24/11/2010

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2010-11

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 2ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 21/12/10

Άσκηση 1

Αντικαθιστώντας τις δοθείσες εκφράσεις στις εξισώσεις του Maxwell στο κενό παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial E_y}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial B_y}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial B_x}{\partial t} & (3)\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} & (4)\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0\xrightarrow{(1)}\frac{\partial E_y}{\partial x}=0 & (5)\end{array}\right.$$

Από τις (1),(5) συμπεραίνουμε ότι $E_y=E_y(z,t)$ και από την (3) βρίσκουμε

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}=\omega B_0\sin(kz-\omega t)\Rightarrow E_y=\omega B_0\int dz\sin(kz-\omega t)=-\frac{\omega B_0}{k}\cos(kz-\omega t)+f(t)$$

όπου $f(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου. Καθώς μας δίνεται ότι πρόκειται για ΗΜ κύμα το E_y δεν μπορεί να έχει ένα τμήμα με εξάρτηση μόνο από το χρόνο και επομένως η $f(t)$ είναι μια αυθαίρετη σταθερά την οποία μπορούμε να επιλέξουμε ίση με μηδέν. Επομένως

$$E_y=-\frac{\omega B_0}{k}\cos(kz-\omega t) \qquad (6)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & 0\end{vmatrix}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y}+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (7)\\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (8)\\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial y}=0\xrightarrow{(2)}\dfrac{\partial B_y}{\partial x}=0 \quad (9)\end{array}\right.$$

Από τις (2),(9) συμπεραίνουμε ότι $B_y=B_y(z,t)$ και από την (4) βρίσκουμε

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t}=-E_0\,k\sin(k\,z-\omega t)\Rightarrow B_y=E_0\,k\int dt\sin(k\,z-\omega t)+g(y)\Rightarrow$$

$$B_y=\frac{E_0\,k}{\omega}\cos(k\,z-\omega t) \qquad (10)$$

όπου θέσαμε επίσης $g(y)=0$ για τους λόγους που αναφέραμε προηγουμένως.
Αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\Rightarrow\frac{E_0\,k^2}{\omega}\sin(k\,z-\omega t)=\omega\,\varepsilon_0\mu_0E_0\sin(k\,z-\omega t)\Rightarrow\frac{k^2}{\omega^2}=\varepsilon_0\mu_0$$

$$\Rightarrow k=\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\Rightarrow k=\frac{\omega}{c}$$

που είναι η γνωστή έκφραση της ταχύτητας του ΗΜ κύματος. Αντικαθιστώντας την (6) στην (8) βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι λοιπόν

$$\vec{E}=(E_0,-cB_0,0)\cos(k\,z-\omega t)$$
$$\vec{B}=(B_0,E_0/c,0)\cos(k\,z-\omega t)$$

Β)

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=\frac{\sqrt{E_0^2+c^2B_0^2}}{\sqrt{B_0^2+\dfrac{E_0^2}{c^2}}}=c$$

Γ) Από την τελευταία έκφραση διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για επίπεδα πολωμένο ΗΜ κύμα με επίπεδο πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου παράλληλο στο διάνυσμα $E_0\hat{x}-cB_0\hat{y}$

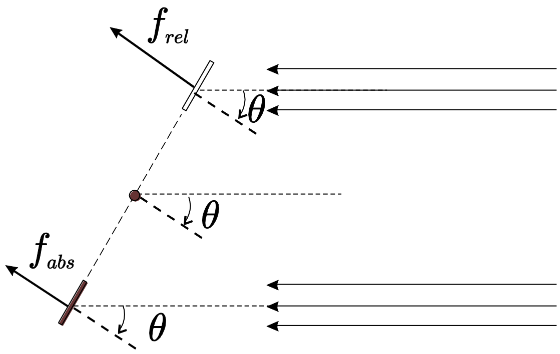
Δ)

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ E_0 & -cB_0 & 0\\ B_0 & +E_0/c & 0\end{vmatrix}\cos^2(k\,z-\omega t)=\frac{\hat{z}}{\mu_0}\left(cB_0^2+\frac{E_0^2}{c}\right)\cos^2(k\,z-\omega t)$$

Η ένταση δίνεται από

$$I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left(cB_0^2 + \frac{E_0^2}{c}\right)\left\langle \cos^2\left(k\,z - \omega t\right)\right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\left(cB_0^2 + \frac{E_0^2}{c}\right)$$

