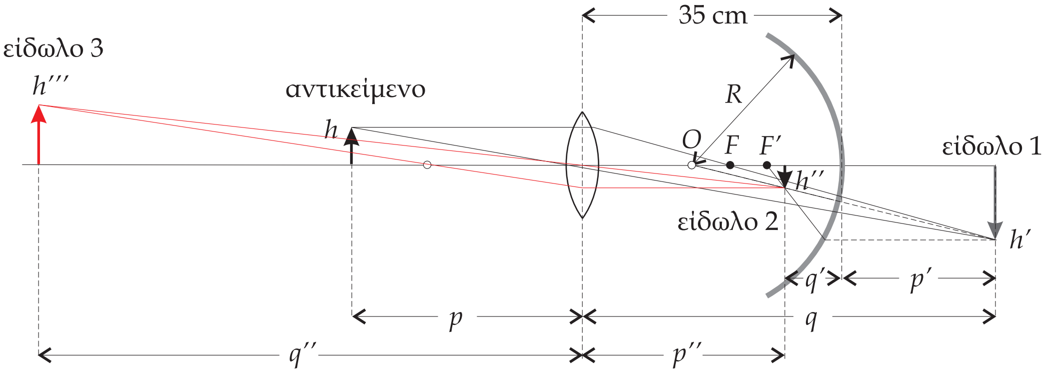
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2009-10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 9/2/09

Άσκηση 1



Από την εξίσωση των φακών έχουμε

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow q=\frac{pf}{p-f}=\frac{30\times 20}{30-20}cm=60cm>0$, άρα το είδωλο εμφανίζεται σε απόσταση 90cm από το αντικείμενο και είναι πραγματικό αφού q>0. Η μεγέθυνση είναι $M=-\frac{q}{p}=-\frac{60}{30}=-2$, άρα το ύψος του ειδώλου είναι $h'=M\cdot h=-10cm$.

Εφόσον το κάτοπτρο είναι κοίλο, σύμφωνα με τη γενική σύμβαση ισχύει $f'=\frac{R}{2}>0$, όπου f' η εστιακή απόσταση του κατόπτρου. Παρατηρούμε ότι το είδωλο του φακού (που αποτελεί αντικείμενο για το κάτοπτρο) βρίσκεται 25cm δεξιά από το κάτοπτρο, άρα σύμφωνα με τη γενικευμένη σύμβαση θέτουμε $p'=-25cm$, οπότε βρίσκουμε

$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow q'=\frac{p'f'}{p'-f'}=\frac{-25\times 10}{-25-10}cm=\frac{250}{35}cm=7.14cm>0$, δηλαδή το είδωλο 2 είναι πραγματικό. Η μεγέθυνση του κατόπτρου είναι $M'=-\frac{q'}{p'}=0.2857$. Άρα το ύψος του ειδώλου 2 είναι $h''=M\cdot M'\cdot h=-2.86cm$ (ανεστραμμένο).

Εφόσον οι ακτίνες έχουν ανακλαστεί στο κάτοπτρο και κινούνται προς το φακό, το είδωλο 2 θα αποτελέσει αντικείμενο για τον φακό και θα υπάρχει ακόμα ένα είδωλο 3 όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση του ειδώλου 2 από το φακό είναι $q''=35\text{cm}-q'=27.86\text{cm}$, άρα από την εξίσωση των φακών έχουμε

$\frac{1}{p''}+\frac{1}{q''}=\frac{1}{f} \Rightarrow q''=\frac{p''f}{p''-f}=\frac{27.86\times 20}{27.86-20}cm=70.9cm$, άρα το είδωλο 3 είναι πραγματικό και βρίσκεται 40.9 cm αριστερά από το αντικείμενο. Η μεγέθυνση από το

φακό είναι $M'' = -\dfrac{q''}{p''} = -2.54$, άρα το ύψος του ειδώλου 3 είναι
$h''' = hM \cdot M' \cdot M'' = 7.26cm$ (ορθό).

Άσκηση 2

Α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (Μ.12) του Παραρτήματος Ι, έπειτα τις σχέσεις (21.30) και (21.27),(21.28), μετά τη σχέση (Μ7) του Παραρτήματος Ι και τέλος τη σχέση (21.29) του βιβλίου των Alonso και Finn

$$\sin\frac{\delta+A}{2}\cos\frac{i-i'}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\delta+A-i+i'}{2}\right)+\sin\left(\frac{\delta+A+i-i'}{2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin i'+\sin i\right)=\frac{n}{2}\left(\sin r+\sin r'\right)$$
$$=n\sin\left(\frac{r+r'}{2}\right)\cos\left(\frac{r-r'}{2}\right)=n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{r-r'}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\sin\frac{\delta+A}{2}=n\sin\frac{A}{2}\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-i'}{2}} \qquad (1)$$

