22/3/2010

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2009-10

5η ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 4/5/10

Άσκηση 1

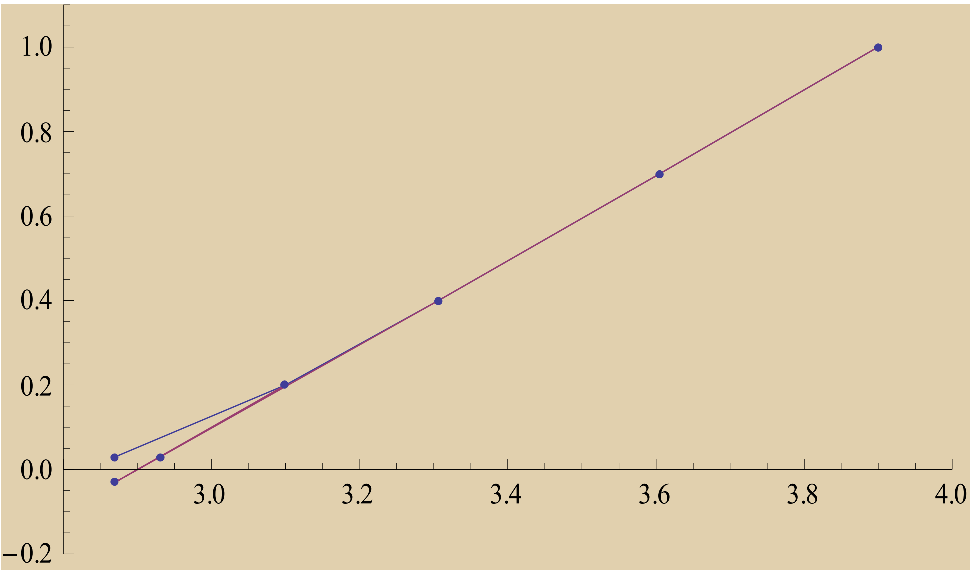
Οι μετρήσεις πρέπει να υπακούουν την εξίσωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

$$Ve = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1240(eV.nm)}{\lambda(nm)} - \phi(eV)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε τον πίνακα

h f (cV)	3.9	3.6	3.3	3.1	2.87
V (Volt)	1.0	0.7	0.4	0.2	0.03

με την εξής γραφική παράσταση:



Βλέπουμε οτι όλα τα σημεία, πλήν του αριστερού (τελευταίου στον πίνακα), κείνται σε ευθεία, όπου το μήκος κύματος λ = 432 nm θα αντιστοιχούσε σε αρνητική κινητική ενέργεια, άρα είναι λάθος.

Η συχνότητα κατωφλίου h fκ = 2.9 eV (λκ =1240 eV nm / 2.9 eV= 428 nm)

Η εξίσωση επομένως είναι $Ve = hf - hf_k = hf - 2.9eV$, από την οποία φαίνεται ότι το έργο εξαγωγής είναι 2.9 eV. (Συναρτήσει του hf η κλίση είναι 45ο, και η ευθεία τέμνει τον άξονα V στην τιμή $-\phi = -2.9eV$).

Η μετρηθείσα τιμή 0.03 V αντιστοιχεί σε $hf = 2.93eV$ (λ = 423 nm)

Ο φοιτητής έγραψε 432 αντί 423 nm.

Άσκηση 2

Α)

Η φασματική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση $d\epsilon = u(\lambda,T)d\lambda$ όπου ϵ είναι ενέργεια ανά μονάδα όγκου. Άρα η $u(\lambda,T)$ έχει μονάδες $\frac{[E]/[L]^3}{[L]} = [E][L]^{-4}$ (ως $[E]$ εννοούμε τη μονάδα ενέργειας). Η σταθερά του Planck μετριέται σε μονάδες δράσης $[E][T]$. Η ταχύτητα του φωτός σε μονάδες $[L][T]^{-1}$. Η θερμοκρασία σε συνδυασμό με τη σταθερά του Boltzman (kT) είναι κλίμακα θερμικής ενέργειας και μετριέται σε $[E]$. Η σταθερά $\frac{h^4c^4}{8\pi(kT)^5}$ μετριέται σε $\frac{([E][T])^4([L][T]^{-1})^4}{[E]^5} = [E]^{-1}[L]^4$ οπότε η $\widetilde{u}(\lambda,T)$ μετριέται σε $([E]^{-1}[L]^4)([E][L]^{-4}) \sim 1$, άρα είναι αδιάστατη ποσότητα.

