11/2/2009

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2009-10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 9/3/09

Άσκηση 1

Α) Στο ΣΑ των δύο παρατηρητών το μήκος της ράβδου είναι $L = 50cm$ ενώ το μήκος στο ΣΑ της ράβδου (ιδιομήκος) είναι $L_0 = 100cm$. Έστω ότι η ράβδος κινείται με ταχύτητα υ. Λόγω της συστολής του μήκους έχουμε

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{L}{L_0} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{L}{L_0} \Rightarrow \frac{\upsilon}{c} = \sqrt{1-\frac{L^2}{{L_0}^2}} \Rightarrow \frac{\upsilon}{c} = \sqrt{1-\frac{50^2}{100^2}} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0.87c$$

Β) Στο ΣΑ της Γης οι δύο παρατηρητές απέχουν $\ell_0 = 50cm$. Στο ΣΑ της ράβδου η Γη κινείται με ταχύτητα $-\upsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow \gamma = 2$. Η απόσταση λοιπόν των παρατηρητών συστέλλεται

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} = \frac{\ell_0}{2} = 25cm$$

Άσκηση 2

Α) Έστω L η απόσταση της Γης από το άστρο στο ΣΑ της Γης. Στο ΣΑ του επιβάτη, όταν κινείται με ταχύτητα υ, η απόσταση αυτή θα δίνεται από $L' = L/\gamma_\upsilon$ και ο χρόνος που θα διαρκεί το ταξίδι είναι $t' = L'/\upsilon = L'/(\upsilon\gamma_\upsilon)$. Για τις δύο διαδρομές κανονική και η express θα έχουμε αντίστοιχα

$$t'_{\mathrm{K}} = \frac{L}{\upsilon_{\mathrm{K}}}\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2} \quad , \quad t'_{\mathrm{E}} = \frac{L}{\upsilon_{\mathrm{E}}}\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}}{c}\right)^2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη και αντικαθιστώντας $\upsilon_{\mathrm{E}} = \frac{3}{2}\upsilon_{\mathrm{K}}$ παίρνουμε

$$\frac{t'_{\mathrm{K}}}{t'_{\mathrm{E}}} = \frac{\upsilon_E\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2}}{\upsilon_K\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{E}}}{c}\right)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}\upsilon_K\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2}}{\upsilon_K\sqrt{1-\frac{9}{4}\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2}} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2} = 4\sqrt{1-\frac{9}{4}\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2} \Rightarrow$$

$$9\left[1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2\right] = 16\left[1-\frac{9}{4}\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2\right] \Rightarrow 27\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{K}}}{c}\right)^2 = 7 \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{K}} = \sqrt{\frac{7}{27}}c = 0.51c$$

Β) Ως προς τη Γη η διάρκεια των δύο διαδρομών δίνεται από

$$t_K = L/\upsilon_K \ , \ t_E = L/\upsilon_E$$

Επομένως ο λόγος των χρόνων διάρκειας δίνεται από

$$\frac{t_K}{t_E} = \frac{\upsilon_E}{\upsilon_K} = \frac{3}{2}$$

Η express διαρκεί δηλαδή τα 2/3 της κανονικής διαδρομής .

Γ) Αν m η μάζα του διαστημοπλοίου, ο λόγος των κινητικών ενεργειών δίνεται από

$$\frac{T_K}{T_E} = \frac{(\gamma_K - 1)mc^2}{(\gamma_E - 1)mc^2} = \frac{(\gamma_K - 1)}{(\gamma_E - 1)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{7}{27}}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{9}{4}\dfrac{7}{27}}} - 1} = 0.295 \Rightarrow T_E = 3.4T_K$$

Επομένως το εισιτήριο express θα πρέπει να είναι 3.5 περίπου φορές ακριβότερο από το κανονικό.

Άσκηση 3

Θεωρούμε οτι ο καθρέπτης βρίσκεται στο επίπεδο yz και κινείται στον άξονα x πλησιάζοντας την φωτεινή πηγή.

(α) Πρώτη λύση

Έστω f_0 η συχνότητα του φωτός στο σύστημα του εργαστηρίου και f_K στο κινούμενο σύστημα του καθρέπτη. Από την σχέση (3.22) του Περσίδη έχουμε ότι στο κινούμενο σύστημα του καθρέπτη το εκπεμπόμενο φωτόνιο έχει συχνότητα

$$f_\kappa = f_0 \sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} \qquad (1)$$

Όπου λάβαμε υπόψη μας ότι η συχνότητα είναι αντίστροφα ανάλογη του μήκους κύματος και ότι ο παρατηρητής (σύστημα καθρέπτη) πλησιάζει την πηγή (εργαστήριο) και άρα θέτουμε –υ στην σχέση (3.22).

Μετά την ανάκλαση, η πηγή είναι το σύστημα του καθρέπτη ενώ το κινούμενο σύστημα είναι αυτό του παρατηρητή, στο οποίο η συχνότητα του φωτός που παρατηρείται είναι τώρα f_0'. Στην σχέση (1) θα πρέπει τώρα να βάλουμε όπου f_0 το f_κ, ενώ στην θέση του f_κ το f_0'. Έχουμε

$$f_0' = f_\kappa \sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$f_0' = f_0 \frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c} \qquad (3)$$

Για $\upsilon << c$, βρίσκουμε $f_0' \cong f_0(1+2\upsilon/c) = (1+2\times10^{-3})\times10^{13}\,Hz.$

