6/5/2010

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2009-10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 6ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 8/6/10

Άσκηση 1

Α) Οι ενεργειακές στάθμες του μοναδιάστατου πηγαδιού δυναμικού δίνονται από τη σχέση (5.17) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2},\ n = 1,2,\ldots$$

Λόγω της απαγορευτικής αρχής σε κάθε ενεργειακή στάθμη μπορούν να τοποθετηθούν δύο ηλεκτρόνια με αντιπαράλληλα σπιν επομένως στη βασική κατάσταση τα επτά ηλεκτρόνια θα τοποθετηθούν από δυο στις στάθμες με $n = 1,2,3$ και ένα στη στάθμη με $n = 4$ και η ενέργεια του συστήματος θα δίνεται από

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(2\times1^2 + 2\times2^2 + 2\times3^2 + 1\times4^2\right) = 22\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

Β) Για το κουτί δυναμικού πλευράς L οι ενεργειακές στάθμες δίνονται από από τη σχέση (7.8) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer

$$E_{n_1n_2n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right),\ n_1 = 1,2,\ldots,n_2 = 1,2,\ldots,n_3 = 1,2,\ldots$$

στη βασική κατάσταση τα ηλεκτρόνια θα τοποθετηθούν δύο στη στάθμη $\left(n_1,n_2,n_3\right) = \left(1,1,1\right)$ και τα υπόλοιπα πέντε στην επόμενη η οποία έχει εκφυλισμό 3 και $\left(n_1,n_2,n_3\right) = (1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$. Η ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left[2\times3 + 5\times6\right] = 18\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

Άσκηση 2

Α) Για κάθε ηλεκτρόνιο, $i = 1,2$ είναι **J**$\mathbf{J_i}=\mathbf{L_i}+\mathbf{S_i}$, όπου $l_i = 1, s_i = \frac{1}{2}$.

$$j_i = l_i + s_i,\ldots,\left|l_i - s_i\right| = 1 + \tfrac{1}{2},\ldots,1 - \tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad j_i = \tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

Για $j_i = \frac{3}{2}$, οι δυνατές τιμές του $m_i = \frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-3}{2}$.

Για $j_i = \frac{1}{2}$, οι δυνατές τιμές του $m_i = \frac{1}{2},\frac{-1}{2}$.

Β) Η ολική στροφορμή $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$ μπορεί να έχει κβαντικούς αριθμούς $j = j_1 + j_2,\ldots,\left|j_1 - j_2\right|$, και για κάθε j, $m = j,\ldots,-j$.

α) Όταν (από (1)) $j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{3}{2}, \Rightarrow j_1 + j_2 = 3,\ \left|j_1 - j_2\right| = 0, \Rightarrow j = 3,2,1,0$, οπότε

για $j = 3, \Rightarrow m_j = 3,2,1,0,-1,-2,-3$,

για $j = 2, \Rightarrow m_j = 2,1,0,-1,-2$,

για $j = 1, \Rightarrow m_j = 1,0,-1$ και

για $j = 0, \Rightarrow m_j = 0$.

β) Όταν (από (1)) $j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{1}{2}, \Rightarrow j_1 + j_2 = 2,\ \left|j_1 - j_2\right| = 1, \Rightarrow j = 2{,}1$, οπότε

για $j = 2, \Rightarrow m_j = 2,1,0,-1,-2$ και

για $j = 1, \Rightarrow m_j = 1,0,-1$.

γ) $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2}, \Rightarrow j_1 + j_2 = 1,\ \left|j_1 - j_2\right| = 0, \Rightarrow j = 1{,}0$

