19/10/2010

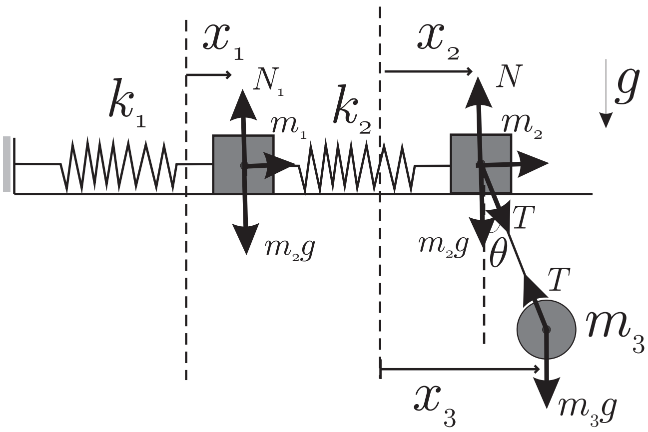
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2010-11

1η ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 16/11/10

Άσκηση 1



Α) Θεωρούμε x_1 την απόσταση της μάζας m_1 από το σημείο ισορροπίας της και x_2, x_3 τις αποστάσεις των μαζών m_2 και m_3 από το σημείο ισορροπίας της m_2, όπως στο Σχήμα. Στη μάζα m_1 ενεργεί το βάρος της $m_1 g$ το οποίο εξουδετερώνεται από την αντίδραση του επιπέδου N_1 (στον κάθετο άξονα) και η δύναμη του ελατηρίου (στον οριζόντιο άξονα). Επομένως από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα η εξίσωση κίνησης της μάζας m_1 θα είναι

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

Για τη μάζα m_2, στον κάθετο άξονα, η αντίδραση του επιπέδου εξουδετερώνει το βάρος και την κάθετη συνιστώσα της τάσης T, $N_2 = m_2 g + T\cos\theta$ ενώ στον οριζόντιο ασκείται η δύναμη του ελατηρίου $+k_2(x_1 - x_2)$ και η παράλληλη συνιστώσα της τάσης $T\sin\theta$

Συνεπώς

$$m_2\ddot{x}_2 = +k_2(x_1 - x_2) + T\sin\theta \qquad (2)$$

Για τη μάζα m_3 έχουμε για μικρές γωνίες ταλάντωσης στον κάθετο άξονα

$$T\cos\theta = m_3 g \qquad (3)$$

ενώ στον οριζόντιο

$$m_2\ddot{x}_3 = -T\sin\theta \qquad (4)$$

Από την (3) βρίσκουμε $T = \dfrac{m_3 g}{\cos\theta}$ και συνεπώς αντικαθιστώντας στις (2) και (3) παίρνουμε

$$m_2\ddot{x}_2 = +k_2(x_1 - x_2) + m_3\, g\tan\theta \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = +k_2(x_1 - x_2) + m_3\, g\frac{x_3 - x_2}{\ell}$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -m_3\, g\tan\theta = -m_3\, g\frac{x_3 - x_2}{\ell}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών και τη συνθήκη $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ έχουμε τελικά

$$\ddot{x}_1 = \omega_0^{\,2}(-3x_1 + x_2)$$

$$\ddot{x}_2 = \omega_0^{\,2}\left(\frac{x_1}{2} - \frac{3x_2}{2} + x_3\right)$$

$$\ddot{x}_3 = \omega_0^{\,2}\left(x_2 - x_3\right)$$

B) Σε μορφή πίνακα οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega_0^{\,2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Εισάγοντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_i = A_i\cos\left(\omega t + \phi\right), i = 1,2,3$, η (5) γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} -3\omega_0^{\,2} + \omega^2 & \omega_0^{\,2} & 0 \\ \frac{\omega_0^{\,2}}{2} & -\frac{3\omega_0^{\,2}}{2} + \omega^2 & \omega_0^{\,2} \\ 0 & \omega_0^{\,2} & -\omega_0^{\,2} + \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

