6/1/2011

# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

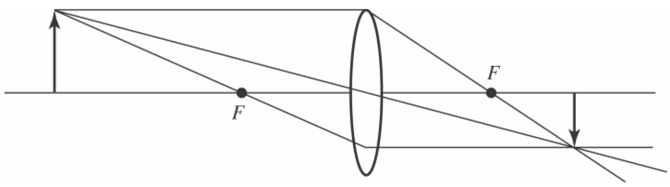
# ΦΥΕ 34    2010-11

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

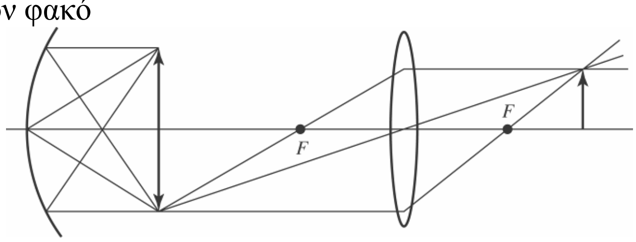
# Προθεσμία παράδοσης 8/2/11

**Άσκηση 1**

Α) Για τις ακτίνες που περνάνε κατευθείαν μέσα από το φακό




Το είδωλο είναι πραγματικό και ανεστραμμένο.
Για τις ακτίνες που ανακλώνται πρώτα στο κάτοπτρο, σχηματίζεται ένα ανεστραμμένο είδωλο στο κέντρο καμπυλότητας του κατόπτρου το οποίο αποτελεί το αντικείμενο για τον φακό




Το τελικό είδωλο που βλέπουμε μέσα από το φακό είναι πραγματικό και ορθό.

Β) Στην πρώτη περίπτωση

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{85.0\text{ cm}}-\frac{1}{q}=\frac{1}{32.0\text{ cm}}\Rightarrow q=-51.3\,\text{cm},$$ στα δεξιά του φακού

Στη δεύτερη σχηματίζεται πρώτα το είδωλο στον καθρέπτη σε απόσταση που δίνεται από $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{20.0\text{ cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{10.0\text{ cm}}\Rightarrow q=20.0\text{ cm},$ και άρα το είδωλο από τον καθρέπτη που παίζει το ρόλο αντικειμένου για τον φακό είναι στην ίδια θέση με το αρχικό αντικείμενο αλλά ανεστραμμένο. Κατά συνέπεια η θέση του τελικού ειδώλου είναι ίδια όπως και στην πρώτη περίπτωση.
Το πρώτο είδωλο έχουμε $M=-q/p=51.3/85\approx0.60$ επομένως είναι 0.60 του αρχικού μεγέθους. Το δεύτερο είδωλο έχει το ίδιο μέγεθος αλλά είναι ανεστραμμένο.

**Άσκηση 2**

Μπορούμε να θεωρήσουμε την επιφάνεια του νερού ως σφαιρική διαθλαστική με $R=\infty$ και επομένως

$$\frac{n_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha}}{q}+\frac{n_{\nu\varepsilon\rho\acute{o}}}{3\text{m}}=0\Rightarrow q=-\frac{4}{1.33}\text{m}\approx-3.00\text{m}$$

και συνεπώς το είδωλο βρίσκεται στη μεριά του αντικειμένου (στο νερό) και 3m κάτω από την επιφάνειά του. Επομένως το ψάρι βρίσκεται σε απόσταση $s = 5m$ από τον φακό. Το είδωλο βρίσκεται από την εξίσωση

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

με $f = 30m$. Βρίσκουμε $s' = -6m$, δηλαδή το είδωλο του ψαριού βρίσκεται στο σημείο που είναι πραγματικά το ψάρι, δηλαδή 4 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