Β)

Αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται παίρνουμε $\widetilde{u}(\lambda,T) = \frac{h^4c^4}{8\pi(kT)^5}u(\lambda,T) = \left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^5 \frac{1}{\exp\left\{\frac{hc}{\lambda kT}\right\}-1} = \frac{x^5}{e^x-1}$ όπου ορίσαμε την **αδιάστατη** μεταβλητή $x = \frac{hc}{\lambda kT}$. Το ζητούμενο ανάπτυγμα θα το πάρουμε αναπτύσσοντας κατά Taylor τον παρονομαστή για $x \ll 1$.Αυτό συμβαίνει όταν $kT \gg \frac{hc}{\lambda}$, δηλ. όταν για δεδομένο μήκος κύματος των φωτονίων, η τυπική θερμική κλίμακα ενέργειας kT είναι πολύ μεγαλύτερη συγκρινόμενη με την ενέργεια των φωτονίων αυτών.

Γ)

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $\frac{x^5}{e^x-1}$ γύρω από το σημείο $x=0$. Οι πράξεις γίνονται απλούστερες χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα αναπτύγματα $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = x(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots)$ και $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \ldots$. Παίρνουμε τότε $\frac{x^5}{e^x-1} = \frac{x^5}{x\left\{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\ldots\right\}}$

$$= x^4\left\{1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+\ldots\right\} = x^4\left\{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+\ldots\right\}$$

$$= x^4\left\{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\ldots\right\} = x^4 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{12} + \ldots$$

$= \frac{(hc/kT)^4}{\lambda^4} - \frac{(1/2)(hc/kT)^5}{\lambda^5} + \frac{(1/12)(hc/kT)^6}{\lambda^6} + \ldots$ από όπου διαβάζουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις $\widetilde{u}_0(T) = \left(\frac{hc}{kT}\right)^4$, $\widetilde{u}_1(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{hc}{kT}\right)^5$ και $\widetilde{u}_2(T) = \frac{1}{12}\left(\frac{hc}{kT}\right)^6$. Εφόσον η συνάρτηση $\widetilde{u}(\lambda,T)$ είναι αδιάστατη, τότε και κάθε όρος στο ανάπτυγμα πρέπει να είναι αδιάστατος. Άρα οι συναρτήσεις $\widetilde{u}_i(T)$ μετριώνται στις ίδιες μονάδες με τους αντίστοιχους παρονομαστές δηλ. $[L]^4, [L]^5, [L]^6, \ldots$ Αυτό ελέγχεται και με απευθείας αντικατάσταση.

Δ)

Κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο στο παραπάνω ανάπτυγμα, παίρνουμε

$$u(\lambda,T)=\frac{8\pi(kT)^5}{h^4c^4}\,\tilde{u}(\lambda,T)\approx\frac{8\pi(kT)^5}{h^4c^4}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^4=\frac{8\pi kT}{\lambda^4}.$$

Άσκηση 3

Αν η ενέργεια είναι $E = a\Phi = 0.4\Phi$, η πιθανότητα διελεύσεως (εξ. 6.9, 6.10 σελ. 205) ισούται με

$$T(E)=16a(1-a)e^{-\left(2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\Phi}\sqrt{1-a}\right)L}$$

άρα $$\frac{T_1}{T_2}=\frac{16a(1-a)e^{-\left(2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\Phi}\sqrt{1-a}\right)L_1}}{16a(1-a)e^{-\left(2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\Phi}\sqrt{1-a}\right)L_2}}=e^{\left(2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\Phi}\sqrt{1-a}\right)(L_2-L_1)}$$

Επομένως

$$\Phi=\frac{\hbar^2}{8m(1-a)}\left[\frac{\ln\left(T_1/T_2\right)}{\left(L_2-L_1\right)}\right]^2\Rightarrow$$

$$\Phi=\frac{\left(6.582\times10^{-16}eV\,s\right)^2}{8\times0.511\times10^6eV/\left(3\times10^8m/s\right)^2}\frac{(\ln 20)^2}{\left(3\times10^{-10}m\right)^2(1-0.4)}=1.58eV$$

Άσκηση 4

Α) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$E_{\text{ΠΡΙΝ}}=E_{\text{ΜΕΤΑ}}\Rightarrow E_\phi+m_pc^2=E_\phi'+E_p \quad (1)$$