Β) Για να μην εξέρχονται οι ακτίνες θα πρέπει να έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση στην απέναντι (από την πλευρά πρόσπτωσης) πλευρά του πρίσματος, γεγονός που συμβαίνει, σύμφωνα με την (21.28), όταν

$$\sin r' \geq \frac{1}{n} \quad (2)$$

ενώ σύμφωνα με την (21.29)

$$r = A - r' \; (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (Μ.5)

$$\sin r = \sin(A-r') = \sin A\cos r' - \cos A\sin r' \; (4)$$

η οποία παραγωγίζοντας $\dfrac{d\sin r}{dr'} = -\sin A\sin r' - \cos A\cos r' < 0$, διαπιστώνουμε ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση του r' για $r' > 0$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας την ελάχιστη τιμή του r' από την (2) στην (4)

$$\sin(r) \leq \sin(A)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \cos A\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2-1}\ \sin(A) - \cos(A)\right)$$

Και χρησιμοποιώντας την (21.27) του βιβλίου των Alonso και Finn προσδιορίζουμε την περιοχή γωνιών πρόσπτωσης στην οποία έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση στο πρίσμα

$$\sin i = n\sin r \leq \sqrt{n^2-1}\ \sin A - \cos A$$

Για $i \geq 0$ τελευταία σχέση εισάγει περιορισμό μόνο στην περίπτωση

$$\sqrt{n^2-1}\ \sin A - \cos A \geq 0 \Rightarrow \tan A \geq \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

διαφορετικά δεν υπάρχει περιοχή γωνιών για τις οποίες έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση.

Άσκηση 3

Α) Ως χρωματικό σφάλμα (ή χρωματική εκτροπή) ενός φακού ορίζεται η ποσότητα $A = f_C - f_F$, όπου f_C, f_F οι εστιακές αποστάσεις που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος των C και F γραμμών Fraunhofer αντίστοιχα. Η εστιακή απόσταση ενός φακού δίνεται από τη σχέση (21.17)

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \quad (1)$$

όπου r, r' οι δύο ακτίνες καμπυλότητας. Για τον επιπεδόκυρτο φακό από πυριτύαλο έχουμε $r = r_1$ και $r' \to \infty$, οπότε

$$f_1 = \frac{r_1}{n_1 - 1} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση των τιμών $n_{1C} = 1.622$ και $n_{1F} = 1.639$ για πυριτύαλο του Πίνακα 21-3 βρίσκουμε $f_{1C} = 0.3215\,\text{m}$ και $f_{1F} = 0.3130\,\text{m}$, οπότε $A_1 = f_{1C} - f_{1F} = 0.0086\,\text{m}$.

Β) Από το παράδειγμα 21.9 γνωρίζουμε ότι η εστιακή απόσταση F συστήματος δύο φακών που βρίσκονται σε επαφή είναι

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

Η εστιακή απόσταση του αμφίκοιλου φακού από στεφανύαλο είναι (με αντικατάσταση $r = -r_1$ και $r' = r_2$ στην (1))

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow f_2 = \frac{1}{1-n_2}\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \quad (4)$$

Υπολογίζοντας τα f_1, f_2 για τη γραμμή D ($n_{1D} = 1.627$ και $n_{2D} = 1.517$) βρίσκουμε $f_{1D} = 0.3190\,\text{m}$ και $f_{2D} = -0.2321\,\text{m}$. Με αντικατάσταση στην (3), $F_D = -0.8523\,\text{m}$.

Γ) Το χρωματικό σφάλμα του συστήματος είναι

$$A = F_C - F_F \quad (5)$$

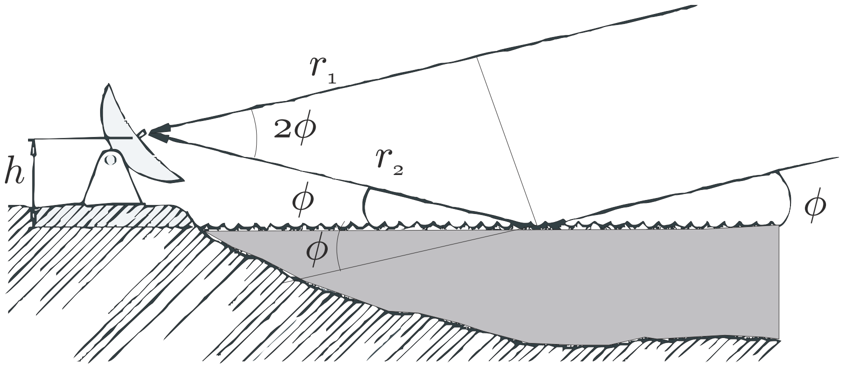
όπου F_C, F_F οι εστιακές αποστάσεις του συστήματος των φακών που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος των C και F γραμμών Fraunhofer αντίστοιχα. Από την (3) έχουμε

$$\frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_{1C}} + \frac{1}{f_{2C}} \text{ και } \frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_{1F}} + \frac{1}{f_{2F}} \quad (6)$$

Τα $f_{1C} = 0.3215\,\text{m}$ και $f_{1F} = 0.3130\,\text{m}$ έχουν υπολογιστεί από το Α). Μένει να βρούμε με τον ίδιο τρόπο τα f_{2C} και f_{2F} για τον αμφίκοιλο φακό από στεφανύαλο. Με αντικατάσταση των τιμών $n_{2C} = 1.514$ και $n_{2F} = 1.524$ για στεφανύαλο του Πίνακα 21-3 στη σχέση (4) βρίσκουμε $f_{2C} = -0.2335\,\text{m}$ και $f_{2F} = -0.2290\,\text{m}$. Με αντικατάσταση των τιμών στις σχέσεις (6) βρίσκουμε $F_C = -0.8523\,\text{m}$ και $F_F = -0.8535\,\text{m}$, οπότε $A = F_C - F_F = 0.0012\,\text{m}$.