**Άσκηση 3**

Α) Έστω $n_1$ ο δδ της αλκοόλης και $n$ του πυριτύαλου. Έχουμε σε αναλογία με τις (21.27-30) των Αλόνσο-Φινν

$$n_1 \sin i = n \sin r$$

$$n_1 \sin i = n \sin r'$$

$$r + r' = A$$

$$\delta = i + i' - A$$

Έχουμε $r = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n}\sin i\right)$ και $n_1 \sin(\delta - i + A) = n\sin(A - r)$ οπότε

$$\sin(\delta - i + A) = \frac{n}{n_1}\sin\left(A - \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n}\sin i\right)\right)$$ οπότε τελικά

$$\delta = i - A + \sin^{-1}\left\{\frac{n}{n_1}\sin\left(A - \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n}\sin i\right)\right)\right\}$$

(i)C-Fraunhofer: $n = 1.622$, $n_1 = 1.361$ άρα

$r = 24.8058^o$, $i' = \delta - i + A = 30.4856^o$, $\delta_C = 10.4856^o$

(ii)F-Fraunhofer: $n = 1.639$, $n_1 = 1.367$ άρα

$r = 24.6468^o$, $i' = \delta - i + A = 30.8905^o$, $\delta_F = 10.8905^o$

Τελικά $\delta_F - \delta_C = 0.4049^o$.

Β)Από τον τύπο του Cauchy για τον πυριτύαλο έχουμε

$$n_C = A + \frac{B}{\lambda_C^2},\ n_F = A + \frac{B}{\lambda_F^2}.$$

Θέτοντας $n_C = 1.622$, $\lambda_C = 656.3$ nm, $n_F = 1.639$, $\lambda_F = 486.2$ nm βρίσκουμε ότι

$A = 1.60132 \qquad B = 8906.83\text{nm}^2$

Άρα για $\lambda = 563.2$ nm παίρνουμε

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.6294$$

Για την αλκοόλη αντικαθιστούμε τις τιμές $n_C = 1.361$, $\lambda_C = 656.3$ nm, $n_F = 1.367$, $\lambda_F = 486.2$ nm παίρνουμε

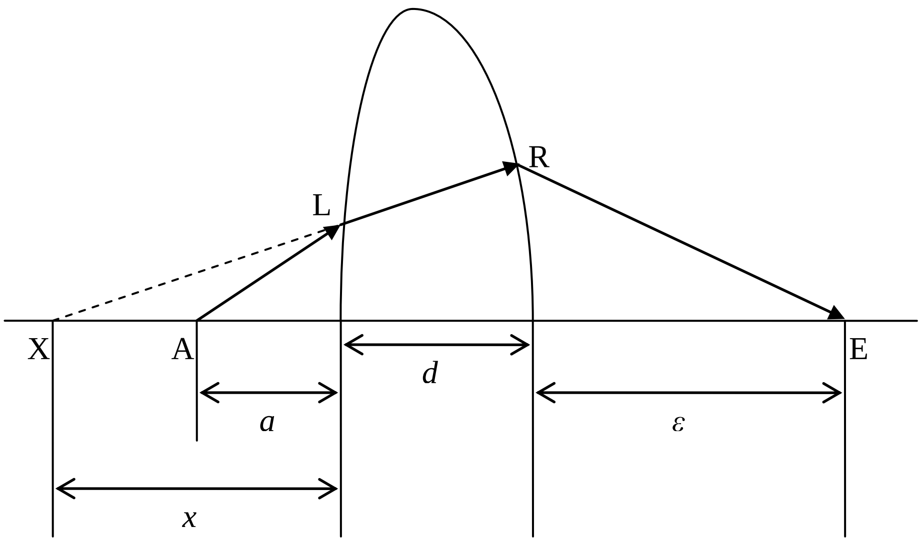
$A = 1.3537 \qquad B = 3143.59\text{nm}^2$

Άρα για $\lambda = 563.2$ nm παίρνουμε

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.3636.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές για τους δδ στις εξισώσεις του υποερωτήματος (α) βρίσκουμε
$r = 24.7359^o$, $i' = \delta - i + A = 30.6627^o$, $\delta_\lambda = 10.6627^o$