όπου E_ϕ, E_ϕ' οι ενέργειες του φωτονίου πριν και μετά τη σκέδαση, $m_pc^2 = 938.28\,\text{MeV}$ η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου, και E_p η ενέργεια του πρωτονίου μετά την ανάκρουση. Θέτοντας τα δεδομένα στην (1) βρίσκουμε $E_\phi' = 180.84\,\text{MeV}$ από την οποία υπολογίζουμε το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου, $\lambda'=\dfrac{c}{f'}=\dfrac{hc}{E_\phi'}=\dfrac{4.136\times10^{-15}\cdot2.9979\times10^8}{180.84\times10^6}\left[\dfrac{\text{eV}\cdot\text{s}\cdot\text{m}}{\text{eV}\cdot\text{s}}\right]=6.86\times10^{-15}\,\text{m}$.

Β) Το μήκος κύματος του φωτονίου πριν από τη σκέδαση είναι $\lambda_0=\dfrac{c}{f}=\dfrac{hc}{E_\phi}=\dfrac{4.136\times10^{-15}\cdot2.9979\times10^8}{200\times10^6}\left[\dfrac{\text{eV}\cdot\text{s}\cdot\text{m}}{\text{eV}\cdot\text{s}}\right]=6.20\times10^{-15}\,\text{m}$, οπότε

εφαρμόζοντας τη σχέση Compton (με αντικατάσταση του m_e από το m_p) έχουμε

$$\lambda'-\lambda_0=\frac{h}{m_pc}\left(1-\cos\theta\right)\Rightarrow1-\cos\theta=\frac{m_pc^2}{hc}\left(\lambda'-\lambda_0\right)\quad(2)$$

και με αντικατάσταση,

$$1-\cos\theta=\frac{938.28\times10^6}{4.136\times10^{-15}\cdot2.9979\times10^8}0.66\times10^{-15}\approx0.5\Rightarrow\theta=60^\circ.$$

Γ) Από τη διατήρηση της ορμής στη διεύθυνση y (όπου x θεωρούμε την διεύθυνση του φωτονίου πριν τη σκέδαση) έχουμε (σχέση 2.31 Serway-Moses)

$$0 = p_\phi' \sin\theta - p_p \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{p_\phi'}{p_p}\sin\theta \quad (3)$$

όπου $p_\phi' = E_\phi'/c$ η ορμή του σκεδαζόμενου φωτονίου, και p_p η ορμή του πρωτονίου μετά την ανάκρουση. Ισχύει
$E_p{}^2 = p_p{}^2c^2 + m_p{}^2c^4 \Rightarrow p_p c = \sqrt{E_p{}^2 - m_p{}^2c^4} = 190.58\,\text{MeV}$, οπότε με αντικατάσταση στην (3) έχουμε

$$\sin\varphi = \frac{p_\phi'}{p_p}\sin\theta = \frac{p_\phi' c}{p_p c}\sin\theta = \frac{E_\phi'}{p_p c}\sin\theta = \frac{180.84}{190.58}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.82 \Rightarrow \varphi = 55°.$$

Άσκηση 5

Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας του Bohr (3.28) και (3.30) του βιβλίου των Serway-Moses μετά την αντικατάσταση της μάζας m από την ανηγμένη μάζα μ του ποζιτρόνιουμ η οποία δίνεται από

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_e} \Rightarrow \mu = \frac{m_e}{2}$$

Α) Από την (3.28) βρίσκουμε

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{2m_e ke^2} = 1.06\,\text{Å}\; n^2,\; n = 1,2,3,\ldots$$

Β) Από την (3.30) βρίσκουμε

$$E_n = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{6.80}{n^2}\text{eV},\; n = 1,2,3,\ldots$$

Γ) Η βασική κατάσταση έχει ενέργεια $E_0 = \text{-}6.80$ eV

Δ) Τα μήκη κύματος του φάσματος εκτομπής δίνονται από την (3.33)

$$\frac{1}{\lambda_{i\to f}} = \frac{n^2\hbar^2}{2m_e ke^2 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \Rightarrow \lambda_{i\to f} = \frac{182\text{nm}}{\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}}$$

Παρατηρούμε ότι στη φασματική σειρά Balmer ($n_f = 2$) και $n_i \geq 8$ αντιστοιχεί σε ακτινοβολία ορατού (κόκκινο) θεωρώντας το φάσμα της ορατής ακτινοβολίας στην περιοχή 390-780 nm (βλ Alonso και Finn σελ 121).