η οποία έχει λύσεις όταν

$$\det\begin{pmatrix} -3\omega_0^{\,2} + \omega^2 & \omega_0^{\,2} & 0 \\ \frac{\omega_0^{\,2}}{2} & -\frac{3\omega_0^{\,2}}{2} + \omega^2 & \omega_0^{\,2} \\ 0 & \omega_0^{\,2} & -\omega_0^{\,2} + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-3\omega_0^{\,2} + \omega^2\right)\begin{vmatrix} -\frac{3\omega_0^{\,2}}{2} + \omega^2 & \omega_0^{\,2} \\ \omega_0^{\,2} & -\omega_0^{\,2} + \omega^2 \end{vmatrix} - \omega_0^{\,2}\begin{vmatrix} \frac{\omega_0^{\,2}}{2} & \omega_0^{\,2} \\ 0 & -\omega_0^{\,2} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-3\omega_0^{\,2} + \omega^2\right)\left[\left(-\frac{3\omega_0^{\,2}}{2} + \omega^2\right)\left(-\omega_0^{\,2} + \omega^2\right) - \omega_0^{\,4}\right] - \frac{\omega_0^{\,4}}{2}\left(-\omega_0^{\,2} + \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 - 3\omega_0^{\,2}\right)\left[\frac{1}{2}\omega_0^{\,4} - \frac{5}{2}\omega_0^{\,2}\omega^2 + \omega^4\right] + \frac{1}{2}\omega_0^{\,6} - \frac{1}{2}\omega_0^{\,4}\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^6 - \frac{11}{2}\omega_0^{\,2}\omega^4 + \frac{15}{2}\omega_0^{\,4}\omega^2 - \omega_0^{\,6} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^6 - 2\omega_0^{\,2}\omega^4 - \frac{7}{2}\omega_0^{\,2}\omega^4 + \frac{14}{2}\omega_0^{\,4}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^{\,4}\omega^2 - \omega_0^{\,6} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^4\left(\omega^2 - 2\omega_0^{\,2}\right) - \frac{7}{2}\omega_0^{\,2}\omega^2\left(\omega^2 - 2\omega_0^{\,2}\right) + \frac{1}{2}\omega_0^{\,4}\left(\omega^2 - 2\omega_0^{\,2}\right) = 0 \Rightarrow$$

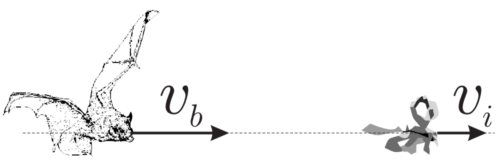
$$\left(\omega^2 - 2\omega_0^{\,2}\right)\left(\omega^4 - \frac{7}{2}\omega_0^{\,2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^{\,4}\right) = 0$$

και συνεπώς οι γωνιακές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0, \omega_2 = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{41}}}{2}\omega_0 \approx 0.30\omega_0, \omega_3 = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{41}}}{2}\omega_0 \approx 6.70\,\omega_0$$

Άσκηση 2

Θεωρούμε ότι το έντομο κινείται απομακρυνόμενο από τη νυχτερίδα όπως στο Σχήμα. Επίσης θεωρούμε θετική φορά από την πηγή προς τον παρατηρητή σύμφωνα με το βιβλίο των Alonso-Finn. Η συχνότητα f_L που ακούει ένας παρατηρητής όταν κινείται με ταχύτητα υ_L προερχόμενη από μια πηγή που εκπέμπει συχνότητα f_S και κινείται με ταχύτητα υ_s δίνεται από



$$f_L = \frac{\upsilon - \upsilon_L}{\upsilon - \upsilon_S} f_S \tag{1}$$

όπου υ η ταχύτητα του ήχου.

Στην περίπτωσή μας μπορούμε να θεωρήσουμε δύο φάσεις στο φαινόμενο Doppler. Κατά την πρώτη, πηγή είναι η νυχτερίδα και παρατηρητής το έντομο, το οποίο σύμφωνα με την (1) δέχεται ήχο συχνότητας

$$f = \frac{\upsilon - \upsilon_i}{\upsilon - \upsilon_b} f_b \tag{2}$$

Στη δεύτερη φάση παρατηρητής είναι η νυχτερίδα και πηγή το έντομο το οποίο επανεκπέμπει λόγω ανάκλασης ήχο συχνότητας f. Εδώ η θετική φορά είναι από το έντομο (πηγή) προς τη νυχτερίδα (παρατηρητή). Η νυχτερίδα σύμφωνα με την (1) δέχεται ήχο συχνότητας

$$f_r = \frac{\upsilon + \upsilon_b}{\upsilon + \upsilon_i} f \tag{3}$$

Απαλείφοντας την f από τις (2),(3) βρίσκουμε

$$f_r = \frac{\upsilon + \upsilon_b}{\upsilon + \upsilon_i} \frac{\upsilon - \upsilon_i}{\upsilon - \upsilon_b} f_b \tag{4}$$

η οποία επιλυόμενη ως προς υ_i δίνει

$$\upsilon_i = \upsilon \frac{f_b(\upsilon + \upsilon_b) - f_r(\upsilon - \upsilon_b)}{f_r(\upsilon - \upsilon_b) + f_b(\upsilon + \upsilon_b)}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος παίρνουμε $\upsilon_i = -8.8\text{m/s}$. Το (-) σημαίνει πως η ταχύτητα του εντόμου έχει φορά αντίθετη από αυτήν που υποθέσαμε δηλαδή κινείται προς την νυχτερίδα.