**Άσκηση 4**




Επιλύουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους:
<u>Με τις συμβάσεις των Alonso-Finn:</u>
Α)
ι) Αριστερή επιφάνεια.
Στην πορεία της δέσμης του Σχήματος, το σημείο R κείται υψηλότερα του L, άρα το είδωλο X από την αριστερή επιφάνεια κείται αριστερότερα του A και είναι φανταστικό επειδή σχηματίζεται από την (αριστερή) προέκταση του τμήματος της πραγματικής δέσμης LR. Για την προσπίπτουσα δέσμη (AL) το A είναι πραγματικό και η επιφάνεια κυρτή. Έστω $x$ η απόσταση του X.
Ελέγχουμε τον Πίνακα 21.2:

| | | |
|---|---|---|
| $r_L$ | Κυρτή $\Rightarrow r_L < 0 \Rightarrow$ | $r_L = -\lvert r_L \rvert$ |
| P | Πραγματ. $\Rightarrow$ p > 0 $\Rightarrow$ | p = + $\lvert a \rvert$ |
| Q | Φανταστ. $\Rightarrow$ q > 0 $\Rightarrow$ | q = + $\lvert x \rvert$ |
| $n_1$ | | 1 |
| $n_2$ | | $n$ |

Ο τύπος 21.10 γίνεται:

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} \Rightarrow \frac{1}{|a|} - \frac{n}{|x|} = \frac{1-n}{-|r_L|} \Rightarrow \frac{n}{|x|} = \frac{1}{|a|} - \frac{n-1}{|r_L|},$$

απ' όπου ευρίσκεται το $x$.

ιι) Δεξιά επιφάνεια.
Τώρα η δεξιά επιφάνεια δέχεται την πραγματική δέσμη LR προερχόμενη από το X (φαινομενικώς – αλλά τούτο είναι αδιάφορον). Άρα το X είναι πραγματικό αντικείμενο για την δεξιά επιφάνεια, σε απόσταση $x$+$d$ από αυτήν. Το είδωλο

σχηματίζεται από την πραγματική δέσμη RE, άρα είναι πραγματικό. Και για την προσπίπτουσα δέσμη (LR) η επιφάνεια είναι κοίλη. Έστω $\varepsilon$ η απόσταση του E. Ελέγχουμε τον Πίνακα 21.2:

| | | |
|---|---|---|
| $r_R$ | Κοίλη $\Rightarrow r_R > 0 \Rightarrow$ | $r_R = +\lvert r_R \rvert$ |
| P | Πραγματ. $\Rightarrow$ p > 0 $\Rightarrow$ | p = $+\lvert x+d \rvert$ |
| Q | Πραγματ. $\Rightarrow$ q < 0 $\Rightarrow$ | q = $-\lvert \varepsilon \rvert$ |
| $n_1$ | | $n$ |
| $n_2$ | | 1 |

Ο τύπος 21.10 γίνεται:

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} - \frac{n_1 - n_2}{r} \Rightarrow \frac{n}{\lvert x+d \rvert} - \frac{1}{-\lvert \varepsilon \rvert} = \frac{n-1}{\lvert r_R \rvert} \Rightarrow \frac{1}{\lvert \varepsilon \rvert} = \frac{n-1}{\lvert r_R \rvert} - \frac{n}{\lvert x+d \rvert},$$

απ' όπου ευρίσκεται το $\varepsilon$.

B) Από το παράδειγμα 21.5 η μεγέθυνση κάθε επιφάνειας είναι $M = \frac{n_1 q}{n_2 p}$

Άρα

$$M_L = \frac{1}{n}\frac{\lvert x \rvert}{\lvert a \rvert}, \quad M_R = \frac{n}{1}\frac{\left(-\lvert \varepsilon \rvert\right)}{\lvert x+d \rvert}, \qquad \Rightarrow \qquad M = M_L M_R = -\frac{\lvert \varepsilon \rvert}{\lvert a \rvert}\frac{\lvert x \rvert}{\lvert x+d \rvert}$$

Για την δοθείσα πορεία το τελικό είδωλο είναι ανεστραμμένο, αλλά όχι πάντοτε μεγαλύτερο του αντικειμένου.