Άσκηση 2



Α) Η δύναμη λόγω πίεσης της ακτινοβολίας που ασκείται κάθετα σε μια πλήρως ανακλαστική επιφάνεια είναι ίση με $f_{ref} = 2uA$, όπου u η πυκνότητα ενέργειας που είναι ίση με $u = I/c$. Αντίστοιχα, η δύναμη σε μια πληρως απορροφητικη επιφανεια ειναι $f_{abs} = uA$. Όταν η κατεύθυνση πρόσπτωσης της ακτινοβολίας ειναι υπο γωνια θ ως προς την κατακορυφο, τότε η ενεργος επιφανεια ειναι $A\cos\theta$ ενω η δύναμη πολλαπλασιάζεται επίσης με $\cos\theta$ λογω γεωμετριας. Κατα συνέπεια, έχουμε στην περίπτωση αυτή $f_{ref} = 2uA\cos^2\theta$ και $f_{abs} = uA\cos^2\theta$ αντιστοιχα. Αριθμητικα ισχυει $IA/c = 1400W/m^2 \cdot 10^{-4}m^2/3\cdot 10^8 m/s \approx 0.46nN = 460pN$. Η ροπή που ασκείται στο ακτινόμετρο είναι

$$\tau = f_{ref}L - f_{abs}L = uAL\cos^2\theta = 23pNm\cos^2\theta \qquad (1)$$

θεωρώντας ότι τα κέντρα των πλακιδίων βρίσκονται στα άκρα του βραχίονα. Παρατηρούμε ότι για γωνίες πρόσπτωσης π/2 και 3π/2, δηλαδη οταν η ακτινοβολια ειναι παράλληλη στον βραχίονα, η ροπη είναι μηδέν, ενώ για 0, π είναι μέγιστη, δηλ 23pNm.

Β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ειναι $I_M = 2ML^2$ συνεπως η διαφορική εξίσωση κίνησης $I_M\ddot{\theta} = \tau$ γίνεται

$$2ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = uAL\cos^2\theta \qquad (2)$$

ή

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{uA}{4ML}(1+\cos 2\theta) \qquad (3)$$

οπου $\alpha_0 = \frac{uA}{4ML} = 1.15\times 10^{-4}\,s^{-2}$ Παρατηρουμε οτι η γωνιακή επιτάχυνση έχει τιμή $\alpha = \alpha_0(1+\cos 2\theta)$, δηλαδη για καθε πλήρη περιστοφή η τιμή της παίρνει δυό φορές την μέγιστη ($2a_0$) και ελάχιστη τιμή (δηλ. μηδέν). Για πολλες περιστροφές, στον μέσο όρο η γωνική επιτάχυνση είναι α_0 και κατά συνέπεια προσεγγιστικά μετά από χρόνο $t = \omega/\alpha_0 \approx 10^4$ sec θα φθασει το ακτινομετρο στον ρυθμό μιας περιστροφής ανά δευτερόλεπτο.

Άσκηση 3

Α) Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου σήματος για να δούμε αν εφαρμόζεται η σχέση (19.28) του Alonso-Finn. Ισχύει

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{10^6} m = 300m$$

Εφόσον $z_0 = 1m$, το μήκος του σύρματος είναι πολυ μικρότερο του μήκους κύματος της εκπεμόμενης ακτινοβολίας και, κατα συνέπεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχεση (19.28)

$$P = \frac{I^2\omega^2 z_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = .. = 4.39mW$$

Β) Χρησιμοποιούμε την σχέση (19.24) του Alonso-Finn με $r_0 = 5\times 10^3 m$ και r την νέα απόσταση απο την κεραία. Για απομάκρυνση επί του εδάφους θ=π/2 και ισχύει

$$\frac{I(r)}{I(r_0)} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

Για να μετατρέψουμε τον λόγο σε dB, παίρνουμε τον δεκαδικό λογάριθμο της σχέσης και πολλαπλασιάζουμε επί 10, δηλ.

$$10\log_{10}\frac{I(r)}{I(r_0)} = 10\log_{10}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

ή

$$20\log_{10}\frac{r_0}{r} = -5dB$$

Επιλύουμε την σχέση ως πρός r και βρισκουμε

$$r = r_0 10^{\frac{5}{20}} = 5\times 10^3 \times 1.778 = 8890m$$

Αρα πρεπει να βρισκεται στα 8890m στην οριζοντια κατευθυνση ή να μετακινηθει 3890m επι πλέον.