Άσκηση 6

Α)Η σταθερά A μπορεί να προσδιοριστεί από την κανονικοποίηση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi(x)|^2 = 1 \Rightarrow A^2\int_{-\infty}^{0} dx\; e^{2x/a} + A^2\int_{0}^{+\infty} dx\; e^{-2x/a} = 1 \Rightarrow A^2 a = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

Η αβεβαιότητα υπολογίζεται ως εξής

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\left|\psi(x)\right|^2 = A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, x\, e^{2x/a} + A^2\int_{0}^{+\infty} dx\, x\, e^{-2x/a} = A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, x\, e^{2x/a} - A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, x\, e^{2x/a} = 0$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\left|\psi(x)\right|^2 = A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, x^2\, e^{2x/a} + A^2\int_{0}^{+\infty} dx\, x^2\, e^{-2x/a} = 2A^2\int_{0}^{+\infty} dx\, x^2\, e^{-2x/a} = \frac{a^3A^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \delta = a/\sqrt{2}$$

Επομένως $a = \sqrt{2}\delta$ και $A = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}\delta}}$

Β) Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Shroedinger για $x > 0$ με $V = 0$ παίρνουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2ma^2}A\,e^{-x/a} = EA\,e^{-x/a} \Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{\hbar^2}{4m\delta^2}$$

Γ)

$$P = \int_{-a}^{+a} dx\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} dx\; e^{2x/a} + \frac{1}{a}\int_{0}^{+a} dx\; e^{-2x/a} = +\frac{2}{a}\int_{0}^{+a} dx\; e^{-2x/a} = -\,e^{-2x/a}\Big|_0^a$$

$$= \left(1 - e^{-2}\right) = 0.86 = 86\%$$

Άσκηση 7

Α) Η κυματοσυνάρτηση είναι λύσης της εξίσωσης του Schoedinger (Serway 41.21).

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar}\left[E - V(x)\right]\psi \quad (1)$$

Στην περιοχή $-\infty < x < 0$, $V(x) = V_0$ και $E < V_0$ ορίζουμε $k = \sqrt{\dfrac{2m\left(V_0 - E\right)}{\hbar}}$ και η (1)

παίρνει τη μορφή

$$\psi_I''(x) = k^2\psi_I(x)$$

με γενική λύση

$$\psi_I = A\,e^{kx} + Be^{-kx}$$

Στην περιοχή $0 < x < L$ το δυναμικό είναι ίσο με $V(x) = 0$ και καθώς $0 < E < V_0$ η (1)

γράφεται ως

$$\psi_{II}''(x) = -K^2\psi_{II}(x)$$

με $K = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar}}$. Η γενική λύση είναι

$$\psi_{II} = C\sin Kx + D\cos Kx$$

Στην περιοχή $x > L$ η λύση είναι της μορφής

$$\psi_{III}(x) = 0$$

Στην περιοχή (I) θα πρέπει να έχουμε πεπερασμένη λύση καθώς το $x \to -\infty$, άρα B=0.

Οι οριακές συνθήκες, που επιβάλλονται από τη συνέχεια της κυματοσυνάρτησης στο $x = L$ και τη συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου της στο $x = 0$, είναι

$$\begin{aligned}\psi_{II}(L) &= 0\\ \psi_I(0) &= \psi_{II}(0)\\ \psi'_I(0) &= \psi'_{II}(0)\end{aligned}$$

οι οποίες επιβάλλουν αντίστοιχα

$$C\sin KL + D\cos KL = 0 \qquad (2)$$

$$A = D \qquad (3)$$

$$k\,A = K\,C \qquad (4)$$

Από τις (2) και (3) προσδιορίζουμε τις δύο σταθερές που υπεισέρχονται στην κυματοσυνάρτηση

$$A = D = -\tan(KL)C \qquad (5)$$

ενώ ή σταθερά A προσδιορίζεται από την κανονικοποίηση. Επομένως

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx},\ x<0 \\ A\left[-\dfrac{\sin(K\,x)}{\tan(K\,L)} + \cos(K\,x)\right], 0<x<L \\ 0,\ x>L \end{cases}$$