Παρατηρούμε ότι $A < A_1$, άρα η μέθοδος αυτή για την μείωση του χρωματικού σφάλματος του φακού από πυριτύαλο είναι αποτελεσματική.

Άσκηση 4



Η διαφορά δρόμου μεταξύ των δύο κυμάτων, με βάση το Σχήμα και την ισότητα των γωνιών που προκύπτει από την παραλληλία των ακτίνων, είναι

$$\Delta r = r_2 - r_1 = r_2 - r_2 \cos 2\phi = \frac{h}{\sin\phi}\left(1-\cos 2\phi\right) = \frac{h}{\sin\phi} 2\sin^2\phi = 2h\sin\phi$$

Η διαφορά φάσης ανάμεσα στις δύο πηγές θα δίνεται από

$$\Delta\varphi = k\Delta r + \pi = \frac{4\pi}{\lambda} h\sin\phi + \pi$$

Όπου η πρόσθετη διαφορά φάσης π έρχεται από την ανάκλαση. Μέγιστα, εδώ έχουμε όταν

$$\Delta\varphi = 2m\pi = \frac{4\pi}{\lambda} h\sin\phi + \pi = 2m\pi, \quad m = 1, 2\ldots$$

και το πρώτο μέγιστο πάνω από τον ορίζοντα για

$$\frac{4\pi}{\lambda} h\sin\phi + \pi = 2\pi \Rightarrow \sin\phi = \frac{\lambda}{4h} \Rightarrow \phi = \arcsin\frac{\lambda}{4h}$$

Άσκηση 5

Α) Εφόσον οι πηγές είναι σύγχρονες και ισαπέχουν απόσταση α, η συνολική ένταση δίνεται από την σχέση 22.14 του βιβλίου των Alonso-Finn

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\alpha\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\alpha\sin\theta\right)}\right]^2 \tag{1}$$

όπου N το πλήθος των πηγών, λ το μήκος κύματος και I_0 η ένταση της μίας πηγής. Από τη διερεύνηση της σχέσης (1) γνωρίζουμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κύριων μεγίστων θα υπάρχουν N-1 ελάχιστα (σημεία μηδενισμού), άρα από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε $N-1=4 \Rightarrow N=5$.

Επίσης από τη σχέση (1) για $\theta = 0$ (θέση Α), $I(0) = N^2 I_0 \Rightarrow I_0 = I_A / N^2 = 5\,\mathrm{W/m^2}$.

Β) Τα κύρια μέγιστα δίνονται από τη σχέση

$$\alpha\sin\theta = n\lambda, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{2}$$

Το κεντρικό μέγιστο n=0 αντιστοιχεί στη θέση Α, ενώ το πρώτο κύριο μέγιστο n=1 στη θέση με $\theta = \omega t_2 = \frac{u}{R} t_2 \Rightarrow \theta = 0.34\,\mathrm{rad} \Rightarrow \sin\theta = 0.3335$. Το μήκος κύματος δίνεται από τη σχέση $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = c/f = 3\mathrm{cm}$, και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha = 9\mathrm{cm}$.

Η ένταση στη θέση Β δίνεται από την (1) με $\theta = \pi/2$,

$$I_B = I_0 \left[\frac{\sin(15\pi)}{\sin(3\pi)} \right]^2 = 25 I_0 = I_A .$$

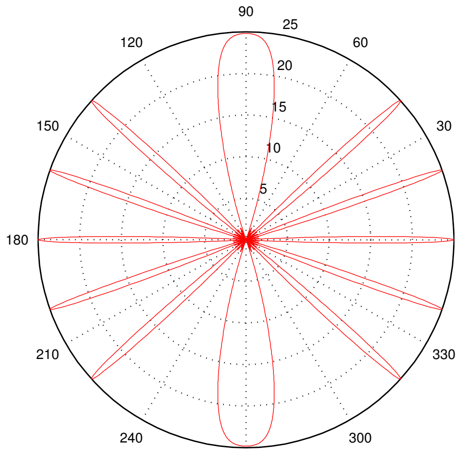
Γ) Από τη σχέση (2) έχουμε $\sin\theta = n\dfrac{\lambda}{\alpha} = \dfrac{n}{3}$, οπότε

n=0	n=±1	n=±2	n=±3
θ=0° (θέση Α)	θ=±19.47°	θ=±41.81°	θ=±90° (θέση Β)