για $j = 1, \Rightarrow m_j = 1,0,-1$

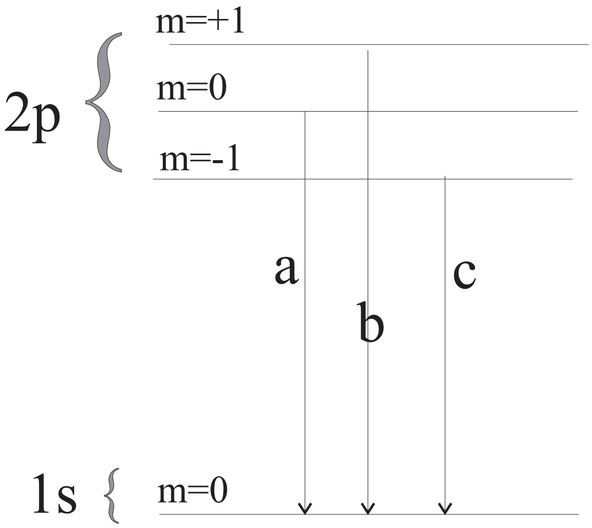
για $j = 0, \Rightarrow m_j = 0$.

Γ) Αν n ≠ n', η μέγιστη δυνατή τιμή του $m_j = 3$, οπότε $J_z = 3\hbar$, και $J = \sqrt{3 \cdot 4}\hbar = \sqrt{12}\hbar$.

Αν n = n', η τιμή $m_j = 3$ προέρχεται από $j_1 = j_2 = \frac{3}{2},\ m_1 = m_2 = \frac{3}{2}$, και απαγορεύεται από την απαγορευτική αρχή του Pauli. Οπότε το μέγιστο επιτρεπτό $m = 2$. Τούτο μπορεί να προέρχεται είτε από $j = 3$ είτε από $j = 2$. Αλλά αν $j = 3$, τότε το $m = 2$ προέρχεται από «αντιπαράλληλα» σπίν, ενώ η εκφώνηση δίνει «ομοπαράλληλα», οπότε το $j = 3$ αποκλείεται.

Επομένως, αν n = n', τότε η μέγιστη δυνατή τιμή του $J_z = 2\hbar$, και $J = \sqrt{2 \cdot 3}\hbar = \sqrt{6}\hbar$.

Άσκηση 3



A) Παρουσία σταθερού μαγνητικού πεδίου τα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του Υδρογόνου μετατοπίζονται κατά $U = \frac{e\hbar B}{2m} m_\ell$. Οι δυνατές τιμές του m_ℓ για την κατάσταση 2p είναι $m_\ell = -1, 0, +1$ και για την 1s $m_\ell = 0$. Οι ενεργειακές στάθμες εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα. Οι κανόνες επιλογής απαιτούν $\Delta\ell = \pm 1$, $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$. Οι επιτρεπτές λοιπόν μεταβάσεις είναι οι εμφανιζόμενες

$$(\mathrm{a})\, m_\ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0, (\mathrm{b})\, m_\ell = +1 \rightarrow m_\ell = 0, (\mathrm{c})\, m_\ell = -1 \rightarrow m_\ell = 0$$

B) Από αυτές η (a) έχει την ίδια ενεργειακή διαφορά με αυτήν που είχε απουσία του μαγνητικού πεδίου καθώς οι δύο στάθμες (αρχική και τελική δεν μεταβάλλονται), και το μήκος κύματος είναι λ_a=122nm. Η (b) έχει μεγαλύτερη ενεργειακή διαφορά και άρα μικρότερο μήκος κύματος λ_b και η (c) έχει την μικρότερη ενεργειακή διαφορά και συνεπώς το μεγαλύτερο μήκος κύματος λ_c.

Άσκηση 4

Από τη σχέση (11.4) και εφόσον η άσκηση δίνει ότι $L = 4.718\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$ βρίσκουμε ότι ο κβαντικός αριθμός περιστροφής του μορίου στην αρχική κατάσταση είναι $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \Rightarrow \ell(\ell+1) = \left(\frac{L}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{4.718\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{1.055\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}\right)^2 \approx 20 \Rightarrow \ell = 4$ (η αρνητική λύση $\ell = -5$ απορρίπτεται). Η ενέργεια ταλάντωσης και περιστροφής του μορίου που βρίσκεται στην κατάσταση (ν, ℓ) δίνεται από τη σχέση (11.10)

$$E_{rot-vib} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\left\{\ell(\ell+1)\right\} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{1}$$