Άσκηση 3

Α) Σύμφωνα με το εδάφιο 18.6 του βιβλίου των Alonso-Finn το πλάτος του κύματος πίεσης είναι $\Delta \mathrm{P} = p - p_0$. Συνεπώς εδώ $\Delta P = 1.27$ Pa , $\omega = 340\pi$ rad/sec,

$f = \omega/(2\pi) = 170$ Hz, $k = \pi\,\text{m}^{-1} = 3.14\text{m}^{-1}$ $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/\pi = 2$ m,

$\upsilon = \omega/k = 340\pi/\pi = 340\text{m/s}$

Β) Από παράδειγμα 18.6 Alonso-Finn $\upsilon = a\sqrt{T}$ όπου $a \approx 20.055$. Άρα

$T = v^2/a^2 = 287.42^o$ K

Γ) Από $\rho-\rho_0=-\rho_0\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$, $p-p_0=-\kappa\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ παίρνουμε $\rho-\rho_0=\dfrac{\rho_0}{\kappa}\Delta p$ με

$\kappa=\rho_0\left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_0$ Από Alonso Finn σελ. 21 παίρνουμε $\kappa=\gamma p_0$,$\upsilon^2=\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}$ Που δίνουν

$\rho_0/\kappa=1/\upsilon^2$ Άρα

$\rho=\rho_0+\dfrac{\rho_0}{\kappa}\Delta p=\dfrac{\gamma p_0}{\upsilon^2}+\dfrac{p_0}{\upsilon^2}\sin(kx-\omega t)$ που δίνει $\rho_0=1.54\times10^{-5}$ kg/m^3 και $\Delta\rho_0=1.099$ kg/m^3

Άσκηση 4

Η γενική μορφή του στάσιμου κύματος σύμφωνα με την 22.31 του βιβλίου των Alonso και Finn είναι

$$\xi(x,t)=\left(A\sin(k\,x)+B\cos(k\,x)\right)\cos(\omega t+\phi)$$

(a) Τα δύο άκρα είναι ελεύθερα συνεπώς

$$\xi'(0,t)=0\Rightarrow A=0$$

$$\xi'(L,t)=0\Rightarrow -k\,B\sin(kL)=0\Rightarrow k\,L=n\,\pi\Rightarrow k=\frac{n\,\pi}{L},\ n=1,2\ldots$$

Επομένως

$$\xi(x,t)=B\cos\left[\frac{n\,\pi x}{L}\right]\cos(\omega t+\phi)$$

Επιπλέον σύμφωνα με το Σχήμα

$$\xi\left(\frac{L}{4},t\right)=\xi\left(\frac{3L}{4},t\right)=0\Rightarrow\cos\left[\frac{n\,\pi}{4}\right]=\cos\left[\frac{3n\,\pi}{4}\right]=0$$

η οποία ικανοποιείται για $n=2(2m+1), m=0,1,2\ldots$. Η ελάχιστη τιμή είναι η $n=2$

$$k=\frac{2\pi}{L}\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{L}\Rightarrow\lambda=L$$

και αντιστοιχεί σε βασική συχνότητα

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}=\frac{\upsilon}{L}$$

όπου υ η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στη ράβδο. Μεταξύ των σταθερών σημείων δεν έχουμε άλλους δεσμούς και έχουμε μέγιστα για $x=0,L/2,L$.

(b) Έχουμε το ένα άκρο πακτωμένο και το ένα ελεύθερο συνεπώς

$$\xi(0,t)=0\Rightarrow B=0$$

$$\xi'(L,t)=0\Rightarrow k\,A\cos(kL)=0\Rightarrow k\,L=(2n+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow k=(2n+1)\frac{\pi}{2L},\ n=0,1,2\ldots$$

Επομένως

$$\xi(x,t)=A\sin\left[(2n+1)\frac{\pi x}{2L}\right]\cos(\omega t+\phi)$$

Επιπλέον σύμφωνα με το Σχήμα

$$\xi\left(\frac{4L}{5},t\right)=0\Rightarrow\sin\left[(2n+1)\frac{2\pi}{5}\right]=0$$

η οποία ικανοποιείται για $2n+1=5m, m=1,2,\ldots$. Το ελάχιστο n είναι το $n=2$

$$k=\frac{5\pi}{2L}\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{5\pi}{2L}\Rightarrow\lambda=\frac{4L}{5}$$

και αντιστοιχεί στην ελάχιστη συχνότητα

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}=\frac{5\upsilon}{4L}$$

Έχουμε ένα επιπλέον δεσμό για $x=2L/5$ και μέγιστα για $x=L/5, 3L/5, L$.