<u>Με τις ενιαίες συμβάσεις:</u>

A) Ο τύπος για τις διαθλαστικές επιφάνειες και πρόσπτωση ακτίνων από $n_1$ προς $n_2$ είναι:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad (1)$$

Ξεκινάμε από την αριστερή διαθλαστική επιφάνεια ,εδώ $n_1 = 1, n_2 = n, p = a, R = r_L$ επομένως

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{q} = \frac{n-1}{r_L} \Rightarrow q = \frac{a\,n\,r_L}{a(n-1) - r_L}$$

Σύμφωνα με το Σχήμα το είδωλο σχηματίζεται στην πλευρά απ'όπου ξεκινάνε οι ακτίνες επομένως $q < 0$ (αυτό σημαίνει ότι η διάταξη είναι τέτοια ώστε $a > \frac{r_L}{n-1}$) και συνεπώς για την απόσταση $x$ έχουμε

$$x = -q = \frac{a\,n\,r_L}{r_L - a(n-1)} \qquad (2)$$

Το είδωλο αυτό αποτελεί αντικείμενο για τη δεξιά επιφάνεια, όπου εφαρμόζοντας πάλι την (1) με $n_1 = n, n_2 = 1, p = d + x, R = -r_R$

$$\frac{n}{d+x} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{-r_R} \Rightarrow q' = \frac{r_R \;\; d+x}{d+x \;\; n-1 \;\; -n r_R}$$

Αντικαθιστώντας το $x$ από την (2) παίρνουμε

$$\varepsilon = q' = \frac{\left[(1-n)ad + nr_L\right] r_L}{r_L(d - dn + nr_R) + a(n-1)\left[d(n-1) - n(r_L + r_R)\right]}$$

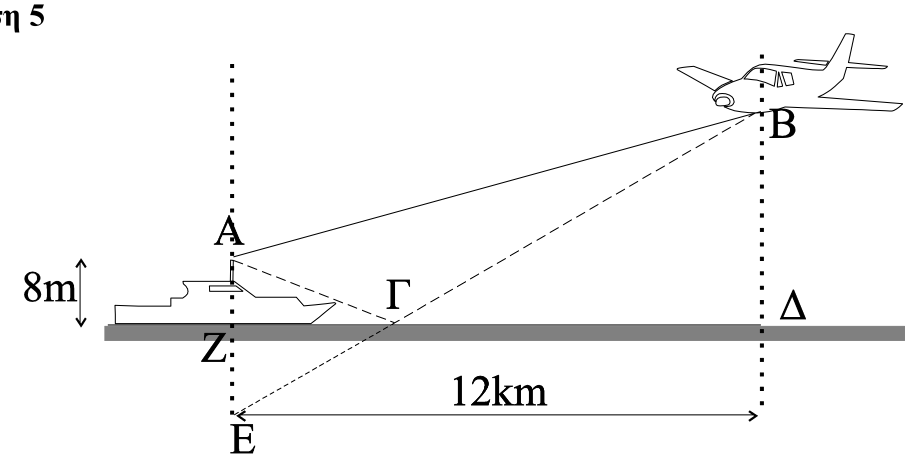
Β)Η μεγέθυνση από σφαιρική διαθλαστική δίνεται από τον τύπο $M = -\dfrac{n_1 q}{n_2 p}$, στην περίπτωσή μας

$$M = M_L M_R = \frac{q}{na}\frac{nq'}{d-q} = \frac{q}{a}\frac{q'}{d-q} = -\frac{x}{a}\frac{r_R}{\left(d+x\right)\left(n-1\right) - nr_R} =$$

$$= \frac{n\, r_L\, r_R}{(n-1)\left[ad(n-1) - (d + a\,n)r_L + \left(r_L - an\right)r_R\right] + r_L\, r_R}$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι στο όριο $d = 0$ παίρνουμε το σωστό τύπο για λεπτό φακό $M = -\dfrac{q}{p} = \dfrac{f}{f-a}$ όπου $f = (n-1)\left(\dfrac{1}{r_L} + \dfrac{1}{r_R}\right)$