(β) Δεύτερη λύση

Στο σύστημα του εργαστηρίου (S) το τετραδιάνυσμα ορμης-ενέργειας πριν την ανάκλαση είναι

$$p^{S}{}_{\pi\rho\iota\nu} = (\frac{E}{c}, \frac{E}{c}, 0, 0)$$

Για να διατηρείται το τετραδιάνυσμα θα πρέπει να μετασχηματίζεται η ενέργεια όπως ο χρόνος και η ορμή όπως η θέση. Δηλαδή στο κινούμενο σύστημα του καθρέπτη (με –υ) έχουμε

$$\frac{E'}{c} = \gamma(\frac{E}{c} + \frac{E}{c}\frac{\upsilon}{c}) = \gamma\frac{E}{c}(1+\upsilon/c)$$

Παρατηρούμε, οτι στην ειδική περίπτωση των φωτονίων που εξετάζουμε η ενέργεια και η ορμή είναι ανάλογες και η χρήση της μία από τις εξισώσεις του μετασχηματισμού Lorentz είναι επαρκής. Κατά συνέπεια το τετραδιάνυσμα ορμής ενέργειας στο κινούμενο σύστημα του καθρέπτη (S’) πριν την ανάκλαση είναι

$$p^{S'}{}_{\pi\rho\iota\nu} = (\gamma\frac{E}{c}(1+\upsilon/c), \gamma\frac{E}{c}(1+\upsilon/c), 0, 0)$$

Μετά την ανάκλαση από τον καθρέπτη το φωτόνιο αλλάζει κατεύθυνση και άρα έχουμε στο κινουμενο σύστημα

$$p^{S'}{}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = (\gamma\frac{E}{c}(1+\upsilon/c), -\gamma\frac{E}{c}(1+\upsilon/c), 0, 0)$$

Μετασχηματίζουμε τώρα το τετραδιάνυσμα του ανακλώμενου φωτονίου πίσω στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Τώρα το σύστημα S’ είναι το ακίνητο ενώ το S είναι το κινούμενο με σχετική ταχύτητα –υ. Ισχύει

$$\frac{E''}{c} = \gamma(\frac{E'}{c} + \frac{E'}{c}\frac{\upsilon}{c}) = \gamma\frac{E'}{c}(1+\upsilon/c) = \gamma^2\frac{E}{c}(1+\upsilon/c)^2$$

και συνεπώς

$$p^{S}{}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = (\gamma^2\frac{E}{c}(1+\upsilon/c)^2, -\gamma^2\frac{E}{c}(1+\upsilon/c)^2)$$

Η ενέργεια του φωτονίου μετά την ανάκλαση είναι

$$E_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = p^{(0)}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}/c = \gamma^2 E(1+\upsilon/c)^2 = \frac{(1+\upsilon/c)^2}{1-(\upsilon/c)^2}E = \frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}E$$

Δηλαδή,

$$f_0' = f_0\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}$$

Άσκηση 4

Α) Το μήκος ηρεμίας L_0 του τρένου έχει συσταλεί κατά $L = L_0/\gamma$. Άρα $L_0 = \gamma L = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}L = \frac{1}{\sqrt{1-0.9^2}}L \approx 2.294L$

Β) Ορίζουμε τα γεγονότα Α={κεραυνός χτυπάει το πίσω μέρος του τρένου} και Β={κεραυνός χτυπάει το μπρος μέρος το τρένου} με $(x_A,t_A)=(0,0)$ και $(x_B,t_B)=(L,0)$. Από τους μετασχηματισμούς Lorentz, για τους ταξιδιώτες οι συντεταγμένες των γεγονότων είναι $x'_A = \gamma(x_A - vt) = \gamma(0 - v0) = 0$,

$ct'_A = \gamma(ct_A - (v/c)x_A) = \gamma(c0 - (v/c)0) = 0$ και

$x'_B = \gamma(x_B - vt_B) = \gamma(L - v0) = \gamma L$,

$ct'_B = \gamma(ct_B - (v/c)x_B) = \gamma(c0 - (v/c)L) = -\gamma vL/c \Rightarrow t'_B = -\gamma vL/c^2$.

Άρα ο κεραυνός πέφτει πρώτα στο μπροστινό μέρος του τρένου σύμφωνα με τους ταξιδιώτες με διαφορά χρόνου

$\Delta t' = t'_A - t'_B = \gamma(v/c)L/c \approx 2.294 \times 0.9 \times L/c \approx 2.065(L/c)$.

Γ) Έστω ότι ο ταξιδιώτης κάθεται σε απόσταση x από το πίσω μέρος του τρένου (σύμφωνα με το δικό του σύστημα αναφοράς). Τότε η λάμψη ταξιδεύει για χρόνο $t_1 = x/c$ από το πίσω μέρος του τρένου και $t_2 = (L_0 - x)/c = (\gamma L - x)/c$. Για να φτάσουν ταυτόχρονα στον παρατηρητή θα πρέπει $t_1 + 0 = t_2 + t'_B$ επομένως

$$\frac{x}{c} = \frac{L_0 - x}{c} - \frac{\gamma v L}{c^2} = \frac{L_0 - x}{c} - \frac{v L_0}{c^2} \Rightarrow x = L_0 - x - 0.9L_0 \Rightarrow 2x = 0.1L_0 \Rightarrow$$
$$x = 0.05L_0 \Rightarrow x = 0.05 \times 2.294L_0 = 0.115L_0$$

Άσκηση 5

Α) Από τους ορισμούς της σχετικιστικής ενέργειας και ορμής έχουμε

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m \upsilon}{\gamma m c^2} = \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{342}{367}c = 0.932c$$

Επομένως

$$m = \frac{E}{\gamma c^2} = \frac{E}{c^2}\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2} = 133.\text{MeV}/c^2$$