(c) Έχουμε και τα δύο άκρα πακτωμένα συνεπώς

$$\xi(0,t)=0\Rightarrow B=0$$

$$\xi(L,t)=0\Rightarrow A\sin(kL)=0\Rightarrow kL=n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{L},\ n=1,2\ldots$$

Επομένως

$$\xi(x,t)=A\sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right]\cos(\omega t+\phi)$$

Επιπλέον σύμφωνα με το Σχήμα

$$\xi\left(\frac{4L}{5},t\right)=0\Rightarrow\sin\left[\frac{4n\pi}{5}\right]=0$$

η οποία ικανοποιείται για $n=5m, m=1,2,\ldots$. Το ελάχιστο n είναι το $n=5$

$$k=\frac{5\pi}{L}\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{5\pi}{L}\Rightarrow\lambda=\frac{2L}{5}$$

και αντιστοιχεί στην ελάχιστη συχνότητα

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}=\frac{5\upsilon}{2L}$$

Έχουμε 3 επί πλέον δεσμούς για $x=L/5, 2L/5, 3L/5$ και μέγιστα όταν $x=L/10, 3L/10, 5L/10, 7L/10, 9L/10$.

(d)Σύμφωνα με το (a)

$$\xi(x,t)=B\cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]\cos(\omega t+\phi)$$

και επιπλέον από το Σχήμα

$$\xi\left(\frac{3L}{12},t\right)=\xi\left(\frac{11L}{12},t\right)=0\Rightarrow\cos\left[\frac{3n\pi}{12}\right]=\cos\left[\frac{11n\pi}{12}\right]=0$$

Η οποία ισχύει μόνο για $n=6(2m+1), m=0,1,2,\ldots$ Η ελάχιστη τιμή είναι $n=6$

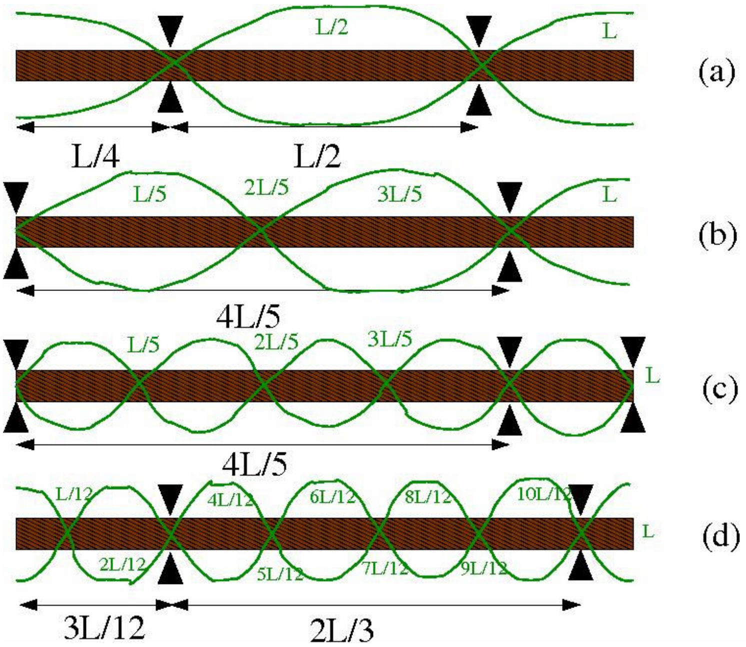
$$k=\frac{6\pi}{L}\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{6\pi}{L}\Rightarrow\lambda=\frac{L}{3}$$

και αντιστοιχεί στην ελάχιστη συχνότητα

$$f=\frac{\upsilon}{\lambda}=\frac{3\upsilon}{L}$$

Έχουμε 4 επί πλέον δεσμούς για $x=L/12, 5L/12, 7L/12, 9L/12$ και μέγιστα όταν $x=0, 2L/12, 4L/12, 6L/12, 8L/12, 10L/12, 12L/12$

Τα στιγμιότυπα φαίνονται στο Σχήμα



Άσκηση 5

A) Η επιφανειακή πυκνότητα σ=20 g/(20*30cm^2)=1/3 kg/m^2.
Η τάση T=1 kgr 10 (m/s^2)/30cm = 10N/30cm=1/3 10^2 N/m , επομένως η δύναμη η οποία τείνει την πλευρά των 20cm είναι

$$F = T \times 20cm = 6.67\text{N}$$

Η ταχύτητα $v = \sqrt{\frac{\text{T}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{(10^2/3)kg\,m/(s^2 m)}{(1/3)kg/m^2}} = 10m/s$

Η συχνότητα

$$f = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}} = \frac{50}{s}\sqrt{\frac{n_1^2}{4} + \frac{n_2^2}{9}} = \frac{50}{6s}\sqrt{9n_1^2 + 4n_2^2}, \qquad n_1, n_2 = 1,2,3...,$$

όπου κανένα εκ των δύο δεν μπορεί να είναι και μηδέν.
Η βασική ιδιοσυχνότητα είναι για n_1=1, n_2=1, f=50/6 $\sqrt{13}$ Hz$\approx$ 30.0Hz .