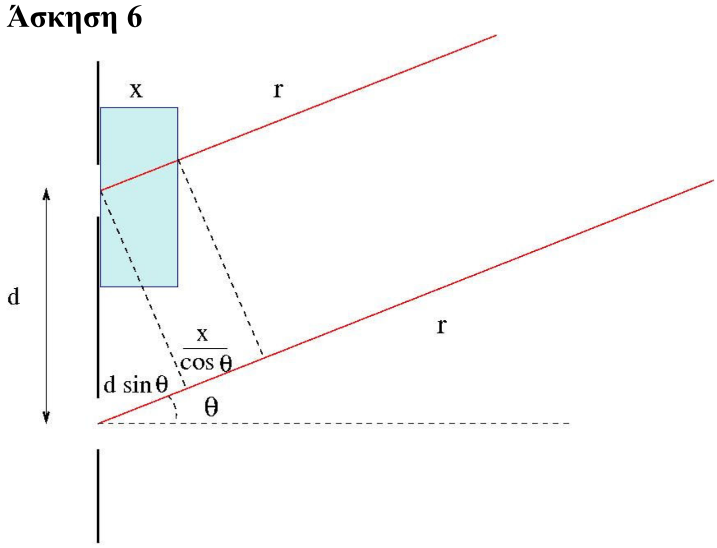
Άρα στο διάστημα [-π/2,π/2] έχουμε 7 μέγιστα και επιπλέον 5 συμμετρικά μέγιστα στην περιοχή [π/2,3π/2], σύνολο 12:

θ=

0°	19.47°	41.81°	90°
138.19°	160.53°	180°	199.47°
221.81°	270°	318.19°	340.53°



Άσκηση 6



Το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στη φωτογραφική πλάκα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τις σχισμές θα είναι:

$$E_1 = E_0 \sin\left(k r_1 + k_1 \frac{x}{\cos\theta} - \omega t \right)$$

$$E_2 = E_0 \sin\left(k\, r_1 + kd \sin\theta + \frac{kx}{\cos\theta} - \omega t \right)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων θα είναι

$$\delta\varphi = kd\sin\theta + k\frac{x}{\cos\theta} - k_1\frac{x}{\cos\theta}$$

Επειδή η γωνία $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \approx 1$ και $k = 2\pi/\lambda, k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi n/\lambda$ για τους φωτεινούς κροσσούς (μέγιστα συμβολής) παίρνουμε

$$\delta\varphi = 2\pi m \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\left[d\sin\theta - (n-1)x\right] = 2\pi m \Rightarrow d\sin\theta - (n-1)x = m\lambda, m = 0,1,2,\ldots$$

Για τον κεντρικό κροσσό έχουμε m=0 οπότε παίρνουμε

$$d\sin\theta = (n-1)x$$

Για την ίδια γωνία πριν την εισαγωγή του υμενίου είχαμε

$$d\sin\theta = 4\lambda$$

Άρα παίρνουμε

$$(n-1)x = 4\lambda \Rightarrow x = \frac{4\lambda}{n-1} \Rightarrow x = 10\mu m$$

Άσκηση 7

Η πλευρά της τετραγωνικής διατομής είναι $a = \sqrt{A}$. Θεωρούμε ότι ο σωλήνας εκτείνεται κατά μήκος του άξονα των z με τις τέσσερις παράλληλες πλευρές στα επίπεδα $x = 0, x = a$ και $y = 0, y = a$. Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης κατά τους άξονες x, y έχουμε στάσιμα κύματα «κλειστών άκρων» δηλαδή με κόμβο στα άκρα, ~ $\sin k_x x \sin k_y y$ με $k_x a = n_x\pi, k_y a = n_y\pi$ με $n_x, n_y = 1,2,3,\ldots$ ακεραίους, ενώ κατά τον z άξονα έχουμε οδεύον κύμα ~ $\sin(k_z z - \omega t)$.

Πράγματι, θεωρώντας και την 3η διάσταση στην (ΑΦ-22.68) (βλ. και ΑΦ-22.50),

$$\xi = \xi_1\sin\Big(k_x x + k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big) + \xi_2\sin\Big(k_x x - k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big)$$

$$+\xi_3\sin\Big(-k_x x + k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big) + \xi_4\sin\Big(-k_x x - k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big)$$

Ακολουθώντας τα βήματα μεταξύ ΑΦ-22.50 έως 22.53, είναι $\xi = 0$ για $x = 0, y = 0$, οπότε $\xi_1 + \xi_2 = 0,\ \xi_3 + \xi_4 = 0,\ \xi_1 + \xi_3 = 0,\ \xi_2 + \xi_4 = 0,$

οπότε

$$\xi = \xi_1\sin\Big(k_x x + k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big) - \xi_1\sin\Big(k_x x - k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big)$$

$$-\xi_1\sin\Big(-k_x x + k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big) + \xi_1\sin\Big(-k_x x - k_y y + \big(k_z z - \omega t\big)\Big)$$

Προσθέτοντας ανά δύο τα ημίτονα παίρνουμε

$$\xi(x,y,z,t) = -4\xi_1\sin\big(k_x x\big)\sin\big(k_y y\big)\sin\big(k_z z - \omega t\big)$$

$$= \xi_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{\sqrt{A}}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{\sqrt{A}}\right)\sin\big(k_z z - \omega t\big) \ (1)$$

με $4\xi_1 \equiv \xi_0$.