Γνωρίζουμε ότι κατά την απορρόφηση ή εκπομπή ενός φωτονίου ισχύουν οι κανόνες επιλογής $\Delta\nu = \pm1$ (11.3) και $\Delta\ell = \pm1$ (11.2). Η άσκηση μας δίνει ότι για την τελική κατάσταση ο κβαντικός αριθμός περιστροφής είναι $\ell' = 5$, άρα και για τις δύο διαδικασίες (εκπομπή ή απορρόφηση) ισχύει $\Delta\ell = \ell' - \ell = +1$. Έχουμε:

1) <u>εκπομπή</u>

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= E_{\nu,\ell} - E_{\nu-1,\ell+1} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\left\{\ell(\ell+1) - (\ell+1)(\ell+2)\right\} + \left(\nu + \frac{1}{2} - (\nu-1) - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \Rightarrow \\ \Delta E_1 &= \hbar\omega - \frac{\hbar^2}{I_{cm}}(\ell+1)\end{aligned} \tag{2}$$

2) <u>απορρόφηση</u>

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= E_{\nu+1,\ell+1} - E_{\nu,\ell} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\left\{(\ell+1)(\ell+2) - \ell(\ell+1)\right\} + \left((\nu+1) + \frac{1}{2} - \nu - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \Rightarrow \\ \Delta E_2 &= \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{I_{cm}}(\ell+1)\end{aligned} \tag{3}$$

(σχέση 11.4)

A) Με πρόσθεση των (2),(3) βρίσκουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του μορίου

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 2\hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{\Delta E_1 + \Delta E_2}{2\hbar} = \frac{0.1942 + 0.1978}{2\cdot 6.582\times10^{-16}}\left[\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{eV\cdot s/rad}}\right] = 2.98\times10^{14}\,\mathrm{rad/s}$$

και από τη σχέση (11.9) $K = \mu\omega^2$, όπου $\mu = \frac{16u\cdot16u}{16u+16u} = 8u = 8\cdot1.66\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ η ανηγμένη μάζα του μορίου, έχουμε $K = 1.18\times10^3\ \mathrm{N/m}$.

B) Με αφαίρεση των (2),(3) βρίσκουμε

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = 2\frac{\hbar^2}{I_{cm}}(\ell+1) \Rightarrow I_{cm} = \frac{2\hbar^2(\ell+1)}{\Delta E_2 - \Delta E_1} = \frac{2(6.582\times10^{-16})^2\cdot5}{0.1978 - 0.1942}\mathrm{eV\cdot s^2} = 1.203\times10^{-27}\mathrm{eV\cdot s^2} \Rightarrow$$

$$I_{cm} = 1.93\times10^{-46}\mathrm{kg\cdot m^2}$$

Από τη σχέση (11.2) η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας είναι $I_{cm} = \mu R_0^{\ 2}$, οπότε με αντικατάσταση βρίσκουμε $R_0 = \sqrt{\frac{I_{cm}}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.93\times10^{-46}}{8\cdot1.66\times10^{-27}}}\mathrm{m} = 1.21\,\mathrm{\mathring{A}}$.

Άσκηση 5

Α) Η ενέργεια της περιστροφικής κατάστασης ℓ διατομικού μορίου δίνεται από τη σχέση 11.5

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\ell(\ell+1)$$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας του μορίου ως προς το κέντρο μάζας του. Από τα δεδομένα έχουμε

$$E_5 - E_4 = hf \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\{5(5+1)-4(4+1)\} = hf \Rightarrow \frac{\hbar^2}{I_{cm}} = \frac{1}{5}hf \qquad (1)$$

Η ζητούμενη ενεργειακή διαφορά είναι

$$hf' = E_3 - E_2 \Rightarrow hf' = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\{3(3+1)-2(2+1)\} \Rightarrow hf' = 3\frac{\hbar^2}{I_{cm}} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας (1) και (2) βρίσκουμε $hf' = \frac{3}{5}hf \Rightarrow f' = \frac{3}{5}f = 2.17\times10^{11}\,\mathrm{Hz}$ και το αντίστοιχο μήκος κύματος $\lambda = c/f = 3\times10^8/2.17\times10^{11}\,\mathrm{m} = 0.14\,\mathrm{cm}$.