Β) Για τον παρατηρητή Π η ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από τη σύνθεση των ταχυτήτων

$$\upsilon_\Pi = \frac{\upsilon - u}{1 - \frac{\upsilon u}{c^2}} = \frac{0.932 - 0.800}{1 - 0.932 \times 0.800} = 0.519c$$

οπότε η ορμή του δίνεται από

$$p_\Pi = \gamma_\Pi m \upsilon_\Pi = \frac{133}{\sqrt{1-0.519^2}} \times 0.519\,\text{MeV/c=80.7MeV/c}$$

Η ενέργειά του μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = 156.\text{MeV}$$

Γ) Αν f_1, f_2 οι συχνότητες (στο φυσικό σύστημα μονάδων *c*=*h*=1), από τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής έχουμε

$$\left.\begin{aligned}&E = hf_1 + hf_2\\ &p = \frac{h}{c}(f_1 + f_2)\cos\vartheta\\ &0 = \frac{h}{c}(f_1 - f_2)\sin\vartheta \Rightarrow f_1 = f_2 \equiv f\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}E &= 2hf\\ p &= \frac{2hf}{c}\cos\vartheta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}f &= \frac{E}{2h}\\ \cos\vartheta &= \frac{pc}{E} = \frac{v}{c}\end{aligned}\right\}$$

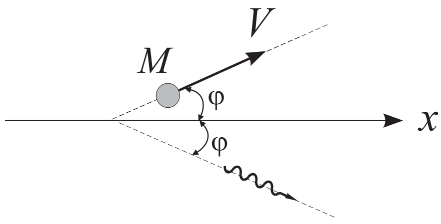
Επομένως

$$f_1 = f_2 = \frac{E}{2h} = \frac{367\times10^{6}\times1.602\times10^{-19}J}{2\times6.6262\times10^{-34}Js} = 4.44\times10^{22}Hz$$

$$\cos\vartheta = \frac{p}{E} = \frac{v}{c} = 0.932 \Rightarrow \vartheta = 21.25^o$$

Άσκηση 6

Α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:



$$x: \qquad \gamma_1 m_1 \upsilon_1 = \gamma MV\cos\varphi + \frac{E_\gamma}{c}\cos\varphi \Rightarrow \gamma_1 m\upsilon_1 = \gamma M$$

$$y: \qquad 0 = \gamma MV\sin\varphi - \frac{E_\gamma}{c}\sin\varphi \Rightarrow \qquad \gamma MV =$$

όπου E_γ η ενέργεια του φωτονίου, $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}} = 1.0607$ και $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$.

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) και με δεδομένα $\upsilon_1 = c/3$ και $E_\gamma = E_1/3 = \gamma_1 m_1 c^2/3$, έχουμε

$$\gamma_1 m\upsilon_1 = 2\frac{E_\gamma}{c}\cos\varphi \Rightarrow \gamma_1 m\frac{c}{3} = 2\frac{\gamma_1 mc^2}{3c}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Β) Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$E_1 + E_2 = E + E_\gamma \Rightarrow \gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 = \gamma Mc^2 + \frac{1}{3}\gamma_1 m_1 c^2 \Rightarrow \gamma Mc = \frac{2}{3}\gamma_1 mc + mc \qquad (3)$$

όπου E η ενέργεια του σώματος μάζας M και κάναμε χρήση των δεδομένων $m_1 = m_2 = m$, και $E_\gamma = E_1/3$. Διαιρώντας την (2) με την (3) βρίσκουμε την ταχύτητα V

$\frac{V}{c} = \frac{\frac{1}{3}\gamma_1 mc}{\frac{2}{3}\gamma_1 mc + mc} \Rightarrow V = 0.2071c$ και $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 1.0222$. Τέλος, από τη σχέση (2)

$$\gamma MV = \frac{E_\gamma}{c} \Rightarrow M = \frac{1}{\gamma V}\frac{\gamma_1 mc^2}{3c} \Rightarrow M = 1.68m.$$

Άσκηση7

Α) Η εξίσωση κίνησης έχει την ίδια μορφή και στις δύο περιπτώσεις

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} \qquad (1)$$

με (i) $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ και (ii) $\vec{p} = \gamma m\vec{\upsilon}$ με $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}{c^2}}}$

Β) (i) Σε μορφή συνιστωσών η (1) γράφεται:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE \Rightarrow d\left(m\upsilon_x\right) = qEdt \Rightarrow \int_0^{m\upsilon_x} d\left(m\upsilon_x\right) = qE\int_0^t dt \Leftrightarrow m\upsilon_x = qEt \Rightarrow \upsilon_x = \frac{qE}{m}t$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow \int_0^{m\upsilon_y} d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow m\upsilon_y = 0 \Rightarrow \upsilon_y = 0$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow d\left(m\upsilon_z\right) = 0 \Rightarrow \int_0^{m\upsilon_z} d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow m\upsilon_z = 0 \Rightarrow \upsilon_z = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\upsilon(0) = \left(\upsilon_x(0),\upsilon_y(0),\upsilon_z(0)\right) = \left(0,0,0\right)$ από τις αρχικές συνθήκες. Επομένως η ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{qEt}{m}\hat{x} \qquad (2)$$