Β) Εξ ορισμού του κυματανύσματος **k**, είναι

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 4\pi^2\left(\frac{n_x^2}{4a^2} + \frac{n_x^2}{4a^2} + k_z^2\right) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 4\pi^2\,\frac{\nu^2}{v^2}$$

επομένως

$$\nu = \upsilon\sqrt{\frac{n_x^2}{4a^2} + \frac{n_x^2}{4a^2} + k_z^2} = \frac{\upsilon}{2A}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + a^2k_z^2} \quad , \; n_x, n_y = 1,2,3,\ldots$$

Επειδή το $0 \le k_z$, οι συχνότητες που μπορεί να άγει ο κυματοδηγός είναι η μικρότερη δυνατή συχνότητα είναι για $n_x = n_y = 1, k_z = 0$, δηλαδή

$$\nu_0 = \frac{v}{2a}\sqrt{1+1+0} = \frac{v}{\sqrt{2A}}$$

$$\nu_0 = \frac{340\,m/s}{2cm} = \frac{17000}{s} = 17000Hz$$

Άρα ο εν λόγω σωλήνας μπορεί να άγει όλες τις μεγαλύτερες συχνότητες της ν_0 -η οποία είναι στα ανώτερα όρια ακουστότητος (βλ. Σχ. ΑΦ-18.23).

Γ) Το ζητούμενο μήκος κύματος είναι

$$\lambda_0 = \frac{\upsilon}{\nu_0} = \sqrt{2A} \Rightarrow \lambda_0 = \sqrt{2}\sqrt{2cm^2} = 2cm\,,$$

Η πλάτος στο κέντρο $\left(x = y = a/2 = \sqrt{A}/2\right)$ υπολογίζεται από την (1) με $n_x = n_y = 1$ και $k_z = 0$ και είναι

$$\xi(\sqrt{A}/2, \sqrt{A}/2, z, t) = \xi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\omega t) = -\xi_0 \sin(\omega t)$$

Άσκηση 8

Α) Για περίθλαση φωτός μήκους κύματος λ από ορθογώνια σχισμή πλάτους b γνωρίζουμε ότι τα ελάχιστα (σκοτεινοί κροσσοί) προκύπτουν σε γωνίες

$\sin\vartheta = n\dfrac{\lambda}{b}$, με $n = 1,2,\ldots,m$, όπου m η μέγιστη τάξη των σκοτεινών κροσσών η οποία υπολογίζεται θέτοντας $\vartheta = \pi/2 \Rightarrow \sin\vartheta = 1 \Rightarrow m = \mathrm{int}(b/\lambda) = 39$. Άρα συνολικά θα εμφανιστούν στην οθόνη 2*m*=78 σκοτεινοί κροσσοί περίθλασης.

Β) Ο πιο απομακρυσμένος από το κέντρο σκοτεινός κροσσός έχει $n = \pm 39$ που αντιστοιχεί σε γωνία $\sin\vartheta = \pm 0.9872 \Rightarrow \vartheta = \pm 80.81^\circ$.

Γ) Ζητάμε την ένταση του φωτεινού κροσσού που εμφανίζεται αμέσως πριν από το σκοτεινό κροσσό με $m = 39$. Από το παράδειγμα 23.1 γνωρίζουμε ότι η ένταση του φωτεινού κροσσού n δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$I = \frac{I_0}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}\,, \text{ με } n = 1,2,3,\ldots \qquad (1)$$

Η σχέση (1) δίνει την ένταση του φωτεινού κροσσού που βρίσκεται μεταξύ των δύο διαδοχικών σκοτεινών κροσσών n και $n+1$. Άρα η ζητούμενη ένταση προκύπτει θέτοντας $n = 37$ στη σχέση (1), οπότε $I = 7.2\times10^{-5} I_0 = 0.61\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$.

<u>2ος προσεγγιστικός τρόπος</u>:

Ο ζητούμενος φωτεινός κροσσός βρίσκεται ανάμεσα στους δύο σκοτεινούς με $n = 38$ και $n = 39$, οι οποίοι αντιστοιχούν σε $\sin\vartheta = 0.9619$ και $\sin\vartheta = 0.9872$ (γωνίες $\vartheta = 74.12^\circ$ και $\vartheta = 80.81^\circ$). Θεωρούμε ότι το μέγιστο βρίσκεται στη μέση, δηλαδή $\sin\vartheta = 0.9745$. Θέτοντας στη σχέση 23.8 βρίσκουμε
$I = 6.8\times10^{-5} I_0 = 0.58\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$.

Άσκηση 9

Α) Η σχέση (22.17) των Alonso-Finn περιγράφει τα μέγιστα ανάκλασης από το υμένιο λόγω ενισχυτικής συμβολής. Για κάθετη πρόσπτωση $\theta_r = 0$, ενώ $a = 5000\,\mathring{A}$- ισχύει

$$\lambda = \frac{4an}{2N-1} = \frac{30}{2N-1}10^3\,\mathring{A}$$

Για N=3,4 έχουμε αντίστοιχα λ=6000, 4280 $\mathring{A}$.