Β) Από τη σχέση (1) λύνουμε ως προς I_{cm} και έχουμε

$$I_{cm} = \frac{5\hbar^2}{hf} = \frac{5h}{4\pi^2 f} = \frac{5\times6.626075\times10^{-34}}{4\pi^2\times3.62\times10^{11}}\frac{J\cdot s}{s^{-1}} \Rightarrow I_{cm} = 2.32\times10^{-46}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

Γ) Η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας δίνεται από τη σχέση 11.3

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \frac{A_A A_B}{A_A + A_B}u \quad (3)$$

όπου A_A και A_B οι μαζικοί αριθμοί των ατόμων Α και Β αντίστοιχα, και $u = 1.66\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Εδώ $A_A = 12$ και το A_B είναι ζητούμενο. Επίσης από τη σχέση 11.2 έχουμε

$$I_{cm} = \mu R_0^{\,2} \Rightarrow \mu = \frac{I_{cm}}{R_0^{\,2}} = \frac{2.32\times10^{-46}}{(147\times10^{-12})^2}\mathrm{kg} \Rightarrow \mu = 1.07\times10^{-26}\,\mathrm{kg}.$$

Θέτοντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (3) έχουμε

$\frac{A_A A_B}{A_A + A_B} = \frac{\mu}{u} = 6.446 \Rightarrow \frac{12A_B}{12 + A_B} = 6.446 \Rightarrow A_B = 13.9 \simeq 14$, που σημαίνει ότι το άτομο Β είναι το ^{14}N.

Άσκηση 6

Στο ιδανικό αέριο η ολική ενέργεια των σωματιδίων είναι μόνο η κινητική και έχουμε $E = \frac{1}{2}m\,v^2$. Ο αρ. των μορίων ανά μονάδα όγκου με ενέργεια στο διάστημα [E,E+dE] είναι (σελ. 292 Serway)

$$n(E)dE = (\sigma\tau\alpha\theta.)\ g(E)\ e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dE$$

Για τον υπολογισμό της πυκνότητας των καταστάσεων g(E) παρατηρούμε ότι στο σχήμα 9.5, σελ 292 του Serway ο χώρος των ταχυτήτων είναι τώρα το επίπεδο xy και ο αριθμός των καταστάσεων με ταχύτητα μέτρου μεταξύ v και v+dv είναι ανάλογος προς το εμβαδόν ενός λεπτού δακτυλιδιού με ακτίνα v και πάχους dv.Άρα

$$g(E)dE = f(v)dv = (\sigma\tau\alpha\theta.)\ 2\,\pi\,v\,dv$$

Και παίρνουμε

$$n(E)dE = n(v)dv = C\, ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

Η σταθερά C υπολογίζεται από τη σχέση

$$\left(\frac{N}{A}\right) = \int_0^\infty n(v)dv = \int_0^\infty Cve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv = C\frac{1}{2(\frac{m}{2kT})} \Rightarrow C = \frac{Nm}{AkT}$$

A) Από τα παραπάνω έχουμε για τον αριθμό των μόρίων ανά μονάδα επιφανείας με μέτρο ταχύτητας μεταξύ v και v+dv:

$$n(v)dv = 2\left(\frac{N}{A}\right)\left(\frac{m}{2kT}\right)ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

B) Η μέση ταχύτητα των μορίων υπολογίζεται από τη σχέση

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v\, n(v)dv}{\int_0^\infty n(v)dv} = \frac{\int_0^\infty Cv^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv}{\left(\frac{N}{A}\right)} = \sqrt{\frac{k\pi T}{2m}}$$

Ενώ η $v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2}$ από τη σχέση

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^2\, n(v)dv}{\int_0^\infty n(v)dv} = \frac{\int_0^\infty Cv^3e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv}{\left(\frac{N}{A}\right)} = \frac{2kT}{m}$$