Μπορούμε μάλιστα να αναπτύξουμε στην περιοχή $0<x<L$

$$A\left[-\frac{\sin(K\,x)}{\tan(K\,L)} + \cos(K\,x)\right] = \frac{A}{\sin(K\,L)}\left[-\sin(K\,x)\cos(K\,L) + \cos(K\,x)\sin(K\,L)\right] =$$

$$= \frac{A}{\sin(K\,L)}\sin\left[K(L-x)\right]$$

και τελικά

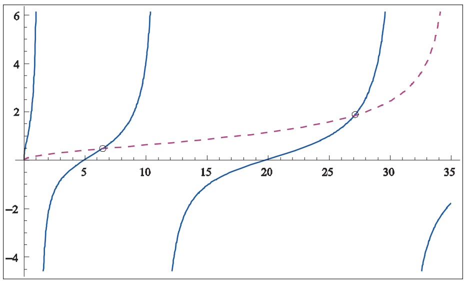
$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx},\ x\le 0 \\ A\dfrac{\sin\left[K(L-x)\right]}{\sin(K\,L)}, 0\le x\le L \\ 0,\ x\ge L \end{cases}$$

B) Από τις (4) και (5) βρίσκουμε

$$\tan(KL) = -\frac{K}{k} \Rightarrow \tan\left[L\sqrt{\frac{2m\,E}{\hbar}}\right] = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}} \qquad (6)$$

η λύση της οποίας προσδιορίζει τις δυνατές τιμές της ενέργειας.

Γ) Οι δυνατές τιμές της ενέργειας περιορίζονται από το ελάχιστο του δυναμικού $E>0$ και από την (6) η οποία έχει διακριτές λύσεις. Για να την μελετήσουμε μπορούμε να θέσουμε $m = \hbar = L = 1$ από διαστατική ανάλυση και να κάνουμε γραφική παράσταση των δύο μελών της



εξίσωσης (6) για διάφορες τιμές του V_0. Στο διπλανό Σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση για $V_0 = 35$ όπου με διακεκομμένη σχεδιάζουμε το δεύτερο μέλος και παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο σημεία τομής άρα δύο λύσεις (η λύση $E = 0$ δεν είναι αποδεκτή).

Άσκηση 8

(Α) Από την εξίσωση (5.25) του βιβλίου Serway e al. έχουμε για το αριστερό μέλος

$$\frac{d\psi}{dx} = C\left(1 - 2\alpha x^2\right)e^{-\alpha x^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = C\left(4\alpha^2 x^3 - 6\alpha x\right)e^{-\alpha x^2}$$

Εξισώνοντας με το δεξί μέλος, βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Πρόκειται εμφανώς για την πρώτη διεγερμένη κατάστασης του αρμονικού ταλαντωτή.

(Β) Η κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης απαιτεί

$$C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} = 1$$

Για το ολοκλήρωμα βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d(2\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d(2\alpha)} \pi^{1/2} (2\alpha)^{-1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{2} (2\alpha)^{-3/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{3/2}$$

Τελικά

$$C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{3/4}$$

(Γ) Ισχύει

$$\frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

άρα

$$A = \sqrt{\frac{3\hbar}{m\omega}}$$

(Δ) Όπως και στην σελ. 182 του βιβλίου Serway et al. έχουμε

$$P_1 = 2C^2 \int_A^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 4\pi \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{3/2} \int_{\left(\frac{3\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}}^{\infty} x^2 e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x^2} dx = \frac{4}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy$$

$$\cong \frac{4}{1.7725} 0.0495 = 0.1117 \cong 0.11$$

Περίπου δηλαδή το 11%. Ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για τη βασική κατάσταση σύμφωνα με το βιβλίο των Serway et al. Είναι $P_0 \approx 0.16$

Άσκηση 9

Να υπολογισθεί η ελάχιστη κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου και να συγκριθεί με την αντίστοιχη ελάχιστη κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται εγκλωβισμένο σε σφαιρικό κουτί ακτίνας a_0 (ακτίνα Bohr). Να γίνουν τα ακόλουθα βήματα:

Α) Να υπολογισθούν οι ποσότητες $< r >$ και $< r^2 >$ και απο αυτες η διακύμανση $\Delta r^2 =< r^2 > - < r >^2$ για την θεμελιώδη κατάσταση του υδρογόνου.

Β)Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας ισχύει $\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \Delta r^2 / 3$. Να υπολογισθούν οι αβεβαιότητες στις ορμές και από αυτές και την αρχή του Heisenberg να υπολογισθεί η ελάχιστη κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στην κατάσταση αυτή.