Β) Προϋπόθεση για να φαίνεται το υμένιο μαύρο είναι να υπάρχει καταστροφική συμβολή για όλα τα μήκη κύματος στο ορατό. Αυτό δεν είναι δυνατόν διότι αν καθορίσουμε το πάχος έτσι ώστε να έχουμε καταστροφική συμβολή για κάποιο μήκος κύματος, επιλέγοντας από τη σχέση (22.17) $a = \frac{2N\lambda}{4n} = \frac{N\lambda}{3}$ αυτό δεν θα ισχύει για όλα τα υπόλοιπα.
Αν απαιτήσουμε απλώς να μην έχουμε ενισχυτική συμβολή τότε αρκεί να βρούμε την συνθήκη για το μικρότερο μήκος κύματος. Από τη

$$a = \frac{(2N-1)\lambda}{4n} = \frac{(2N-1)4000}{6} \cong (2N-1)667\,\mathring{A}$$

Για N=1 έχουμε $a \cong 667\,\overset{0}{A}$ και κατά συνέπεια για πάχη μικρότερα από αυτό δεν έχουμε ενισχυτική συμβολή από το υμένιο.

Άσκηση 10

Α) Τα κύρια μέγιστα δίνονται από

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{a},\quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad (1)$$

όπου $a = \frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{5000} = 2\times10^{-6}\,\mathrm{m} = 2\mu\mathrm{m}$. Η απόσταση του μεγίστου m-οστής τάξης Y_m δίνεται από [1]

[1] Η χρήση του προσεγγιστικού τύπου $\sin\theta_m \approx \frac{Y_m}{R}$ οδηγεί σε

$$Y_1^2 - Y_1^1 = \frac{R}{a}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = \frac{2m}{2\times10^{-6}\mathrm{m}}\left(615\text{-}475\right)\times10^{-9}\ \mathrm{m}=130\times10^{-3}\mathrm{m}=0.130\mathrm{m}$$

$$Y_m = R\tan\theta_m = \frac{R\sin\theta_m}{\sqrt{1-\sin^2\theta_m}} = \frac{Rm\lambda/a}{\sqrt{1-(m\lambda/a)^2}} = \frac{Rm\lambda}{\sqrt{a^2-(m\lambda)^2}}$$

όπου R η απόσταση της οθόνης από το φράγμα.
Η οποία οδηγεί σε

$$Y_1^2 - Y_1^1 = \frac{R\lambda_2}{\sqrt{a^2-\lambda_2^2}} - \frac{R\lambda_1}{\sqrt{a^2-\lambda_1^2}} = 0.157\text{m}$$

B) Η μέγιστη δυνατή γωνία, που αντιστοιχεί στην άκρη της οθόνης, είναι αυτή με

$$\sin\theta_{\max} = \frac{2/2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$$

Επομένως

$$|\sin\theta_m| = \left|\frac{m\lambda}{a}\right| \le \sin\theta_{\max} = 0.447 \Rightarrow$$

$$|m_2| \le 0.447\frac{a}{\lambda_2} = \frac{0.447\times 2\times 10^{-6}\text{m}}{615\times 10^{-9}\text{m}} = \frac{0.447\times 2}{0.615} = 1.45 \Rightarrow m_1 = 0, \pm 1$$

$$|m_1| \le 0.447\frac{a}{\lambda_1} = \frac{0.447\times 2\times 10^{-6}\text{m}}{475\times 10^{-9}\text{m}} = \frac{0.447\times 2}{0.475} = 1.88 \Rightarrow m_2 = 0, \pm 1$$

Συνεπώς υπάρχουν 3 κύρια μέγιστα της φασματικής γραμμής των 615nm και 3 κύρια μέγιστα της φασματικής γραμμής των 475 nm.

Γ) Όσο και να αυξήσουμε το πλάτος της οθόνης, από την (1) έχουμε

$$|\sin\theta_m| = \left|\frac{m\lambda}{a}\right| \le 1 \Rightarrow |m_2| \le \frac{a}{\lambda_2} = \frac{2\times 10^{-6}\text{m}}{615\times 10^{-9}\text{m}} = \frac{2}{0.615} = 3.25 \Rightarrow m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$$|m_1| \le \frac{a}{\lambda_1} = \frac{2\times 10^{-6}\text{m}}{475\times 10^{-9}\text{m}} = \frac{2}{0.475} = 4.21 \Rightarrow m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 7 κύρια μέγιστα της φασματικής γραμμής των 615nm και 9 κύρια μέγιστα της φασματικής γραμμής των 475 nm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Διότι στη μυωπία πρέπει να στείλω τη δέσμη πέραν της εστίας, άρα πρέπει να την ανοίξω λίγο, με αποκλίνοντα φακό. Τότε το γωνιακό άνοιγμα της δέσμης που εστιάζει πιο πίσω είναι μικρότερο, και στην προέκταση φαίνεται σαν να προέρχεται από μικρότερα αντικείμενα. Στην υπερμετρωπία πρέπει να στείλω τη δέσμη πρίν από την εστία, άρα να την συγκεντρώσω λίγο προσθέτοντας συγκλίνοντα φακό. Τότε το άνοιγμα της δέσμης μεγαλώνει και φαίνεται σαν να προέρχεται από μεγαλύτερα αντικείμενα.

2)

A) Από την σχέση $1/p - 1/q = 1/f$ με p=1m, f=0.25m βρίσκουμε οτι το είδωλο βρίσκεται q=-1/3m, δηλ. 33.3 cm πίσω από τον φακό ενώ ειναι ανεστραμένο μιά και η μεγένθυση του είναι M=q/p=-1/3.