(ii) Σε μορφή συνιστωσών η (1) γράφεται:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE \Rightarrow d\left(\gamma m\upsilon_x\right) = qEdt \Rightarrow \int_0^{\gamma m\upsilon_x} d\left(\gamma m\upsilon_x\right) = qE\int_0^t dt \Leftrightarrow \gamma m\upsilon_x = qEt \qquad (3)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow \int_0^{\gamma m\upsilon_y} d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow \gamma m\upsilon_y = 0 \Rightarrow \upsilon_y = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow d\left(m\upsilon_z\right) = 0 \Rightarrow \int_0^{\gamma m\upsilon_z} d\left(m\upsilon_y\right) = 0 \Rightarrow \gamma m\upsilon_z = 0 \Rightarrow \upsilon_z = 0 \qquad (5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\upsilon(0) = \left(\upsilon_x(0),\upsilon_y(0),\upsilon_z(0)\right) = \left(0,0,0\right)$ από τις αρχικές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των (3) και (4) και τον ορισμό του γ παίρνουμε από την (1)

$$\gamma m\upsilon_x = qEt \Rightarrow \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1+\dfrac{\upsilon_x^2}{c^2}}} = qEt \Rightarrow \frac{m^2\upsilon_x^2}{1+\dfrac{\upsilon_x^2}{c^2}} = q^2E^2t^2 \Rightarrow \left(m^2 + \frac{q^2E^2t^2}{c^2}\right)\upsilon_x^2 = q^2E^2t^2$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}}$$

Επομένως η ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$$\vec{\upsilon} = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2c^2+q^2E^2t^2}} = \frac{qEt}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}}\hat{x} \qquad (6)$$

Γ) (i) Από την (2) έχουμε

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{qEt}{m} \Rightarrow \int_0^x dx = \frac{qE}{m}\int_0^t dt\, t \Rightarrow x = \frac{qE}{m}\frac{t^2}{2} \quad (7)$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις αρχικές συνθήκες $\left(x(0), y(0), z(0)\right) = \left(0,0,0\right)$

(ii)Από την (5) έχουμε

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{qEt}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}} \Rightarrow \int_0^x dx = \frac{qE}{m}\int_0^t dt \frac{t}{\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}} \Rightarrow$$

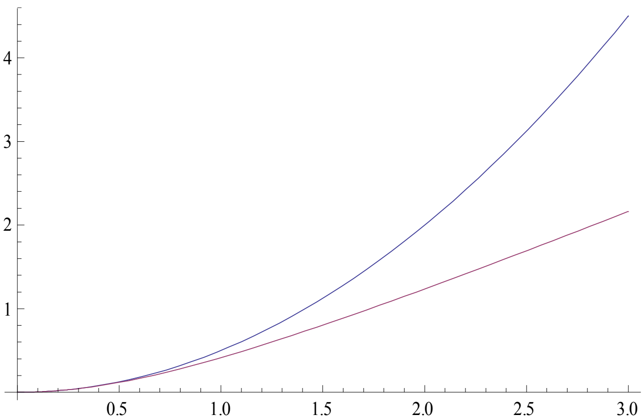
$$x = \frac{mc^2}{2qE}\int_0^t \frac{d\left(qEt^2/mc\right)}{\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}} \Rightarrow x = \frac{mc^2}{qE}\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}\Bigg|_0^t = \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}-1\right)(8)$$

ενώ για τις άλλες συνιστώσες έχουμε
$y = z = 0$ όπως και στην (i).

Δ)

(i) Από την (7) $x = \dfrac{qE}{2m}t^2$

άρα πρόκειται για παραβολή



(ii) Από την (8) βρίσκουμε

$$x = \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}-1\right) \Rightarrow \frac{qE}{mc^2}x - 1 = \sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{qE}{mc^2}x-1\right)^2 = 1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2} \Rightarrow \left(\frac{qE}{mc^2}x-1\right)^2 - \frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2} = 1$$

και συνεπώς πρόκειται για Υπερβολή.

Ε) Αναπτύσσοντας την (8) σε σειρά Taylor στο όριο στο όριο $c \to \infty \Rightarrow \dfrac{q^2E^2t^2}{m^2c^2} \to 0$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^4}{8} + \ldots$$

παίρνουμε σε πρώτη τάξη

$$x=\frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}-1\right)=\frac{mc^2}{qE}\left(1+\frac{q^2E^2t^2}{2m^2c^2}-1\right)=\frac{qEt^2}{2m}$$

το οποίο συμπίπτει με το αποτέλεσμα (7).

ΣΤ) (i) Από την (7)

$$d=\frac{qE}{m}\frac{t^2}{2}\Rightarrow t_N=\sqrt{\frac{2md}{qE}}$$

(ii) Από την (8)

$$d=\frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m^2c^2}}-1\right)\Rightarrow t_E=\frac{mc}{qE}\sqrt{\left(\frac{qEd}{mc^2}+1\right)^2-1}=\sqrt{\frac{d^2}{c^2}+\frac{2md}{qE}}$$

Άσκηση 8

Α) Ορίζοντας σαν θετική φορά αυτή από το Χ προς το Ζ και με δεδομένο ότι τα διαστημόπλοια Χ και Υ απομακρύνονται το ένα από το άλλο, έχουμε $\upsilon_{\mathrm{XY}}=-0.2c$, $\upsilon_{\mathrm{ZY}}=-0.5c$, και $\upsilon_{\mathrm{X\Gamma}}=0.3c$. Από την πρόσθεση ταχυτήτων έχουμε