Αν ο δεκτης μετακινηθεί κατακόρυφα κατα απόσταση h απο το έδαφος, για να έχουμε πτώση σηματος κατα 5dB θα πρεπει να ισχύει αντίστοιχα

$$10\log_{10}\left(\frac{r_0\sin\theta}{r\sin\pi/2}\right)^2 = -5$$

όπου $r = \sqrt{r_0^2 + h^2}$ και $\sin\theta = r_0/r$

Λύνουμε ως προς h και βρίσκουμε h=4411m. Η κατεθυνση του πεδίου στο υψος h δεν ειναι παράλληλη με την κατεύθυνση του πεδίου στο έδαφος και αυτο εχει συνεπεια την διαφορετική μεταβολη του σηματος στην οριζόντια και κατακόρυφη απόσταση.

Άσκηση 4

Α) Αν λ, λ' τα μήκη κύματος στο κενό και στο τζάμι, η ταχύτητα του κύματος στο τζάμι είναι

$$v = c/n \Rightarrow \lambda' f = \lambda f/n \Rightarrow \lambda' = \lambda/n$$

Αν χ, χ' τα πλήθη των μηκών κύματος στο κενό και στο τζάμι, τότε

$$\chi' = d/\lambda' = d/(\lambda/n) = nd/\lambda \Rightarrow \chi' = n\chi$$

Β) Αν τ, τ' οι χρόνοι διελεύσεως σε κενό πάχους d και στο τζάμι, τότε

$$\tau' = d/v = d/(c/n) = nd/c \Rightarrow \tau' = n\tau$$

Συνεπώς η καθυστέρηση είναι $\Delta\tau = \tau' - \tau = n\tau - \tau = (n-1)\dfrac{d}{c}$

Γ) Στο σημείο εισόδου η διαφορά φάσεως κάποια χρονική στιγμή t είναι 0.
Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο εξόδου η φάση του αρχικού κύματος (απουσία τζαμιού) θα ήταν $2\pi\;\; ft - d/\lambda$ ενώ παρουσία τζαμιού είναι $2\pi\;\; ft - d/\lambda'$

Άρα η διαφορά φάσεως είναι

$$\delta\phi = 2\pi d\;\; 1/\lambda' - 1/\lambda\;\; = 2\pi d\;\; n-1\;\; /\lambda = 2\pi d\;\; n-1\;\; f/c$$

Δ) Για να μην υπάρχει διαφορά φάσεως πρέπει $\delta\phi = \kappa 2\pi,\ \kappa$ ακέραιος.

Άρα

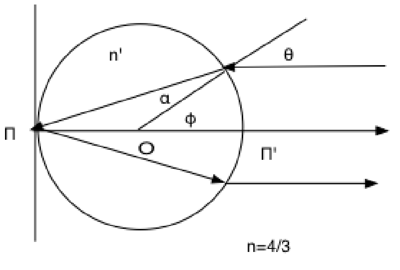
$$\frac{2\pi d\;\; n-1\;\; f}{c} = 2\pi\kappa \Rightarrow f = \kappa\frac{c}{d\;\; n-1},\ \kappa = 1,2,...$$

$$f = \kappa\frac{3\times 10^{8}\; m/s}{2\times 10^{-3} m\;\; 1.5-1} = \kappa \times 3\times 10^{11} Hz,\ \kappa = 1,2,...$$

Τούτο επιτυγχάνεται για συχνότητες υπερύθρου και άνω.
Για το ορατό (4 έως 8) ($\times 10^{14}$ Hz) πρέπει

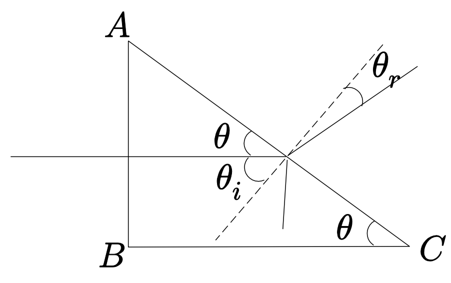
$$\kappa = \frac{4\,\varepsilon\omega\varsigma\, 8\;\; \times 10^{14} Hz}{3\times 10^{11} Hz} = \;\; 1333\,\varepsilon\omega\varsigma\, 2667\;\; .$$

Άσκηση 5



Από το νόμο του Snell έχουμε $n'\sin\alpha = n\sin\theta$ και για μικρές γωνίες, μιά και οι ακτίνες είναι κοντα στο άξονα ΠΠ' έχουμε $n'\alpha = n\theta$. Ισχύει φ=θ, φ=2α και άρα θ=2α. Τελικά n' =nθ/α= 2n=8/3.