**Άσκηση 5**




Τα δύο σήματα τα οποία διανύουν διαφορετικές αποστάσεις συμβάλουν στο σημείο Α. Το άμεσο σήμα διανύει

$$r_1 = \mathrm{BA} = \sqrt{12000^2 + \left(y-8\right)^2}$$

όπου $y = \mathrm{B}\Delta$ το ύψος που βρίσκεται το αεροπλάνο. Το ανακλώμενο σήμα διανύει ΒΓ+ΓΑ. Για τον υπολογισμό του $\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A}$ προεκτείνουμε την ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της κεραίας στο Ε. Καθώς η γωνία πρόσπτωσης στην επιφάνεια της θάλασσας ισούται με τη γωνία ανάκλασης, έχουμε $\mathrm{A\Gamma Z} = \mathrm{B\Gamma\Delta} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma Z} = \mathrm{Z\Gamma E} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma E} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B} = \mathrm{BE}$. Επιπλέον στο σήμα αυτό πρέπει να προσθέσουμε μια διαφορά φάσης $\pi$ λόγω της ανάκλασης στην επιφάνεια της θαλάσσης η οποία μεταφραζόμενη σε διαφορά δρόμου αντιστοιχεί σε $\dfrac{\lambda}{2}$. Έχουμε λοιπόν

$$r_2 = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma B} + \frac{\lambda}{2} = \mathrm{BE} + \frac{\lambda}{2} = \sqrt{12000^2 + (8+y)^2} + \frac{\lambda}{2}$$

Επομένως η διαφορά δρόμου είναι

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{12000^2 + (y+8)^2} + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{12000^2 + (y-8)^2} =$$

$$= 12000\left[\sqrt{1+\frac{(y+8)^2}{12000^2}} - \sqrt{1+\frac{(y-8)^2}{12000^2}}\right] + \frac{\lambda}{2} \approx 12000\left[1+\frac{(y+8)^2}{2\times 12000^2} - 1 - \frac{(y-8)^2}{2\times 12000^2}\right] + \frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{(y+8)^2 - (y-8)^2}{2\times 12000} + \frac{\lambda}{2} = \frac{32y}{2\times 12000} + \frac{\lambda}{2} = \frac{y}{750} + \frac{\lambda}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $y \pm 8 \ll 12000$ (η οποία θα πρέπει να επιβεβαιωθεί από το αποτέλεσμα) και το ανάπτυγμα Taylor $\sqrt{1+a\,x^2} \approx 1 + \frac{a}{2}x^2$.

Ελάχιστα έχουμε όταν

$$\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2},\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$\frac{y}{750} + \frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{y}{750} = n\lambda \Rightarrow y = 750\lambda n$$

Η ελάχιστη τιμής του ύψους για $n=1,\ y = 75m$ (η επιλογή $n=0 \Rightarrow y=0$ δεν είναι αποδεκτή καθώς τότε δεν υπάρχει ανακλώμενο σήμα). Η λύση επιβεβαιώνει και την προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε.

**Άσκηση 6**

Το ηλεκτρικό πεδίο στη κατεύθυνση θ είναι το άθροισμα των πεδίων από κάθε σχισμή ξεχωριστά. Σε σχέση με το πεδίο από την πρώτη σχισμή το πεδίο από την δεύτερη έχει μια επιπλέον φάση δ ενώ από την τρίτη 5/2δ, δη.

$$E(\theta) = E_1 + E_2 + E_3 = A + Ae^{i\delta} + Ae^{i\frac{5}{2}\delta} \qquad (1)$$