B) Το είδωλο θα γίνει θολό μιά και μόνο στην θέση q έχουμε την καλύτερη ευκρίνεια. Ειναι πιό δύσκολο να πουμε αν το είδωλο είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο μιά και τα ακρα του ειδώλου είναι τωρα θολά. Το πιο ευκρινές τμήμα του ειδώλου στο κεντρο μικραίνει (με χρήση του M= q/p) ενώ το θολό τμήμα του μεγαλώνει.

Γ) Η σωστή απάντηση είναι η (ii). Το χαρτόνι δεν επιτρέπει στις μισές ακτίνες να περάσουν, αλλά το κάτω μισό τμήμα του φακού είναι αρκετό για να έχουμε πλήρες είδωλο το οποίο είναι ευκρινές μια και βρίσκεται στην σωστή απόσταση q από τον φακό.

3)

Το πεδίο στο σημείο συμβολής είναι $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ και η ένταση του είναι

$$I = \left\langle c\varepsilon_0 \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 \right\rangle = c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + 2c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1 \bullet \vec{E}_2 \right\rangle =$$

$$= c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + 2c\varepsilon_0 \cos\theta E_{10} E_{20} \left\langle \sin\left(k r_1 - \omega t\right) \sin\left(k r_2 - \omega t + \phi\right) \right\rangle$$

$$= c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + c\varepsilon_0 \cos\theta\, E_{10} E_{20} \left\langle \cos\left(k r_1 - k r_2 - \phi\right) - \cos\left(k r_1 + k r_2 + \phi - 2\omega t\right) \right\rangle$$

$$= c\varepsilon_0 \frac{E_{10}^{\;2}}{2} + c\varepsilon_0 \frac{E_{20}^{\;2}}{2} + c\varepsilon_0 \cos\theta E_{10} E_{20} \cos\left[k\left(r_1 - r_2\right) - \phi\right]$$

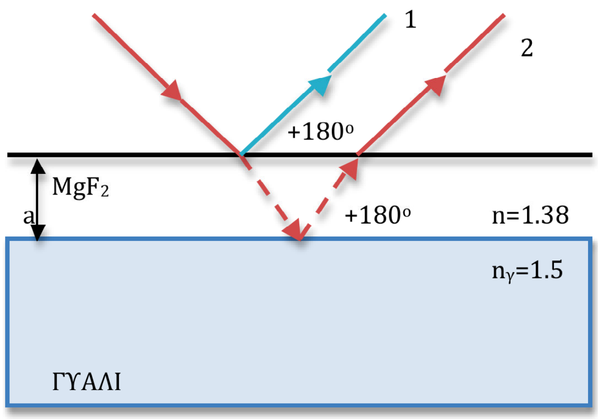
$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\theta \cos\left[k\left(r_1 - r_2\right) - \phi\right]$$

4)

Για να έχουμε ανάμειξη χρωμάτων δεν θα πρέπει να διαχωρίζονται δύο γειτονικές κουκίδες τα κέντρα των οποίων απέχουν σύμφωνα με τα δεδομένα περίπου $0.2\mathrm{cm}$. Σύμφωνα με τη συζήτηση στο Σχήμα 21-21 και τη σελίδα 211 (τέλος) του βιβλίου των Alonso και Finn, η διακριτική ικανότητα του οφθαλμού, λόγω περίθλασης στην κόρη, είναι

$$\beta = 1.36'' = 4\times10^{-4}\,\mathrm{rad} = \frac{0.2\times10^{-2} m}{R} \Rightarrow R = \frac{0.2\times10^{-2}}{4\times10^{-4}} m = 5m$$

5)



Το επίστωμα MgF_2 θα πρέπει να τοποθετηθεί από την πλευρά της φωτεινής πηγής (και όχι του οφθαλμού) έτσι ώστε για να μην έχουμε ανάκλαση θα πρέπει η ανακλώμενη δέσμη στην επίστωση και αυτή στο γυαλί να συμβάλουν καταστροφικά. Η πρώτη ακτίνα (1) υφίσταται αλλαγή φάσης 180^o λογω του ότι διαδίδεται από τον αέρα σε οπτικά πυκνότερο μέσο αλλά και η δεύτερη ακτίνα (2) υφίσταται αλλαγή φάσης 180^o στην επιφάνεια ανάμεσα στην επίστωση που είναι οπτικά αραιώτερη και στο γυαλί που είναι οπτικά πυκνότερο. Λόγω της διπλής αλλαγής φάσης κατά την ανάκλαση οι σχέσεις (22.17) και (22.18) αλλάζουν ρόλους και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πρώτη για να βρούμε την μέγιστη μετάδοση και ελάχιστη (μηδενική) ανάκλαση. Για κάθετη πρόσπτωση και N=1 έχουμε

$$a = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550nm}{5.52} \cong 100nm$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 6:</u>