Άσκηση 6



Α) Για να μην έχουμε εξερχόμενο φως θα πρέπει η γωνία πρόσπτωσης $\theta_i = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ στην πλευρά AC να είναι μεγαλύτερη η ίση με τη γωνία ολικής εσωτερικής ανάκλασης

$$\theta_c = \arcsin\frac{n}{1.52}$$

$$\frac{\pi}{2}-\theta \geq \arcsin\frac{n}{1.52} \Rightarrow \theta \leq \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{1.52}$$

(i) Επομένως για τον αέρα ($n=1$) έχουμε $\theta_{\max}=48.9^\circ$

(ii) Ενώ για το νερό ($n=1.33$) έχουμε $\theta_{\max}=29.0^\circ$

B) Όπως φαίνεται από το Σχήμα, για έξοδο από την πλευρά AC, η γωνία ανάμεσα στην εισερχόμενη και εξερχόμενη ακτίνα είναι

$\delta=\frac{\pi}{2}+\theta+\theta_r=\frac{\pi}{2}+\theta+\arcsin\left(\frac{n}{n'}\cos\theta\right)$ όπου χρησιμοποιήσαμε το νόμο του Snell

$$1.52\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=n\sin\theta_r \Rightarrow 1.52\cos\theta=n\sin\theta_r \Rightarrow \theta_r=\arcsin\left(\frac{1.52}{n}\cos\theta\right)$$

Συνεπώς $\delta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta+\arcsin\left(\frac{1.52}{n}\cos\theta\right)=0 \Rightarrow n\sin\theta=-1.52\cos\theta \Rightarrow n=-\frac{1.52}{\tan\theta}$

που είναι αδύνατον για τα συνήθη υλικά ($n>0$)[1]. Υπάρχει όμως η δυνατότητα εξόδου από την πλευρά BC και κάθετα σε αυτήν. Τότε $\theta=45^\circ \leq \theta_{\max}$ οπότε πρέπει τουλάχιστον

$$n'\cos\theta \leq n \Rightarrow n' \leq n\sqrt{2}=1.4142\ n$$

Άρα (i) για τον αέρα $n' \leq 1.4142$ και

(ii) για το νερό $n' \leq 1.881$

Άσκηση 7

Από τις σχέσεις (20.25) των Αλόνσο-Φινν παίρνουμε

$$E_{r,\pi}'=R_\pi E_{i,\pi}$$
$$E_{r,\sigma}'=R_\sigma E_{i,\sigma}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\tan\alpha_r'=E_{r,\sigma}'/E_{r,\pi}'$, $\tan\alpha_i=E_{i,\sigma}/E_{i,\pi}$ και διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε τη δεύτερη από τις ζητούμενες σχέσεις.

Με παρόμοιο τρόπο

$$E_{r,\pi}=T_\pi E_{i,\pi}$$
$$E_{r,\sigma}=T_\sigma E_{i,\sigma}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\tan\alpha_r=E_{r,\sigma}/E_{r,\pi}$ και $\tan\alpha_i=E_{i,\sigma}/E_{i,\pi}$ και διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε την πρώτη από τις ζητούμενες σχέσεις.

Για να υπολογίσουμε πόσο στρέφεται το επίπεδο ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις για τις γωνίες α_r' και α_r αφού υπολογίσουμε τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης από τις σχέσεις (20.25) των Αλόνσο Φινν. Πρώτα υπολογίζουμε τη γωνία διάθλασης

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r \Rightarrow \theta_r=\sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_r\right)=26.9^o$$

Αντικαθιστώντας στις (20.25) παίρνουμε

$$R_\pi=-0.0872, R_\sigma=-0.195, T_\pi=0.817, T_\sigma=0.805$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις

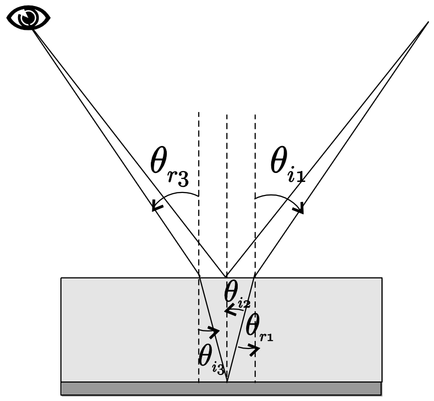
[1] Πρόσφατες έρευνες έχουν δείξει ότι μπορούν να κατασκευαστούν μετα-υλικά με αρνητικό δείκτη διάθλασης τα οποία θα μπορούσαν να ικανοποιήσουν αυτή τη συνθήκη.

$$\tan\alpha_r = \frac{T_\sigma}{T_\pi}\tan 33^o \Rightarrow \alpha_r = 32.5929^o$$

$$\tan\alpha_r' = \frac{R_\sigma}{R_\pi}\tan 33^o \Rightarrow \alpha_r' = 55.4716^o$$

οπότε το επίπεδο ταλάντωσης του ηλ. πεδίου περιστρέφεται αντίστοιχα κατά $33^o - 32.5929^o = 0.407^o$ και $55.4716^o - 33^o = 22.5^o$.

Άσκηση 8



Α) Το είδωλο εξαφανίζεται επειδή το Polaroid αφήνει να περάσει μόνον η π-συνιστώσα, και αυτή μηδενίζεται στην γωνία Brewster του πάτου, έστω θ_ζ. Αν n_ζ ο δ.δ. του πάτου, τότε $\tan\theta_\zeta = n_\zeta/1$, και, από την γεωμετρία, $\tan\theta_\zeta = \dfrac{176/2}{57}$. Άρα n_ζ = 1.54.

Όταν προστεθεί το νερό, τα δύο είδωλα προέρχονται εξ ανακλάσεως (ι) από την άνω επιφάνεια του νερού, και (ιι) από την επιφάνεια του πάτου.

Το είδωλο (ι) εξαφανίζεται στην γωνία Brewster του νερού ως προς τον αέρα, δηλαδή όταν

$$\tan\theta = \frac{1.33}{1} = \frac{x/2}{56\,cm} \quad \Rightarrow \quad x = 1.33\times 56\,cm \times 2 = 149\,cm$$

Β) Το είδωλο (ιι) από τον πάτο σχηματίζεται από μια ακτίνα η οποία προσπίπτει στο νερό με γωνία θ_{i1} διαθλάται με γωνία θ_{r1}, προσπίπτει στον πάτο με γωνία θ_{i2}, ανακλάται προσπίπτει (από κάτω) στην επιφάνεια του νερού με γωνία θ_{i3} και διαθλάται στον αέρα με γωνία θ_{r3}.Το είδωλο αυτό μπορεί να εξαφανιστεί για δύο λόγους (a) Η γωνία θ_{i3} είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ολικής εσωτερικής ανάκλασης στην διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα $\sin\theta_c = \dfrac{1}{1.33} = 0.752$ (b) η γωνία θ_{i2} ισούται με τη γωνία Brewster του πάτου ως προς το νερό: $\tan\theta' = \dfrac{1.54}{1.33} = 1.16$.

Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις:

(a) Η συνθήκη είναι $\sin\theta_{i3} > 1/1.33$. Λόγω της συμμετρίας της διάταξης (μπορεί επίσης να αποδειχθεί εύκολα με διαδοχική εφαρμογή του νόμου του Snell) έχουμε $\theta_{i3} = \theta_{r1}$ και από το νόμο του Snell $\sin\theta_{r1} = \dfrac{\sin\theta_{i1}}{1.33} > \dfrac{1}{1.33}$ το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(b) Η συνθήκη είναι $\tan\theta_{i2} = 1.15789 \Rightarrow \sin\theta_{i2} = 0.75682$, όμως από το Σχήμα $\theta_{i2} = \theta_{r1}$ και όπως δείξαμε πριν $\sin\theta_{r1} = \dfrac{\sin\theta_{i1}}{1.33} \Rightarrow \dfrac{\sin\theta_{i1}}{1.33} = 0.75682 \Rightarrow \sin\theta_{i1} = 1.00657 > 1$ το οποίο επίσης οδηγεί σε άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει απόσταση x για την οποία το είδωλο (ιι) εξ ανακλάσεως από την επιφάνεια του πάτου, κάτω από το νερό, να εξαφανίζεται.