Γ) Για ένα ηλεκτρόνιο σε σφαιρικό κουτί ακτίνας a_0, η πυκνότητα πιθανότητας είναι σταθερή (και κανονικοποιημένη). Να γίνουν οι αντίστοιχοι υπολογισμοί και να συγκριθούν οι δύο ελάχιστες κινητικές ενέργειες.

Λύση

Α) Για τη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου υδρογόνου έχουμε (Serway et al. εξισ. 7.25)

$$P(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}$$

Έχουμε $< r > = \frac{3}{2} a_0$ (Παραδ. 7.8) και $< r^2 > = \int_0^{\infty} P(r) r^2 dr = 3a_0^2$ και κατά συνέπεια

$$\Delta r^2 = \frac{3}{4} a_0^2$$

Β) Από την σχέση απροσδιοριστίας του Heisenberg έχουμε

$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, κλπ για y, z. Ισχύει

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \frac{\Delta r^2}{3} = \frac{a_0^2}{4}$$

Άρα, $\Delta p_x^2 \geq \frac{4\hbar^2}{4a_0^2} = \frac{\hbar^2}{a_0^2}$, κλπ ή

$$\frac{\Delta p_x^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma_0^2}$$

Τελικά, η κινητική ενέργεια δίνεται από $T \geq \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{ma_0^2}$

Γ) Τώρα έχουμε

$$P(r) = \frac{4\pi r^2}{4\pi a_0^3/3} = \frac{3r^2}{a_0^3}$$

παρατηρούμε ότι η παραπάνω πιθανότητα είναι κανονικοποιημένη στην σφαίρα ακτίνας a_0. Αντίστοιχα βρίσκουμε

$$<r>= \int_0^{a_0} P(r) r dr = \frac{3}{4}a_0$$

και

$$<r^2>= \int_0^{a_0} P(r) r^2 dr = \frac{3}{5}a_0^2$$

και κατα συνέπεια

$$\Delta r^2 = <r^2> - <r>^2 = \frac{3}{80}a_0^2$$

Ισχύει αντίστοιχα

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \frac{\Delta r^2}{3} = \frac{a_0^2}{80}$$

$$\Delta p_x^2 \geq \frac{80\text{h}^2}{4a_0^2} = \frac{20\text{h}^2}{a_0^2}$$

Τελικά

$$T \geq \frac{3}{2}\frac{20\hbar^2}{a_0^2}$$

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη κινητική ενέργεια είναι στην δεύτερη περίπτωση αρκετά μεγαλύτερη.

Άσκηση 10

Α) Η ενέργεια υδρογονοειδούς ατόμου είναι

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\} = (-13.6\text{eV})\frac{Z^2}{n^2}, \quad n = 1,2,3,...$$

και επομένως αφού δίνεται ότι $n = 2$ βρίσκουμε $Z^2 = -\frac{En^2}{13.6} = 16 \Rightarrow Z = 4$, οπότε συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για το ιόν Be^{+3}.

Β) Ο κβαντικός αριθμός της τροχιακής στροφορμής είναι $\ell = 1$, οπότε το μέτρο της είναι $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar \Rightarrow L = 9.308 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}$. Οι επιτρεπόμενες τιμές του κβαντικού αριθμού m_ℓ είναι 1, 0, -1 και άρα οι αντίστοιχες γωνίες μεταξύ του διανύσματος της στροφορμής και δεδομένου άξονα z στον οποίο μετράμε την προβολή L_z είναι

$$\cos\vartheta = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \begin{cases} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \begin{cases} 45° \\ 90° \\ 135° \end{cases}$$

Γ) Η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας είναι $\langle K \rangle = E - \langle U \rangle$, όπου $U(r) = -\frac{kZe^2}{r}$ η δυναμική ενέργεια, η μέση τιμή της οποίας δίνεται από τη σχέση 7.29

$\langle U \rangle = \int_0^\infty U(r) \cdot r^2 \cdot |R_{21}(r)|^2\, dr$. Από τον πίνακα 7.3 έχουμε

$$R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{\sqrt{3}a_0} e^{-Zr/2a_0}, \text{ άρα}$$

$\langle U \rangle = -kZe^2 \int_0^\infty r \cdot \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^3 \frac{Z^2 r^2}{3a_0{}^2} e^{-Zr/a_0} dr = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{Z^6}{12a_0{}^4}\int_0^\infty r^3 e^{-Zr/a_0} dr$. Θέτοντας $x = Zr/a_0 \Rightarrow r = a_0 x/Z$, έχουμε