Γ) Ο υπολογισμός των μορίων ανά μονάδα επιφάνειας με ενέργεια μεταξύ E και E+dE υπολογίζεται από την κατανομή των ταχυτήτων του υποερωτήματος (A)

$$n(E)dE = n(v)dv = 2\left(\frac{N}{A}\right)\left(\frac{m}{2kT}\right)ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

και από τις σχέσεις

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow dv = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

από τις οποίες αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$n(E)dE = \left(\frac{N}{A}\right)\frac{1}{kT}\, e^{-\frac{E}{kT}}dE$$

Η μέση τιμή της ενέργειας κάθε σωματίδιου δίνεται τότε από τη σχέση

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E\, n(E)dE}{\int_0^\infty n(E)dE} = \frac{\int_0^\infty E\, e^{-\frac{E}{kT}}dE}{\int_0^\infty\, e^{-\frac{E}{kT}}dE} = \frac{(kT)^2}{kT} = kT$$

Η ολική ενέργεια ανά μονάδα επιφανείας προκύπτει πολαπλασιάζοντας με τον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας (N/A).

Δ) Η κλασική κατανομή Maxwell Boltzmann ισχύει όσο η επικάλυψη των κυματοσυναρτήσεων των σωματιδίων είναι αμελητέα, δηλαδή όσο η τυπική απόσταση μεταξύ τους είναι αρκετά μεγαλύτερη από το τυπικό μήκος κύματος de Broglie τους. Επαναλαμβάνουμε τον σκεπτικό της παραγράφου 9.2 του Serway: $\frac{p^2}{2m} = kT, \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}, d = \sqrt{N/A}$ οπότε η σχέση $\lambda \ll d$ γίνεται

$$\frac{h}{\sqrt{2mkT}} \ll \sqrt{\frac{N}{A}} \Rightarrow \left(\frac{N}{A}\right)\frac{h^2}{2mkT} \ll 1$$

η οποία όπως και στο χώρο ισχύει για υψηλές θερμοκρασίες, μικρές συγκεντρώσεις σωματιδίων και τέλος για βαριά σωμάτια.

Άσκηση 7

Α) Από την υπόθεση 3 των Maxwell και Boltzmann (σελ. 287 του βιβλίου των SMM), δεν υπάρχει περιορισμός στο κλάσμα του ολικού αριθμού σωματίων που μπορούν να βρεθούν σε μια δεδομένη κατάσταση. Αφού κάθε άτομο διαθέτει g_i καταστάσεις στην ενέργεια E_i, το πλήθος των διεγερμένων καταστάσεων της στάθμη E_i, είναι ανάλογο του $g_i P(E_i) = g_i P_0 e^{-E_i/kT}$.

Β) Οι πληθυσμοί N_1 και N_2 των ενεργειακών σταθμών E_1 και E_2, ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 P_0 e^{-E_2/kT}}{g_1 P_0 e^{-E_1/kT}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/kT} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(hf)/kT}$$

Επειδή στην ισορροπία ο αριθμός των διεγέρσεων ισούται με τον αριθμό των αποδιεγέρσεων, η εξ. 10.2 των SMM γράφεται

$$N_1 u(f,T) B_{12} = N_2\left(u(f,T)B_{21} + A_{21}\right) = \frac{g_2}{g_1} N_1\left(u(f,T)B_{21} + A_{21}\right) \Rightarrow$$

$$u(f,T) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\left(\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}}\right) e^{hf/KT} - 1}$$

Συγκρίνοντας μέ την κατανομή Plank (εξ. 2.9 των SMM), παίρνουμε

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \quad \Rightarrow \quad B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h f^3} A_{21} \quad \text{και}$$

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad B_{12} = \frac{g_2}{g_1}\frac{c^3}{8\pi h f^3} A_{21} \ .$$

Άσκηση 8

Αν E_v η ανώτατη στάθμη της ζώνης σθένους και E_c η κατώτατη στάθμη της ζώνης αγωγιμότητος, τότε το ενεργειακό χάσμα $E_g = E_c - E_v$, και η ενέργεια Fermi $E_F = E_v + E_g / 2$, οπότε $E_c - E_F = E_g / 2$.