Άσκηση 9

Α) Έχουμε φυσικό φως να προσπίπτει σε έναν πολωτή. Η ένταση του φωτός που διέρχεται από πολωτή του οποίου ο οπτικός άξονας σχηματίζει γωνία θ με τον οπτικό άξονα δίνεται από το νόμο του Malus $I_1 = I_0 \cos^2\theta$. Καθώς όμως για το φυσικό φως η γωνία θ δεν έχει καθορισμένη τιμή το αποτέλεσμα δίνεται από τη μέση τιμή

$$I_1 = I_0 \left\langle \cos^2\theta \right\rangle = \frac{I_0}{2}$$

Β) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του (Α)

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$$

Γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του (Α)

$$I_3 = \frac{I_0}{2}\cos^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{I_0}{8}$$

Δ) Για n πολωτές

$$I_n = \frac{I_0}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2(n-1)}\right]^{2(n-1)} \approx \frac{I_0}{2}$$

καθώς για $n \gg 1$, $\cos\dfrac{\pi}{2(n-1)} \approx 1$

Ε) Αν η απορρόφηση κάθε πλακιδίου είναι $a = 0.05$, τότε για n πολωτές

$$I_n = \frac{I_0}{2}\left(1-a\right)^n\left[\cos\frac{\pi}{2(n-1)}\right]^{2(n-1)}$$

Για $n = 3,4,5,6,7$ πλακίδια παίρνουμε αντιστοίχως τις εξής εντάσεις 0.107, 0.172, 0.205, 0.222, 0.230, 0.232, 0.231, Άρα το βέλτιστο πλήθος $n = 8$.
Οπότε η εξερχομένη ένταση είναι $I_6 = 0.232 I_0$ υπό γωνία πολώσεως

$$8\frac{\pi}{2\left(8-1\right)} = \frac{4}{7}\pi = 102.9^\circ$$

Άσκηση 10

Η ακτινοβολούμενη ένταση (Α-Φ 19.39) είναι

$$I\ \theta \ \equiv \frac{dE}{dt dA} = \frac{\mathrm{K}}{r^2}\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt}_{\ o\lambda\iota\kappa\eta} = \int I\ \theta\ dA = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\mathrm{K}}{r^2}\sin^2\theta\ r^2 \sin\theta$$

όπου dA είναι η στοιχειώδης επιφάνεια σφαίρας ακτίνος r, και Κ η σταθερά του τύπου 19.39.
Η ολοκλήρωση ως προς φ δίνει 2π.
Η ολοκλήρωση ως προς θ διευκολύνεται θέτοντας

$x = \cos\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta = -dx,\ \sin^2\theta = 1 - x^2$

τότε

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2\theta\ \sin\theta d\theta = \int_{x=-1}^{x=1} 1 - x^2\ dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=-1}^{x=1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Άρα

$$\frac{dE}{dt}_{\,ολικη} = 2\pi\frac{4}{3}\mathrm{K} = \frac{8\pi}{3}\frac{q^2a^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0} = \frac{q^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0},$$

ο τύπος του Larmor, (Α-Φ 19.38).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)

Α)Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n = \frac{c}{\upsilon} = \frac{c}{0.9c} = 1.11$$

Β) Οι συχνότητες εξαρτώνται από την πηγή και συνεπώς είναι ίδιες στο υλικό του (Α) και στο κενό. Επομένως για τα μήκη κύματος θα έχουμε

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c\lambda}{\upsilon} = \frac{\lambda}{0.9} = 600\text{nm},$$

2)

Από τα δεδομένα του προβλήματος, $\theta_i = \pi/6$ και από το νόμο του Snell,

$$\sin\theta_i = 1.5\sin\theta_r \to \sin\theta_r = 0.5/1.5 = 0.333 \Rightarrow \cos\theta_r = 0.943$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (20.25) του βιβλίου των Alonso-Finn , παίρνουμε

$$R_\pi = -0.159, R_\sigma = -0.240, T_\pi = 0.773,\ T_\sigma = 0.760$$

Τα πρόσημα αναφέρονται στη φορά που θα έχει το ηλεκτρικό πεδίο σε σχέση με τη σύμβαση που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των σχέσεων (20.25) και η οποία παρουσιάζεται στα Σχήματα 20-17, 20-18. Για την παράλληλη συνιστώσα το ανακλώμενο κύμα έχει ηλεκτρικό πεδίο με φορά αντίθετη με αυτή του σχήματος 20-17 ενώ το διαθλώμενο κύμα έχει ίδια με αυτή του σχήματος. Ομοίως, για την κάθετη συνιστώσα το ανακλώμενο κύμα έχει ηλεκτρικό πεδίο με φορά αντίθετη με αυτή του Σχήματος 20-18 ενώ το διαθλώμενο κύμα έχει την ίδια.