B) Οι επόμενες ιδιοσυχνότητες βρίσκονται κατατάσσοντας κατά μέγεθος τα αθροίσματα $9n_1^2 + 4n_2^2$.

		n_1	1	2	3
		$9n_1^2$	9	36	81
n_2	$4n_2^2$				
1	4		13	40	85
2	16		25	52	97
3	36		45	72	117

Η χαμηλότερες είναι για 13, 25, 40, άρα η 3$^{\eta}$ είναι για 40. ήτοι n_1=2, n_2=1.

Τότε $f = \frac{50}{6s}\sqrt{40} \approx 52.7\text{Hz}$.

Από $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{10m/s}{50\sqrt{40}/6s} = \frac{6}{5\sqrt{40}}m \approx 19.0\text{cm}$.

Η άμμος συσσωρεύεται σε θέσεις ακινησίας, δηλαδή στις δεσμικές (κομβικές) γραμμές.
Η πλευρά *a* των 20cm χωρίζεται σε n_1=2 μέρη, ενώ η *b* των 30cm σε n_2=1 μέρος.
Άρα, εκτός από τα πακτωμένα άκρα, η άμμος συσσωρεύεται στην μεσοκάθετο της πλευράς *a* των 20cm (στα 10 cm).

Άσκηση 6

Για $0 < x < L_1$ είναι $\xi(x) = \xi_{1,0} \sin\left(k_1 x\right)$ (ημιτονοειδής με αρχή το 0).

Για $L_1 < x < L_1 + L_2$ είναι $\xi(x) = a \sin\Big(k_2\left(x - L_1\right)\Big) + b\cos\Big(k_2\left(x - L_1\right)\Big)$

Αφού το $x = L_1$ είναι κόμβος, πρέπει $\xi(L_1) = 0 \Rightarrow b = 0$, οπότε

$$\xi(x) = a \sin\Big(k_2\left(x - L_1\right)\Big)$$

ημιτονοειδής με αρχή το L_1, αφού εκεί είναι κόμβος, με *a* ρυθμιζόμενο από την συνέχεια της παραγώγου $\left(d\xi / dx\right)\Big|_{x=L_1}$

$$\xi_{1,0} k_1 \cos\left(k_1 L_1\right) = a k_2 \cos\Big(k_2\left(L_1 - L_1\right)\Big) \Rightarrow a = \xi_{1,0}\frac{k_1}{k_2}\cos\left(k_1 L_1\right),$$

οπότε

$$\xi(x) = \xi_{1,0}\frac{k_1}{k_2}\cos\left(k_1 L_1\right)\sin\Big(k_2\left(x - L_1\right)\Big)$$

όπου η συχνότητα ω=2π*f* είναι κοινή, π.χ. $\sin \omega t$.
Για κάθε κομμάτι, 1(αντιστοίχως 2) είναι $k_{1(2)} = 2\pi / \lambda_{1(2)}$,

$$v_{1(2)} = \sqrt{G_{1(2)} / \rho_{1(2)}} = \lambda_{1(2)} f \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{1(2)}} = \frac{f}{\sqrt{G_{1(2)} / \rho_{1(2)}}}$$

Και τα δύο κομμάτια αρχίζουν και καταλήγουν σε κόμβο, άρα

$$L_{1(2)} = n_{1(2)}\frac{\lambda_{1(2)}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{1(2)}} = \frac{n_{1(2)}}{2L_{1(2)}},$$ όπου $n_{1(2)}$ ακέραιοι.

Επομένως

$$f = n_1\frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}}{2L_1} = n_2\frac{\sqrt{G_2 / \rho_2}}{2L_2} \Rightarrow$$

$$n_2 = n_1\frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}L_2}{\sqrt{G_2 / \rho_2}L_1} \text{ πρέπει να είναι ακέραιος,} \qquad (1)$$

η συνθήκη επιτεύξεως αυτού του στάσιμου κύματος.
Τότε

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi n_1}{L_1}$$

$$k_2 = \frac{\pi n_2}{L_2} = \frac{\pi n_1}{L_2}\frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}L_2}{\sqrt{G_2 / \rho_2}L_1} = \frac{\pi n_1}{L_1}\frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}}{\sqrt{G_2 / \rho_2}}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi n_1}{L_1}\sqrt{G_1 / \rho_1}$$