με

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\vartheta \qquad (2)$$

Η ολική ένταση στην γωνία θ είναι

$$I(\vartheta) \propto |E(\vartheta)|^2 = A^2\left[3 + 2\left(\cos\delta + \cos\frac{3\delta}{2} + \cos\frac{5\delta}{2}\right)\right] \qquad (3)$$

Για θ=0 έχουμε

$$I(0) \propto 9A^2 = I_0 \qquad (4)$$

Από την έκφραση (3) βρίσκουμε οτι το πρώτο βασικό μέγιστο συμβαίνει όταν όλα τα συνημίτονα είναι ίσα με την μονάδα το οποίο συμβαίνει για $\delta = 4\pi$, δηλ

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\vartheta_1 = 4\pi \qquad (5)$$

ή

$$\sin\vartheta_1 \cong \vartheta_1 = \frac{2\lambda}{d}$$

B)

$$I(\frac{\vartheta_1}{2}) \propto A^2\left[3+2(\cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 5\pi)\right] = A^2 = \frac{I_0}{9}$$

**Άσκηση 7**

A) Από τις σχέσεις

$$E_x = -\frac{k_2}{k_1}E_0 \sin k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)$$

$$E_y = E_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x)$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = \frac{\omega}{k_1 c^2}E_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x)$$

Στις παρακάτω σχέσεις χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Νόμος Gauss:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y = -\frac{k_2}{k_1}E_0 \sin k_2 y(-k_1)\cos(\omega t - k_1 x) + E_0(-k_2)\sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) = 0\backslash$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \partial_z B_z = 0$$

Νόμος Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{z}(\partial_x E_y - \partial_y E_x) = \hat{z}\left\{E_0 k_1 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x) - (-\frac{k_2}{k_1})E_0 k_2 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)\right\}$$

$$= \hat{z}\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1}E_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x) = \hat{z}\frac{k^2}{k_1}E_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)$$

$$-\partial_t \vec{B} = -\hat{z}\partial_t B_z = \hat{z}\frac{\omega^2}{k_1 c^2}E_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x) = \hat{z}\frac{k^2}{k_1}E_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)$$

Όπου θέσαμε $k = \omega / c$. Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε το νόμο του Faraday $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$.

Νόμος Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \hat{x}\partial_y B_z - \hat{y}\partial_x B_z = \hat{x}\left\{-\frac{k_2}{k_1}\frac{\omega}{c^2}E_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x)\right\} - \hat{y}\left\{\frac{k_1}{k_1}\frac{\omega}{c^2}E_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)\right\}$$

$$\mu_0\epsilon_0\partial_t \vec{E} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \frac{1}{c^2}\hat{x}\left\{\left(-\frac{k_2\omega}{k_1}\right)E_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x)\right\} - \frac{1}{c^2}\hat{y}\left\{E_0\omega \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x)\right\}$$

Συγκρίνοντας παίρνουμε $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\partial_t \vec{E}$.

B) Σύμφωνα με τις εξισώσεις (22-64) των Α-Φ

$$v_p = \frac{\omega}{k_1} = \frac{k}{k_1}\frac{\omega}{k} = \frac{k}{k_1}c\,.$$

Από τη σχέση $k^2 = k_1^2 + k_2^2 > k_1^2 \Rightarrow \frac{k}{k_1} > 1 \Rightarrow v_p > c$. Αυτό δεν είναι σε αντίφαση με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, αφού σήματα με πληροφορία διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας που όπως θα δείξουμε είναι μικρότερη του $c$.