3)

Οι δύο από τις εξισώσεις του Maxwell συνδέουν το ηλεκτρικό με το μαγνητικό πεδίο, συγκεκριμένα στην περίπτωση απουσίας πηγών $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Αν θέσουμε σε αυτές $\vec{B} = 0$ τότε παίρνουμε από την πρώτη $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν εξαρτάται από το χρόνο και άρα δεν υπάρχει ηλεκτρικό κύμα. Παρόμοια αν θέσουμε στην δεύτερη $\vec{E} = 0$ παίρνουμε $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ και κατά συνέπεια δεν υπάρχει ούτε καθαρά μαγνητικό κύμα. Γενικά οποιαδήποτε μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί μαγνητικό πεδίο και αντιστρόφως και για αυτό τα δύο πεδία συνυπάρχουν σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

4)

Σύμφωνα με το εδάφιο 20.12 το ΗΜ κύμα που διεισδύει σε βάθος x εντός του μετάλλου έχει τη μορφή

$$E = E_0 e^{-ax}\sin(kx - \omega t)$$

Το βάθος ℓ στο οποίο το πεδίο εξασθενεί στο 1/e της αρχικής του τιμής δίνεται από

$$\frac{E_0 e^{-a\ell}}{E_0} = \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-a\ell} = e^{-1} \Rightarrow \ell = \frac{1}{a}$$

Σύμφωνα με το βιβλίο των Alonso-Finn, για $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ ο συντελεστής α δίνεται από

$\ell = \sqrt{\dfrac{1}{2}\sigma\mu\omega}$ και κατά συνέπεια

$$\ell = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \qquad (1)$$

όπου σ η αγωγιμότητα του χαλκού $\sigma = 5{,}8\times 10^7 S/m$ και $\varepsilon=\varepsilon_0$ και $\mu=\mu_0$.

α)Για συχνότητα $\nu = 6\times 10^9 Hz$, έχουμε $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1.74\times 10^8 \gg 1$ και η σχέση (1) δίνει $\ell = 8.53\times 10^{-7} m = 0.853\mu m$

β) Για συχνότητα $\nu = 6\times 10^{14} Hz$, έχουμε $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1.74\times 10^3 \gg 1$ και η σχέση (1) δίνει $\ell = 2.70\times 10^{-9} m = 2.70 nm$

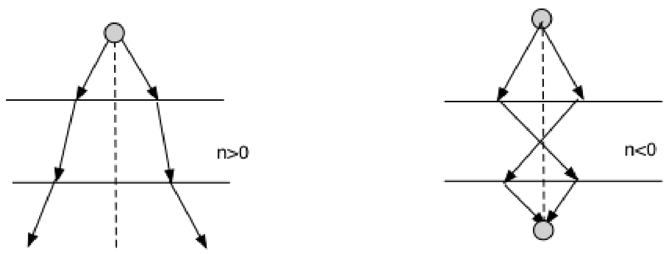
γ) Για συχνότητα $\nu = 6\times 10^{18} Hz$, έχουμε $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 0.173$ το οποίο είναι μικρότερο της μονάδος και δεν ισχύει πλέον η προσέγγιση του τύπου (1) οπότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την τιμή του α και κατά συνέπεια του ℓ

5)

Α) Απο τον νόμο του Snell, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ $n_2 = -|n|$, βρίσκουμε $n_1 \sin\theta_1 = -|n|\sin\theta_2 = |n|\sin(-\theta_2)$

Δηλαδη, η γωνία διάθλασης έχει αντίθετο προσημο και η διαθλόμενη ακτίνα βρίσκεται στην ίδια πλευρα με την προσπίπτουσα ως προς το καθετο επίπεδο στην επιφάνεια.

B) Για n>0 η δεσμη αποκλίνει ενω για n<0 μπορουμε αν εχουμε εστιαση με το πλακίδιο (τέλειος φακός)



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό σε διαφορική μορφή είναι

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$