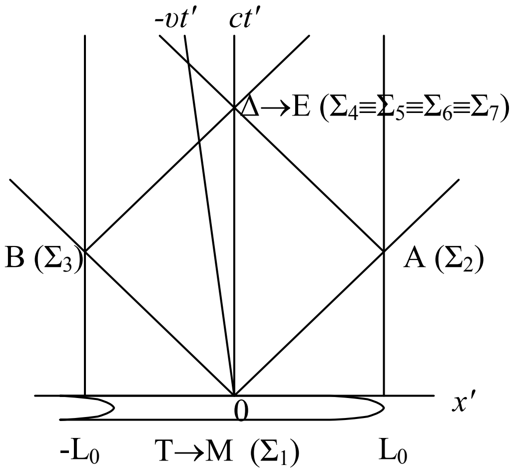
$$\upsilon_{\mathrm{Y\Gamma}}=\frac{\upsilon_{\mathrm{YX}}-\upsilon_{\mathrm{\Gamma X}}}{1\text{-}\frac{\upsilon_{\mathrm{YX}}\upsilon_{\mathrm{\Gamma X}}}{c^2}}=\frac{-\upsilon_{\mathrm{XY}}+\upsilon_{\mathrm{X\Gamma}}}{1\text{-}\frac{\upsilon_{\mathrm{XY}}\upsilon_{\mathrm{X\Gamma}}}{c^2}}=\frac{0.2c+0.3c}{1+0.2\cdot 0.3}=0.4717c\text{, και}$$

$$\upsilon_{\mathrm{Z\Gamma}}=\frac{\upsilon_{\mathrm{ZY}}-\upsilon_{\mathrm{\Gamma Y}}}{1\text{-}\frac{\upsilon_{\mathrm{ZY}}\upsilon_{\mathrm{\Gamma Y}}}{c^2}}=\frac{\upsilon_{\mathrm{ZY}}+\upsilon_{\mathrm{Y\Gamma}}}{1+\frac{\upsilon_{\mathrm{ZY}}\upsilon_{\mathrm{Y\Gamma}}}{c^2}}=\frac{-0.5c+0.4717c}{1-0.5\cdot 0.4717}=-0.0370c$$

Β) Ομοίως έχουμε

$$\upsilon_{\mathrm{XZ}}=\frac{\upsilon_{\mathrm{XY}}-\upsilon_{\mathrm{ZY}}}{1\text{-}\frac{\upsilon_{\mathrm{XY}}\upsilon_{\mathrm{ZY}}}{c^2}}=\frac{-0.2c-(-0.5c)}{1-0.2\cdot 0.5}=0.3333c$$

Άσκηση 9



Α) Ως προς το τραίνο η Γή κινείται με ταχύτητα -υ. (Η κοσμική γραμμή του Τ έχει εξίσωση $x'=-\upsilon t'$)

ΟΑ: $x'=ct'$

ΟΒ: $x'=-ct'$

ΑΔ: $x'=x'_A-c\left(t'-t'_A\right)$

ΒΔ: $x'=x'_B+c\left(t'-t'_A\right)$

Άρα:

Σ_1: $(x',t')=(0,0)$

Σ_2: $x'_{\mathrm{A}}=L_0=ct'_{\mathrm{A}}$

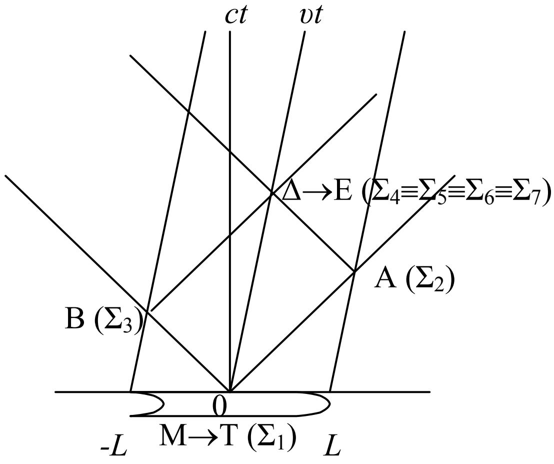
Σ_3: $x'_B=-L_0=-ct'_B$

Τα γεγονότα Δ→Ε ($\Sigma_4\equiv\Sigma_5\equiv\Sigma_6\equiv\Sigma_7$) ταυτίζονται.

Σ_4: $x'_\Delta=L_0-c\left(t'_\Delta-t'_{\mathrm{A}}\right)=-L_0+c\left(t'_\Delta-t'_{\mathrm{B}}\right)$

Επομένως,

Β) ΑΒ=$x'_{\mathrm{A}} - x'_{\mathrm{B}} = 2L_0$
Γ) $t'_{\mathrm{A}} - t'_{\mathrm{B}} = 0$
Δ) Τα δύο φώτα επιστρέφουν στο μέσον Μ ταυτοχρόνως, άρα ΜΕ=0



Ε) και Ζ): 0, αφού τα γεγονότα Δ→Ε ($\Sigma_4 \equiv \Sigma_5 \equiv \Sigma_6 \equiv \Sigma_7$) ταυτίζονται.
Η) Είτε από τις εξισώσεις είτε από το σχήμα,
ΟΔ=$c\left(t'_{\Delta} - t'_{0}\right) \Rightarrow \left(t'_{\Delta} - 0\right) = 2L_0 / c$
Θ) $x'_{\Delta} = 0$

Ως προς την Γή το τραίνο είναι συνεσταλμένο: $L = L_0\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}$.

Α) Ως προς τη Γή το τραίνο κινείται με ταχύτητα υ. (Η κοσμική γραμμή του Μ έχει εξίσωση $x = \upsilon t$)

ΟΑ: $x = ct$
ΟΒ: $x = -ct$
ΑΔ: $x = x_A - c\left(t - t_A\right)$
ΒΔ: $x = x_B + c\left(t - t_A\right)$
"L"Α: $x = L + \upsilon t$
"-L"Β: $x = -L + \upsilon t$
Άρα:

Σ_1: $(x,t) = (0,0)$
Σ_2: $x_{\mathrm{A}} = ct_{\mathrm{A}} = L + \upsilon t_{\mathrm{A}}$
Σ_3: $x_{\mathrm{B}} = -ct_{\mathrm{B}} = -L + \upsilon t_{\mathrm{B}}$
Τα γεγονότα Δ→Ε ($\Sigma_4 \equiv \Sigma_5 \equiv \Sigma_6 \equiv \Sigma_7$) ταυτίζονται.
Σ_4: $x_{\Delta} = x_{\mathrm{A}} - c\left(t_{\Delta} - t_{\mathrm{A}}\right) = x_{\mathrm{B}} + c\left(t_{\Delta} - t_{\mathrm{B}}\right)$
Λύνοντας το σύστημα,

$$t_{\mathrm{A}} = \frac{L / c}{1 - \upsilon / c}\ ,\ x_{\mathrm{A}} = \frac{L}{1 - \upsilon / c}\ ,\ t_{\mathrm{B}} = \frac{L / c}{1 + \upsilon / c}\ ,\ x_{\mathrm{B}} = \frac{L}{1 + \upsilon / c}$$

Επομένως, συναρτήσει του ιδιομήκους,
Β) $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = \dfrac{2L_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$

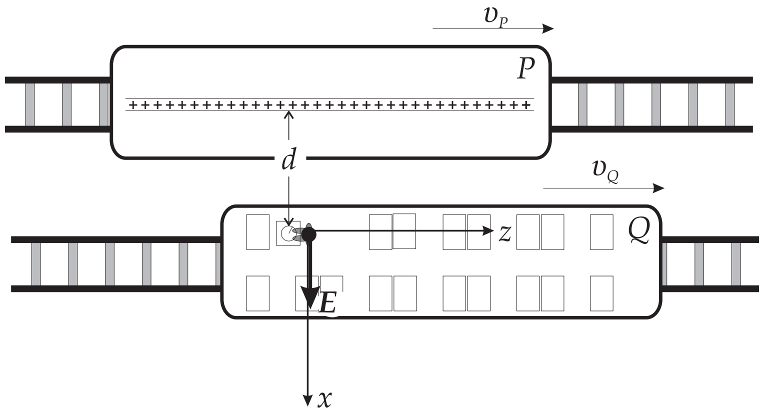
Γ) $t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}} = \dfrac{2L_0 \upsilon / c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$

Δ) Τα δύο φώτα επιστρέφουν στο μέσον Μ ταυτοχρόνως, άρα ΜΕ=0
Ε) και Ζ): 0, αφού τα γεγονότα Δ→Ε ($\Sigma_4 \equiv \Sigma_5 \equiv \Sigma_6 \equiv \Sigma_7$) ταυτίζονται.
Ομοίως, από το σύστημα,
Η) ΟΔ = $t_{\Delta} = \dfrac{2L_0 / c}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$

Θ) $x_\Delta = vt_\Delta = \dfrac{2L_0 v / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$

Παρατηρούμε οτι και στα δύο συστήματα αναφοράς τα φώτα που ξεκινούν ταυτοχρόνως από το μέσον του βαγονιού, μετά την ανάκλαση στα άκρα, επιστρέφουν ταυτοχρόνως στο μέσον. Αλλιώς θα υπήρχε τρόπος να καταλάβουμε ποιο σύστημα θα ήταν προνομιακά «ακίνητο». Απλώς, ως προς την Γη, επιστρέφουν εκεί που έχει πάει το μέσον.

Άσκηση 10



Θεωρώ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με τους άξονες x, z όπως στο Σχήμα και τον άξονα y κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού και φορά προς τα μέσα.

Α) Ο επιβάτης του τραίνου P θα έβλεπε στο σημείο παρατήρησης μόνο ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0, 0 \right)$$

Έστω ότι ο Q κινείται με ταχύτητα υ ως προς τον P τότε θα βλέπει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο τα οποία δίνονται από

$$\vec{B}' = \left\{ \gamma\left(B_x + \frac{\upsilon}{c^2} E_y \right), \gamma\left(B_y - \frac{\upsilon}{c^2} E_x \right), B_z \right\} = \left\{ 0, -\gamma \frac{\upsilon}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0 \right\} = \left\{ 0, -B_Q, 0 \right\} \quad (1)$$

$$\vec{E}' = \left\{ \gamma\left(E_x - \upsilon B_y \right), \gamma\left(E_y + \upsilon B_x \right), E_z \right\} = \left\{ \frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0, 0 \right\} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\gamma \frac{\upsilon}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{d} = \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\, c} \Rightarrow \gamma \frac{\upsilon}{c} = 3 \Rightarrow \frac{\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2} = 9 \Rightarrow \upsilon = \frac{3}{\sqrt{10}} c \approx 0.948c \quad (3)$$

Από τη σύνθεση ταχυτήτων, θεωρώντας Σ το ΣΑ της Γης και Σ' το σύστημα αναφοράς του τραίνου P, η ταχύτητα του τραίνου Q ως προς το Σ , αν αυτό κινείται με ταχύτητα υ ως προς το Σ' , δίνεται από

$$\upsilon_Q = \frac{\upsilon_P + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon_P \upsilon}{c^2}} \Rightarrow \upsilon = \frac{\frac{c}{5} + \frac{3}{\sqrt{10}} c}{1 + \frac{3}{5\sqrt{10}}} \Rightarrow \upsilon_Q = 0.965c$$

Β) Αντικαθιστώντας την ταχύτητα υ από την (3) στην (2) βρίσκουμε $\gamma = \sqrt{10}$ και

$$\vec{E}' = \left\{ \frac{\gamma \lambda}{2\pi\varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0, 0 \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{10}\, \lambda}{2\pi\ \varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0, 0 \right\} = \left\{ 1.58 \frac{\lambda}{\pi\ \varepsilon_o} \frac{1}{d}, 0, 0 \right\}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Αναλλοίωτα είναι όλα τα εσωτερικά γινόμενα τετρανυσμάτων (κατά αναλογία με την αναλλοίωτητα κάτω από στροφές στον τρισδιάστατο χώρο των εσωτερικών γινομένων διανυσμάτων).