Η αγωγιμότητα είναι ανάλογη της πιθανότητος καταλήψεως της E_c,

$$f(T)=\frac{1}{e^{\frac{E_c-E_F}{kT}}+1}=\frac{1}{e^{\frac{E_g/2}{kT}}+1}$$

Στους 27 ^oC είναι T=300 ^oK = 2 * 150 ^oK.

Δίδεται οτι $f(150)=10^{-9}f(300)\Rightarrow a\,f(150)=f(300)$, $a=10^9$

Άρα

$$\frac{a}{e^{\frac{E_g/2}{k150}}+1}=\frac{1}{e^{\frac{E_g/2}{k300}}+1}\Rightarrow ae^{\frac{E_g/2}{k300}}+a=e^{2\frac{E_g/2}{k300}}+1\Rightarrow ax-x^2+\left(a-1\right)=0\ ,\ x\equiv e^{\frac{E_g}{k600}}$$

$$x^2-ax-a=0\Rightarrow x\equiv e^{\frac{E_g}{k600}}=\frac{a\pm a\sqrt{1+4/a}}{2}\simeq a\Rightarrow\frac{E_g}{k\,600}=\ln\left(10^9\right)=9\ln(10)$$

Άρα

$$E_g=5400\ln(10)k\Rightarrow E_g=1.07eV$$

Άσκηση 9

Α) Τη χρονική στιγμή της μέτρησης η ενεργότητα είναι

$R=\left|\frac{dN}{dt}\right|=\left|-\lambda N\right|=\lambda N\Rightarrow N=\frac{R}{\lambda}$, όπου N το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων και λ η σταθερά διάσπασης που συνδέεται με τον χρόνο ημιζωής μέσω της σχέσης $\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=\frac{0.693}{12\times24\times60\times60s}=6.68\times10^{-7}s^{-1}$. Η ενεργότητα είναι

$R=500\mu\text{Ci}=500\times10^{-6}\times3.7\times10^{10}\,\delta\iota\alpha\sigma\pi/s=1.85\times10^{7}\,\delta\iota\alpha\sigma\pi/s$, άρα βρίσκουμε

$N=\frac{1.85\times10^7}{6.68\times10^{-7}}=2.77\times10^{13}\,\pi\upsilon\rho\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$. Η ζητούμενη μάζα αυτών των πυρήνων ^{131}Ba είναι $m=2.77\times10^{13}\times(131\times1.66\times10^{-27}kg)=6.0\times10^{-12}kg$.

Β) Τη χρονική στιγμή της διαρροής (t=0) ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων είναι N_0 και η ενεργότητα $R_0=\lambda N_0$.

Τη χρονική στιγμή $\tau=30\acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma=30\times60\times60s=129.6\times10^3s$ της μέτρησης η ενεργότητα είναι $R=R_0e^{-\lambda\tau}\Rightarrow R_0=Re^{\lambda\tau}=500\mu\text{Ci}\times e^{6.68\times10^{-7}\times129.6\times10^3}=545.2\mu\text{Ci}$ και $N=N_0e^{-\lambda\tau}\Rightarrow N_0=Ne^{\lambda\tau}=2.77\times10^{13}\times e^{6.68\times10^{-7}\times129.6\times10^3}=3.0205\times10^{13}\,\pi\upsilon\rho\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma$. Άρα η αρχική μάζα είναι $m_0=6.5\times10^{-12}kg$.