$\langle U \rangle = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{Z^6}{12a_0{}^4}\frac{a_0{}^4}{Z^4}\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{Z^2}{12}3! = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{Z^2}{2}$. Θέτοντας Z=4 από το Α) ερώτημα, βρίσκουμε $\langle U \rangle = -13.6\frac{4^2}{2}\text{eV} = -108.8\,\text{eV}$, και επομένως $\langle K \rangle = 54.4\,\text{eV}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η πιθανότητα έχει 3 μέγιστα, άρα ευρίσκεται στην 3η διεγερμένη κατάσταση, $6L = 3(\lambda/2) \Rightarrow \lambda = 4L$.

Η κυματοσυνάρτηση είναι $\psi(x) = \psi_0 \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$

Η ενέργειά του είναι $\frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2}{32mL^2}$

Η ενέργεια της βασικής κατάστασης, όπου $6L = (\lambda/2) \Rightarrow \lambda = 12L$, είναι

$\frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2}{288mL^2}$.

Άρα η ενέργεια διεγέρσεως είναι $\frac{h^2}{32mL^2} - \frac{h^2}{288mL^2} = \frac{h^2}{36mL^2}$

2)

Α) Δεν είναι αποδεκτή γιατί απειρίζεται για $x \to -\infty$

Β) Δεν είναι αποδεκτή καθώς δεν είναι συνεχής στο $x = 0$

Γ) Είναι αποδεκτή καθώς είναι συνεχής παντού και μηδενίζεται στα όρια $x \to \pm\infty$ και το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)| = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$ είναι πεπερασμένο

3) Η ενέργεια της στάσιμης κατάστασης με κβαντικούς αριθμούς n_1, n_2, n_3 δίνεται σύμφωνα με τον τύπο (7.8) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer από

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος $L = 10^{-10}\,\text{m}$, $\text{m}=1.673\times10^{-27}\text{kg}$ βρίσκουμε

$$0.278\text{eV}\times1.602\times10^{-19}\text{J/eV} = \frac{\pi^2\left(1.055\times10^{-34}\,\text{J s}\right)^2}{2\times1.673\times10^{-27}\,\text{kg}\times\left(10^{-15}\,\text{m}\right)^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \approx 14$$

Το οποίο ισχύει για $\left(n_1, n_2, n_3\right) = \left(1,2,3\right), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$

Επομένως ο εκφυλισμός της κατάστασης είναι 6.

4)Ισχύει

$$\frac{q}{q_1} = \frac{\upsilon + \upsilon'}{\upsilon + \upsilon_1'} = \frac{\upsilon + \upsilon'}{\upsilon + 2\upsilon'} = \frac{1 + \upsilon'/\upsilon}{1 + 2\upsilon'/\upsilon} = \frac{1 + 1/2}{1+1} = 3/4$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\upsilon + \upsilon_1'}{\upsilon + \upsilon_2'} = \frac{\upsilon + 2\upsilon'}{\upsilon + 3\upsilon'} = \frac{1 + 2\upsilon'/\upsilon}{1 + 3\upsilon'/\upsilon} = \frac{1 + 2/2}{1 + 3/2} = 4/5$$

κλπ. Εφόσον τα πηλίκα φορτίων είναι ίσα με λόγους μικρών αριθμών, οι τιμες είναι συμβατές με την κβαντιση του φορτίου.

5) Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 42 του βιβλίου του Serway σε μια στάσιμη κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου οι τιμές των παρακάτω ποσοτήτων

	Ποσότητα	**Καθορισμένη τιμή**
(i)	Κινητική ενέργεια	ΟΧΙ
(ii)	Θέση	ΟΧΙ
(iii)	Μέτρο θέσης	ΟΧΙ
(iv)	Δυναμική ενέργεια	ΟΧΙ
(v)	Ορμή	ΟΧΙ
(vi)	Μέτρο ορμής	ΟΧΙ
(vii)	Συνολική ενέργεια	ΝΑΙ, $E_n = -\frac{13.6}{n^2} eV, n = 1,2,3\ldots$
(viii)	Στροφορμή	ΟΧΙ, (μόνο μια συνιστώσα)
(ix)	Μέτρο στροφορμής	ΝΑΙ, $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \ell = 0,1,\ldots,n-1$