Η τετραδιάστατη ορμή ορίζεται ως $\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \mathrm{E/c} \\ \mathrm{p_x} \\ \mathrm{p_y} \\ \mathrm{p_z} \end{pmatrix}$ και η θέση ως $\mathrm{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{ct} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$.

Το εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{p} \odot \mathrm{p}$ δίνει

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E/c} & \mathrm{p_x} & \mathrm{p_y} & \mathrm{p_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E/c} \\ \mathrm{p_x} \\ \mathrm{p_y} \\ \mathrm{p_z} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{c}^2} - \vec{p}^2 = m^2 \mathrm{c}^2$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{p} \odot \mathrm{r}$ δίνει

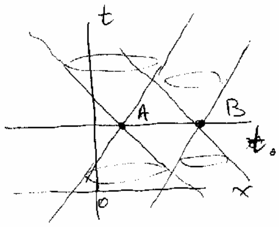
$$\begin{pmatrix} \mathrm{E/c} & \mathrm{p_x} & \mathrm{p_y} & \mathrm{p_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tc} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \mathrm{Et} - \left(\mathrm{p_x} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{p_y} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{p_z} \cdot \mathrm{z} \right) = \mathrm{Et} - \vec{\mathrm{p}} \cdot \vec{\mathrm{r}}$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{r} \odot \mathrm{r}$ δίνει

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tc} & \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tc} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \mathrm{t}^2 \mathrm{c}^2 - \vec{r}^2$$

2) Η ταχύτητα του φωτός c είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς σύμφωνα με το αξίωμα της ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας. Επίσης η μάζα ηρεμίας m είναι ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς καθώς η τιμή $\mathrm{m^2c^4}$ αντιστοιχεί στο μέτρο του τετρανύσματος της ορμής. Τα μεγέθη E, p, εξαρτώνται από το ΣΑ καθώς αποτελούν συνιστώσες του τετρανύσματος της ορμής.

3)



Ενα γεγονος $B\begin{pmatrix} t_0 \\ x_B \end{pmatrix}$ "ταυτόχρονο" με αλλο $A\begin{pmatrix} t_0 \\ x_A \end{pmatrix}$ ανηκει στο "αλλαχού" του A. Δεν υπαρχει φωτεινό (ή βραδύτερο) σημα που να μπορεί να τα συνδεσει ωστε το ενα να παρει "εντολή" από το αλλο για να πραγματοποιηθη. Ειναι παντοτε ανεξαρτητα μη δυναμενα να συσχετισθουν ως αιτιο-αποτελεσμα επει ειναι ταυτοχρονα σε καποιο συστημα αναφορας ενω σε αλλα το A προηγειται του B και σε αλλα το A επεται του B

Για να ειναι το B αποτελεσμα του A πρεπει να ανηκει στο μελλον του A ωστε να λαβει την εντολή με καποιο σημα ταχυτητος $u \leq c$

Τοτε $x_B = x_A \pm u(t_B - t_A)$ (αναλογως αν ειναι δεξιότερα ή αριστερότερα)

Τοτε σε κάποιοδηποτε Σ' που κινειται με ταχύτητα v, θα ειναι

$$\left.\begin{aligned} t'_B &= \gamma(t_B - v x_B/c^2) \\ t'_A &= \gamma(t_A - v x_A/c^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A)\left(1 - \frac{v}{c^2}\left(\frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}\right)\right)$$
$$= \gamma(t_B - t_A)\left(1 \mp \frac{vu}{c^2}\right)$$

Αλλά $uv < c^2$ Αρα $1 \pm \frac{uv}{c^2} > 0$ Αρα το $t'_B - t'_A$ εχει το προσημο του $t_B - t_A$. Αν το B ειναι αποτελεσμα του A $(t_B > t_A)$ στο Σ θα ειναι και σε οποιοδηποτε Σ'

4)Ως προς το σύρμα, το μήκος που καταλαμβάνουν Ν κινούμενα ηλεκτρόνια είναι μεν συνεσταλμένο, αλλά λόγω της ουδετερότητας, Ν πρωτόνια καταλαμβάνουν ίσο μήκος, δηλαδή οι πυκνότητες των θετικών και των αρνητικών φορτίων είναι ίσες και αντίθετες.
Ως προς το ηλεκτρόνιο, το μήκος που καταλαμβάνουν Ν κινούμενα πρωτόνια είναι συνεσταλμένο ως προς το ιδιομήκος που καταλαμβάνουν Ν ακίνητα ηλεκτρόνια (το οποίο χωράει και άλλα πρωτόνια), δηλαδή η πυκνότητα των θετικών φορτίων είναι μεγαλύτερη από των αρνητικών. Άρα το σύρμα, ως θετικά φορτισμένο, έλκει το εξωτερικό ηλεκτρόνιο.