Στο πείραμα του Young των δύο σχισμών ρίχνουμε μονοχρωματικό φώς μήκος κύματος λ= 5000Å. Όταν ένα λεπτό υμένιο τοποθετείται πάνω σε μια από τις σχισμές, ο κεντρικός κροσσός (μηδενικής τάξης) μετακινείται εκεί που ήταν ο φωτεινός κροσσός 4ης τάξης πριν την τοποθέτηση του υμενίου. Το φιλμ έχει δείκτη διάθλασης 1.2. Υπολογίστε το πάχος του υμενίου.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στη φωτογραφική πλάκα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τις σχισμές θα είναι:

$$E_1 = E_0 \sin\left(kr_1 + k_1\frac{x}{\cos\theta} - \omega t\right)$$

$$E_2 = E_0 \sin\left(kr_1 + kd\sin\theta + \frac{x}{\cos\theta} - \omega t\right)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων θα είναι

$$\delta\phi = kd\sin\theta + k\frac{x}{\cos\theta} - k_1\frac{x}{\cos\theta}$$

Επειδή η γωνία $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \approx 1$ και $k = 2\pi/\lambda, k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi n/\lambda$ για τους φωτεινούς κροσσούς (μέγιστα συμβολής) παίρνουμε

$$\delta\phi = 2\pi m \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}[d\sin\theta - (n-1)x] = 2\pi m \Rightarrow d\sin\theta - (n-1)x = m\lambda\,, m = 0,1,2,...$$

Για τον κεντρικό κροσσό έχουμε m=0 οπότε παίρνουμε

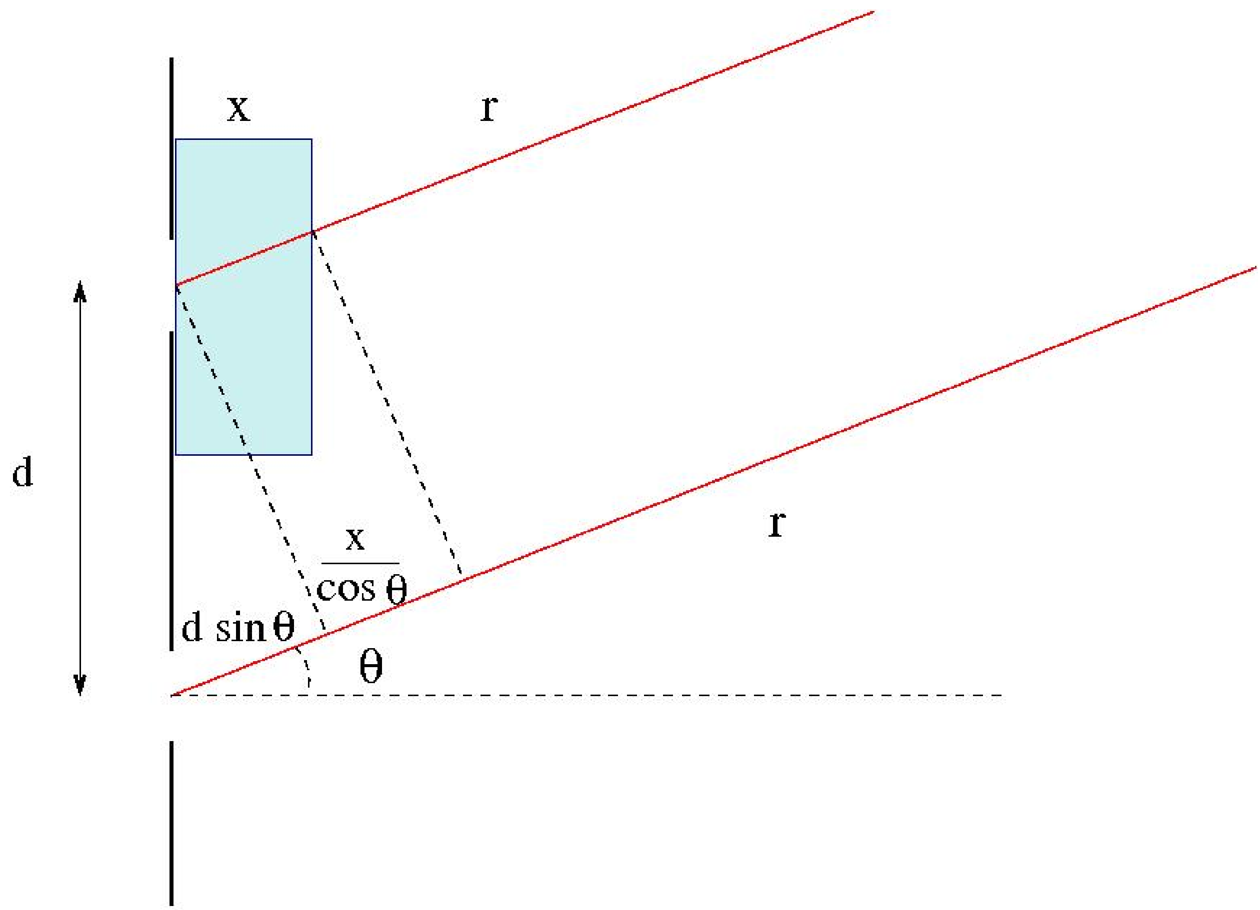
$$d\sin\theta = (n-1)x$$

Για την ίδια γωνία πριν την εισαγωγή του υμενίου είχαμε

$$d\sin\theta = 4\lambda$$

Άρα παίρνουμε

$$(n-1)x = 4\lambda \Rightarrow x = \frac{4\lambda}{n-1} \Rightarrow x = 10\mu m$$



x
r
d
r
$\frac{x}{\cos\theta}$
$d \sin\theta$
θ