Γ) $R=R_0e^{-\lambda t}\Rightarrow\ln\frac{R_0}{R}=\lambda t\Rightarrow t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{R_0}{R}=\frac{1}{6.68\times10^{-7}s^{-1}}\ln\frac{500}{1}\approx108\eta\mu$

Άσκηση 10

Α)

$$M\left({}_{0}^{1}\mathrm{n}\right)=1.008665\mathrm{u} \qquad M\left({}_{92}^{235}\mathrm{U}\right)=235.043915\mathrm{u}$$

$$M\left({}_{56}^{141}\mathrm{Ba}\right)=140.9139\mathrm{u} \quad M\left({}_{36}^{92}\mathrm{Kr}\right)=91.8973\mathrm{u}$$

Η ενέργεια που παράγεται από την αντίδραση δίνεται από

$$M\left({}_{0}^{1}\mathrm{n}\right)+M\left({}_{92}^{235}\mathrm{U}\right)-M\left({}_{56}^{141}\mathrm{Ba}\right)-M\left({}_{36}^{92}\mathrm{Kr}\right)-3M\left({}_{0}^{1}\mathrm{n}\right)=$$

$$=M\left({}_{92}^{235}\mathrm{U}\right)-M\left({}_{56}^{141}\mathrm{Ba}\right)-M\left({}_{36}^{92}\mathrm{Kr}\right)-2M\left({}_{0}^{1}\mathrm{n}\right)=$$

$$=235.043915\mathrm{u}\text{-}140.9139\mathrm{u}\text{-}91.8973\mathrm{u}\text{-}2\times1.008665\mathrm{u}$$

$$=0.21538\mathrm{u}=0.21538\ \mathrm{u}\times 931.5\ \mathrm{MeV/u}=200.626\ \mathrm{MeV}$$

Β) Η ωφέλιμη ενέργεια από κάθε σχάση είναι

$$200.626\ \times10^{6}\ \mathrm{eV}\times1.602\times10^{-19}\mathrm{J/eV}\times0.20=6.43\times10^{-12}\mathrm{J}$$

Σε μια ημέρα ο αντιδραστήρας παράγει ενέργεια

$$700\times10^{6}\mathrm{J/s}\ \times\ 24\times3600\mathrm{s}=60.48\times10^{10}\mathrm{J}$$

Διαιρώντας με την ενέργεια κάθε σχάσης βρίσκουμε τον αριθμό των ατόμων ουρανίου

$$n=\frac{60.48\times10^{10}\mathrm{J}}{6.43\times10^{-12}\mathrm{J}}=9.4\times10^{24}$$

Γ) Υπάρχουν 6.02×10^{26} άτομα ουρανίου σε 235 kg ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$. Επομένως η μάζα του ουρανίου που απαιτείται ημερησίως είναι

$$9.4\times10^{24}\ \frac{235}{6.022\times10^{26}}\mathrm{kg}=3.67\mathrm{kg}$$

Ερωτήσεις:

1) Η ηλεκτρική αγωγιμότητα του Zn οφείλεται στα ηλεκτρόνια σθένους του μετάλλου. Οι μεταλλικοί δεσμοί είναι, γενικά, ασθενέστεροι από τους ιοντικούς ή τους ομοιοπολικούς δεσμούς κι έτσι τα ηλεκτρόνια σθένους σε ένα μέταλλο είναι σχετικώς ελεύθερα να κινηθούν μέσα στο υλικό. Ο Zn έχει πολλά ηλεκτρόνια και μάλιστα τα εξωτερικά του ηλεκτρόνια είναι σχετικά ασθενώς συνδεδεμένα με τον πυρήνα. Όταν πολλά άτομα Zn ενωθούν δημιουργείται ένα πλήθος ηλεκτρονίων που δεν ανήκουν αποκλειστικά σε κανέναν πυρήνα, αλλά δημιουργούν ένα «νέφος» γύρω από όλους τους πυρήνες και είναι ελεύθερα να κινούνται γύρω από αυτούς. Αυτό σημαίνει ότι το υλικό άγει τον ηλεκτρισμό.

2)

Το χρόνο που υπήρχε κατά τη γέννηση του ηλιακού συστήματος έχει πράγματι διασπαστεί. Όμως η σειρά διάσπασης που ξεκινάει από το ${}_{92}^{238}\mathrm{U}$,με χρόνο ημιζωής 4.47×10^{9} έτη, δημιουργεί ξανά ${}_{88}^{226}\mathrm{Ra}$ και για αυτό το ανιχνεύουμε σήμερα.