Οπότε, αν ισχύει η συνθήκη (1),
για $0 < x < L_1$ είναι

$$\xi(x,t) = \xi_{1,0} \sin\frac{n_1 \pi x}{L_1} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1}\sqrt{G_1 / \rho_1}\, t\right),$$

και για $L_1 < x < L_1 + L_2$ είναι

$$\xi(x,t) = \xi_{1,0} \cos\left(n_1 \pi\right) \frac{\sqrt{G_2 / \rho_2}}{\sqrt{G_1 / \rho_1}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1} \frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}}{\sqrt{G_2 / \rho_2}} (x - L_1)\right) \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1}\sqrt{G_1 / \rho_1}\, t\right)$$

όπου $\cos\left(n_1 \pi\right) = (-1)^{n_1} = \pm 1$, αναλόγως της τιμής του n_1.

Επομένως για $L_1 < x < L_1 + L_2$ είναι

$$\xi(x,t) = (-1)^{n_1}\, \xi_{1,0} \frac{\sqrt{G_2 / \rho_2}}{\sqrt{G_1 / \rho_1}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1} \frac{\sqrt{G_1 / \rho_1}}{\sqrt{G_2 / \rho_2}} (x - L_1)\right) \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1}\sqrt{G_1 / \rho_1}\, t\right)$$

Άσκηση 7

Υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης, είτε να φέρουμε τις εκφράσεις στη μορφή $f(x+\upsilon t) + g(x-\upsilon t)$ οι οποίες γνωρίζουμε ότι είναι λύσεις της κυματικής, είτε να αντικαταστήσουμε στην κυματική εξίσωση και να δούμε αν επαληθεύεται.

Α) $\sin(x)\cos(a\,t) - \cos(x)\,\sin(a\,t) = \sin\left(x - a\,t\right)$, επομένως είναι αρμονικό κύμα με ταχύτητα a

Β) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{x^2 - a^2 t^2} = \frac{2a^2\left(3a^2 t^2 + x^2\right)}{(x-at)^3 (at+x)^3}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{x^2 - a^2 t^2} = \frac{2\left(a^2 t^2 + 3x^2\right)}{(x-at)^3 (at+x)^3}$ συνεπώς δεν είναι κύμα

Γ)

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a^2 - 2abt + 2ax + b^2 t^2 - 2btx + x^2\right) = 2b^2, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a^2 - 2abt + 2ax + b^2 t^2 - 2btx + x^2\right) = 2$

και συνεπώς είναι κύμα με ταχύτητα b, αλλά όχι αρμονικό.

Άσκηση 8

Α) Η γενική έκφραση της ταχύτητας φάσης των επιφανειακών κυμάτων είναι

$$\upsilon = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

Για μικρές τιμές του $\lambda \ll h, x = \frac{2\pi h}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{e^x}{e^x} \sim 1$ και επίσης

$$\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda} = \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\left(1 + \frac{\rho g \lambda^2}{4\pi^2 T}\right) \sim \frac{2\pi T}{\rho\lambda}$$

καθώς $\lambda \ll \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \Rightarrow \frac{\rho g \lambda^2}{T} \ll 1$

Επομένως σε αυτό το όριο $\upsilon = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$

Β)

$$\upsilon_g = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon + k\frac{d}{dk}\sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}} = \upsilon + k\frac{d}{dk}\sqrt{\frac{kT}{\rho}} = \upsilon + \frac{k}{2\sqrt{k}}\sqrt{\frac{T}{\rho}} =$$
$$= \upsilon + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kT}{\rho}} = \upsilon + \frac{1}{2}\upsilon = \frac{3}{2}\upsilon$$

Άσκηση 9

Έστω x_1, x_2, x_3 οι απομακρύνσεις των μαζών m_1, m_2, m_3 από την ισορροπία.

Α) Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$2m\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1)$$
$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = k(x_1 + x_3 - 2x_2) \qquad (1)$$
$$m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2)$$

Β) Για να βρούμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης θέτουμε
$x_n = \varphi_n e^{i\omega t},\ n = 1,2,3$ και έχουμε αντίστοιχα

$$\left(2m\omega^2 - k\right)\varphi_1 + k\varphi_2 = 0$$
$$\left(m\omega^2 - 2k\right)\varphi_2 + k\left(\varphi_1 + \varphi_3\right) = 0 \qquad (2)$$
$$\left(m\omega^2 - k\right)\varphi_3 + k\varphi_2 = 0$$

Η ορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} \left(2m\omega^2 - k\right) & k & 0 \\ k & \left(m\omega^2 - 2k\right) & \mathrm{k} \\ 0 & \mathrm{k} & \left(m\omega^2 - k\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $m\omega^2\left(2m^2\omega^4 - 7km\omega^2 + 4k^2\right) = 0$ και οι λυσεις της

$$\omega^2 = 0, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}},\ \frac{7+\sqrt{17}}{4}\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} \qquad (4)$$

Κατά συνέπεια, οι συχνότητες ταλάντωσης είναι

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7 - \sqrt{17}}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}, \qquad \omega_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7 + \sqrt{17}}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} \qquad (5)$$

Οι αρνητικές συχνότητες δεν έχουν φυσική σημασία.