5)
Α) Για την ακτίνα Schwartzchild έχουμε

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

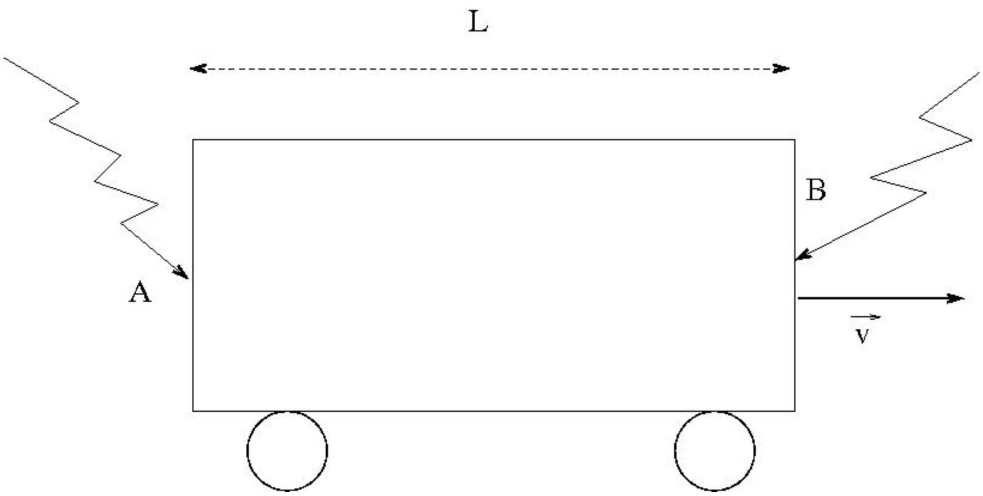
Η ακτίνα Schwartzschild του ήλιου είναι $r_s = 2.96Km$ ενώ του αστέρα νετρονίων $r_s = 4.4Km$.

Β) Από τη σχέση (8.2) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $r_s / r \ll 1$ σε πρώτη τάξη, οπότε $\left(1 - r_s / r\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{r_s}{2r}$, έχουμε

$$\Delta l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s / r}} \cong \int_{r_1}^{r_2} (1 + \frac{r_s}{2r}) dr = (r_2 - r_1) + \frac{r_s}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} = 1.3Km$$

Γιά τον ήλιο έχουμε $r_s << r_0$ και κατά συνέπεια $r_s / r << 1$. Μπορούμε να αγνοήσουμε τον τελευταίο όρο και έτσι $\Delta l \cong 1Km$, δεν υπάρχει πρακτικά καμπύλωση του χωρόχρονου.

ΑΣΚΗΣΗ



Παρατηρητής βλέπει ένα τρένο που κινείται με ταχύτητα v=0.9c στην κατεύθυνση +x να έχει μήκος L. Δύο κεραυνοί χτυπούν ταυτόχρονα το μπροστινό και πίσω μέρος του τρένου καθώς αυτό εισέρχεται στο σταθμό.

1. Ποιο είναι το μήκος του βαγονιού σύμφωνα με ένα ταξιδιώτη, ακίνητο μέσα στο τρένο;
2. Ποιος κεραυνός χτυπάει πρώτα το τρένο σύμφωνα με τον παραπάνω ταξιδιώτη; Με ποια διαφορά χρόνου;
3. Σε ποιο σημείο του τρένου πρέπει να κάθεται ο ταξιδιώτης για να δει τις δύο λάμψεις ταυτόχρονα;
4. Σε ποιο σημείο της αποβάθρας βλέπει ο σταθμάρχης τις δύο λάμψεις ταυτόχρονα;

Θεωρήστε ότι το γεγονός Α έχει συντεταγμένες $(x_A, t_A) = (0{,}0)$ στο σύστημα αναφοράς της αποβάθρας και $(x'_A, t'_A) = (0{,}0)$ στο σύστημα αναφοράς του τρένου.

ΛΥΣΗ

1. Το μήκος ηρεμίας L_0 του τρένου έχει συσταλεί κατά $L = L_0 / \gamma$. Άρα $L_0 = \gamma L = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} L = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.9^2}} L \approx 2.294 L$
2. Ορίζουμε τα γεγονότα Α={κεραυνός χτυπάει το πίσω μέρος του τρένου} και Β={κεραυνός χτυπάει το μπρος μέρος το τρένου} με $(x_A, t_A) = (0{,}0)$ και $(x_B, t_B) = (L{,}0)$. Από τους μετασχηματισμούς Lorentz, για τους ταξιδιώτες οι συντεταγμένες των γεγονότων είναι $x'_A = \gamma(x_A - vt) = \gamma(0 - v0) = 0$,

$ct'_A = \gamma(ct_A - (v/c)x_A) = \gamma(c0 - (v/c)0) = 0$ και
$x'_B = \gamma(x_B - vt_B) = \gamma(L - v0) = \gamma L$,
$ct'_B = \gamma(ct_B - (v/c)x_B) = \gamma(c0 - (v/c)L) = -\gamma vL/c \Rightarrow t'_B = -\gamma vL/c^2$.
Άρα ο κεραυνός πέφτει πρώτα στο μπροστινό μέρος του τρένου σύμφωνα με του ταξιδιώτες με διαφορά χρόνου
$\Delta t' = t'_A - t'_B = \gamma(v/c)L/c \approx 2.294 \times 0.9 \times L/c \approx 2.065(L/c)$.

3. Έστω ότι ο ταξιδιώτης κάθεται σε απόσταση x από το πίσω μέρος του τρένου (σύμφωνα με το δικό του σύστημα αναφοράς). Τότε η λάμψη ταξιδεύει για χρόνο $t_1 = x/c$ από το πίσω μέρος του τρένου και $t_2 = (L_0 - x)/c = (\gamma L - x)/c$. Για να φτάσουν ταυτόχρονα στον παρατηρητή θα πρέπει
$t_1 + 0 = t_2 + t'_B \Rightarrow x/c = (\gamma L - x)/c - \gamma vL/c^2 = -(x/c) + \gamma(L/c)(1 - v/c)$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\gamma L(1 - v/c) \approx 0.5 \times 2.294 \times 0.1L \approx 0.1147L$
4. Στο μέσο του τρένου $x_0 = L/2$ (στο σύστημα αναφοράς της αποβάθρας).