3)

Α) Η βασική ιδιότητα της διόδου επαφής *p-n* είναι ότι σε ορθή πόλωση συμπεριφέρεται σαν αγωγός ενώ σε ανάστροφη πόλωση πρακτικά είναι ένας πυκνωτής. Ετσι λοιπόν ένα εναλλασσόμενο ρεύμα θα διέρχεται από τη δίοδο μόνο τη μισή περίοδο (εκείνη που αντιστοιχεί σε ορθή πόλωση) ενώ την υπόλοιπη το ρεύμα θα είναι πρακτικά μηδενικό (ανόρθωση). Επίσης στην επαφή *p-n* υπάρχει η περιοχή απογύμνωσης στην οποία όταν η δίοδος έχει ορθή πόλωση διέρχονται φορείς αγωγιμότητας (ηλεκτρόνια ή οπές). Ένα διεγερμένο ηλεκτρικά ηλεκτρόνιο που θα βρεθεί στην περιοχή *p* έχει μεγάλη πιθανότητα να επανασυνδεθεί με μία οπή και να μεταπέσει στη ζώνη σθένους εκπέμποντας ένα φωτόνιο ενέργειας ίσης με αυτή του ενεργειακού χάσματος (δίοδος φωτοεκπομπής). Τέλος, με την αντίστροφη διαδικασία, ένα ηλεκτρόνιο σθένους μπορεί να απορροφήσει ένα φωτόνιο και να ανυψωθεί στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνοντας πίσω του μια οπή. Με τον τρόπο αυτό λειτουργούν τα ηλιακά στοιχεία που είναι διατάξεις στις οποίες φωτογενή ηλεκτρόνια και οπές διαχωρίζονται με ένα εσωτερικό πεδίο επαφής και συλλέγονται υπό τη μορφή ρεύματος.

Β) Από τη σχέση (12.34) έχουμε $I = I_0\left(e^{qV/kT}-1\right)$, όπου I_0 είναι το ζητούμενο ανάστροφο ρεύμα κορεσμού, q το φορτίο του ηλεκτρονίου και V η τάση πόλωσης. Με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

$$I_0 = \frac{I}{e^{qV/kT}-1} = \frac{25\times10^{-3}A}{e^{0.6/8.6\times10^{-5}\cdot300}-1} = 2\times10^{-12}A$$

4)

Για τον χαλκό $E_F = 7eV$. Εφαρμόζουμε την σχέση (9.41) του βιβλίου Serway, et al. και έχουμε

$$n(E) = g(E)f_{FD}(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}\frac{E^{1/2}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1}$$

Για $E = E_F$ έχουμε

$$n(E_F) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}\frac{E_F^{\ 1/2}}{1+1} = \frac{4\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}E_F^{\ 1/2}}{h^3} = 2.5\times10^{7}eV^{-1}m^{-3}$$

Για $E = 2E_F$ έχουμε

$$n(2E_F) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}\frac{E_F^{\ 1/2}}{e^{\frac{E_F}{kT}}+1} \cong \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}E_F^{1/2}e^{-\frac{E_F}{kT}}$$

Παρατηρούμε ότι $e^{-\frac{E_F}{kT}} = e^{-\frac{7}{0.025}} = e^{-280} \cong 10^{-121}$ και άρα το ποσοστό των ηλεκτρονίων που διεγείρεται στην ενέργεια αυτή είναι πρακτικά ανύπαρκτο.

5)

Ένα πρωτόνιο θα μπορούσε να διασπαστεί σύμφωνα με $p \to n + e^+ + \nu_e$. Όμως η μάζα του νετρονίου είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από τη μάζα του πρωτονίου και έτσι η αντίδραση απαγορεύεται από τη διατήρηση της ενέργειας, εκτός και αν δοθεί πρόσθετη ενέργεια στο πρωτόνιο, όπως για παράδειγμα για ένα πρωτόνιο που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός πυρήνα και η απόλυτη τιμή της ενέργειας σύνδεσης του θυγατρικού πυρήνα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του αρχικού πυρήνα.