Γ) Για να βρούμε τα πλάτη των τρόπων ταλάντωσης αντικαθιστούμε $\omega = \omega_n$, n=1,2,3 στο σύστημα (2) και βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} (2m\omega_n{}^2-k) & k & 0 \\ k & (m\omega_n{}^2-2k) & \mathrm{k} \\ 0 & \mathrm{k} & (m\omega_n{}^2-k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=0 \qquad (6)$$

(i) Γιά ω $_1$=0 έχουμε $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3$

(ii) Γιά $\omega_2=\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{17}}\sqrt{k/m}\cong 0.8480\sqrt{k/m}$ έχουμε

$$k\begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{17}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{17}}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=0$$

(7)

δηλ. $\varphi_2=-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\varphi_1$ και $\varphi_3=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\varphi_1$ ή $\varphi_2\cong -0.4384\varphi_1$ και $\varphi_3\cong -1.5615\varphi_1$.

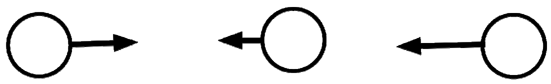
(iii)Για $\omega_3=\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{17}}\sqrt{k/m}\cong 1.6675\sqrt{k/m}$ έχουμε

$$k\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{17}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{17}}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3+\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}=0 \qquad (8)$$

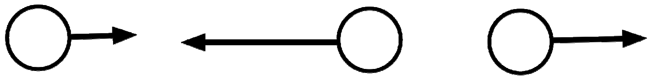
Και βρίσκουμε $\varphi_2=-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\varphi_1$ και $\varphi_3=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\varphi_1$

ή $\varphi_2\cong -4.5615\varphi_1$ και $\varphi_3\cong 2.5615\varphi_1$

Δ) Η συχνότητα $\omega_1=0$ αντιστοιχεί σε μεταφορική κίνηση ολόκληρου του μορίου. Στην ω_2 όταν το πρώτο άτομο μετατοπίζεται προς τα δεξιά, το δεύτερο και τρίτο είναι εκτός φάσης με πλάτη περίπου -0.43 και -1.56 αντίστοιχα. Στην ω_3 όταν το πρώτο άτομο μετατοπίζεται προς τα δεξιά, το δεύτερο είναι εκτός φάσης με πλάτος περίπου -4.56 ενώ το τρίτο είναι σε φάση με το πρώτο με σχετικό πλάτος 2.56 περίπου.



ω_2



ω_3

Άσκηση 10

A) Σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Η γενική έκφραση θα είναι της μορφής

$$\xi(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 A = \frac{T}{\mu}\frac{d^2 A}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{\mu\omega^2}{T} A \Rightarrow A(x) = C\cos(k\,x) + D\sin(k\,x) \quad (2.1)$$

με $k = \omega\sqrt{\dfrac{\mu}{T}}$

Οι συνοριακές συνθήκες επιβάλουν στα δυο ελεύθερα άκρα να μηδενίζεται η δύναμη $F = T\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ δηλαδή η παράγωγος του πλάτους. Ισχύει

$$A'(x) = -Ck\sin(kx) + Dk\cos(x) \qquad (2)$$

$$A'(0) = Dk = 0,\ \alpha\rho\alpha\ \mathrm{D} = 0$$

$$A'(L) = -Ck\sin(kL) = 0 \qquad (3)$$

Συνεπώς $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$, n=1,2,.. και άρα $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{\mu}{T}}$, n=1,2,..

B) Η γενική έκφραση για τον κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι

$\xi(x,t) = C_n\cos(k_n x)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ για $0 \le x \le L$

(γ) Ισχύει τωρα $A'(-L/2) = A'(L/2) = 0$, δηλαδή

$$Ck\sin(\frac{kL}{2}) + Dk\cos(\frac{kL}{2}) = 0$$

$$-Ck\sin(\frac{kL}{2}) + Dk\cos(\frac{kL}{2}) = 0 \qquad (4)$$

Η ορίζουσα του ομογενούς συστήματος των συντελεστών πρέπει αν είναι μηδέν για να υπάρχει λύση, δηλ.

$$\begin{vmatrix} \sin(\frac{kL}{2}) & \cos(\frac{kL}{2}) \\ -\sin(\frac{kL}{2}) & \cos(\frac{kL}{2}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Βρίσκουμε $\sin(kL) = 0$, δηλαδή $k_n = \frac{n\pi}{L}$, n=1,2,.. ενώ από την επίλυση του συστήματος (4) έχουμε

$$D_n = -C_n \tan(\frac{k_n L}{2}) \qquad (6)$$

Τελικά

$$A_n(x) = C_n \cos(k_n x) + D_n \sin(k_n x) = \frac{C_n}{\cos(\frac{k_n L}{2})}(\cos(k_n x)\cos(\frac{k_n L}{2}) - \sin(k_n x)\sin(\frac{k_n L)}{2}) =$$

$$C'_n \cos(k_n(x + \frac{L}{2})) \qquad (7)$$

Η γενική έκφραση για τον κάθε τρόπο ταλάντωσης είναι τώρα

$$\xi(x,t) = C'_n \cos(k_n(x + \frac{L}{2}))\cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ για } -L/2 \le x \le L/2 \qquad (8)$$

Παρατηρούμε ότι αν κάνουμε μετατόπιση στον άξονα x κατά L/2, δηλ αντικαταστήσουμε $x \to x - L/2$ βρίσκουμε την προηγούμενη σχέση του (β) για τους τροπους ταλάντωσης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{250\text{m/s}}{300/\text{s}} = 0.83\text{m}$. Ένα μήκος κύματος αντιστοιχεί σε διαφορά φάσης 2π δηλαδή 360°. Επομένως διαφορά φάσης 30° αντιστοιχεί σε απόσταση

$$\frac{\lambda}{12} = \frac{0.83m}{12} = 6.94cm$$

2)

Η ακουστότητα δίνεται από $\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$, με $I = \frac{P_0^2}{2\upsilon\rho_0}$

Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της πίεσης η ένταση τετραπλασιάζεται $I' = 4I$ και

$$\beta' = 10\log\frac{I'}{I_0} = 10\log\frac{4I}{I_0} = 10\log\frac{I}{I_0} + 10\log 4 = \beta + 6.02\text{db}$$

Συνεπώς, όταν το πλάτος της πίεσης διπλασιάζεται, η ακουστότητα αυξάνεται κατά 6.02db

3)

Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση της σελίδας 21 του βιβλίου των Alonso-Finn

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

όπου $R = 8.314472\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $20^{\circ}\mathrm{C}$ αντιστοιχούν σε $T = 293.15^{\circ}\mathrm{K}$ και M η μάζα ενός γραμμομορίου του αερίου. Έτσι έχουμε:

$M_H = 2\times 1.00794 \Rightarrow \upsilon_H = 1301\mathrm{m/s}$

$M_N = 2\times 14.00674 \Rightarrow \upsilon_N = 349\mathrm{m/s}$

$M_O = 2\times 15.99943 \Rightarrow \upsilon_O = 327\mathrm{m/s}$

4)

Ισχύει $F = -T\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$, όπου Τ η τάση και $\upsilon = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}$

$$P = -T\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t} = T\omega kA^2\cos^2(kx-\omega t)$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου του συνημιτόνου είναι ½ ενω $k = \omega/\upsilon$, c η φασική ταχύτητα του κύματος. Έχουμε

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mu\upsilon\omega^2 A^2$$

5) Τα δύο αρμονικά κύματα είναι το $\xi_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ και $\xi_2(x,t) = A\sin\left(-kx-\omega t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ καθώς τα δύο κύματα διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$. Για απλοποίηση των πράξεων, τα κύματα μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας εκθετικά ως

$$\xi_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t) = A\,\mathrm{Im}\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]$$

$$\xi_2(x,t) = A\sin\left(-kx-\omega t+\frac{\pi}{4}\right) = A\,\mathrm{Im}\left[e^{i\left(-kx-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

Η επαλληλία τους δίνει

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t)+\xi_2(x,t) = A\,\mathrm{Im}\left\{e^{i(kx-\omega t)} + e^{i\left(-kx-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}\right\} =$$

$$= A\,\mathrm{Im}\left\{\left(e^{ikx}+e^{i\left(-kx+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\times e^{i\omega t}\right\} = A\,\mathrm{Im}\left\{\left(e^{i\left(kx-\frac{\pi}{8}\right)}+e^{-i\left(kx-\frac{\pi}{8}\right)}\right)\times e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)}\right\} =$$

$$= 2A\cos\left(kx-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{Im}\left\{e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)}\right\} = 2A\cos\left(kx-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)$$

Το παραπάνω είναι ένα στάσιμο κύμα (δεν έχουμε διάδοση) συχνότητας ω και πλάτους 2A.