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow 2k_1 dk_1 = 2\frac{\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{k_1}{\omega}c^2 = \frac{k_1}{\omega}\frac{\omega}{k}c = \frac{k_1}{k}c \Rightarrow v_g = \frac{k_1}{k}c$$

$\frac{k_1}{k} < 1 \Rightarrow v_g < c$ όπως αναφέραμε παραπάνω. Ο λόγος των δύο ταχυτήτων είναι

$$\frac{v_p}{v_g} = \frac{\frac{k}{k_1}c}{\frac{k_1}{k}c} = \frac{k^2}{k_1^2} > 1 \Rightarrow v_p > v_g$$

**Άσκηση 8**

Η ένταση δίδεται από τον τύπο 23.16 Α-Φ

$$I = I_0 \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2}{\left[\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right]^2} \frac{\left[\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2}{\left[\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)\right]^2} \qquad (1)$$

και η έλλειψη του $3^{ου}$ κυρίου μεγίστου οφείλεται στον $1^{ον}$ μηδενισμό του όρου περιθλάσεως, που επέρχεται όταν μηδενίζεται ο αριθμητής του όρου της περιθλάσεως

$$\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_{n_b} = n_b\pi = 1\pi \Rightarrow \quad \sin\theta_{1_b} = \frac{\lambda}{b}$$

Εκεί είναι το $3^{ον}$ κύριο μέγιστο, άρα εκεί μηδενίζεται για $3^{η}$ φορά ο παρονομαστής του όρου της συμβολής

$$\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_{n_a} = n_a\pi = 3\pi$$

$$\sin\theta_{3_a} = \sin\theta_{1_b} \;\Rightarrow\; \frac{3\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} \Rightarrow \quad a = 3b$$

Ακριβώς εκεί μηδενίζεται για $12^{η}$ φορά και ο αριθμητής του όρου της συμβολής:
Πράγματι,

$$\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta_{n_N} = n_N\pi \qquad (2)$$
$$\sin\theta_{n_N} = \sin\theta_{3_a} \;\Rightarrow\; \quad N\cdot 3 = n_N = 4\cdot 3 = 12$$

Με μηδενισμό της παραγώγου, τα τοπικά μέγιστα εκατέρωθεν της θέσεως αυτής είναι αδύνατον να υπολογισθούν αναλυτικά επακριβώς, επειδή προκύπτει μή αλγεβρική εξίσωση, λυνόμενη μόνον αριθμητικά, αλλά με πολύ καλή προσέγγιση αυτά υπολογίζονται ως μέσοι όροι των γειτονικών τους τοπικών ελαχίστων, δηλαδή μεταξύ των 10-11 και 13-14 μηδενισμών του αριθμητή του όρου της συμβολής.

Άρα υποθέτοντας προσεγγιστικά, στην εξ. (2), οτι αυτά τα μέγιστα επέρχονται όταν $n_M$ = 10.5 = 21/2 και 13.5 = 27/2:

$$\frac{N\pi a}{\lambda}\sin\theta_{n_{\mathrm{M}}} = n_{\mathrm{M}}\pi = \frac{N\pi 3b}{\lambda}\sin\theta_{n_{\mathrm{M}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_{n_{\mathrm{M}}} = \frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{3N}, \quad n_M = \frac{21(27)}{2},$$

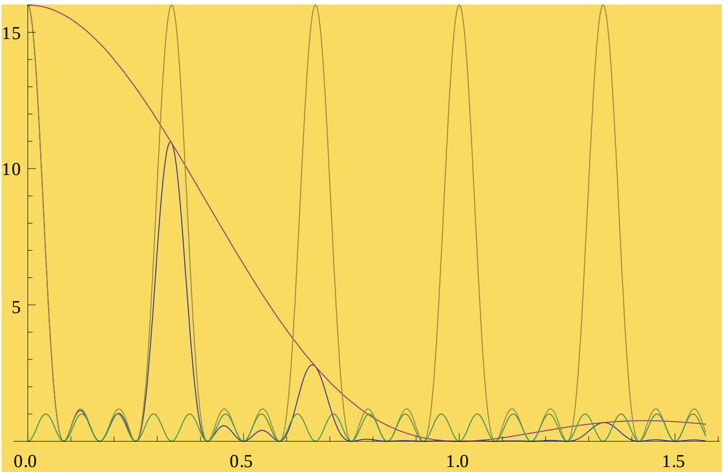
αντικαθιστούμε στην (1), και η ολική ένταση στα σημεία αυτά είναι

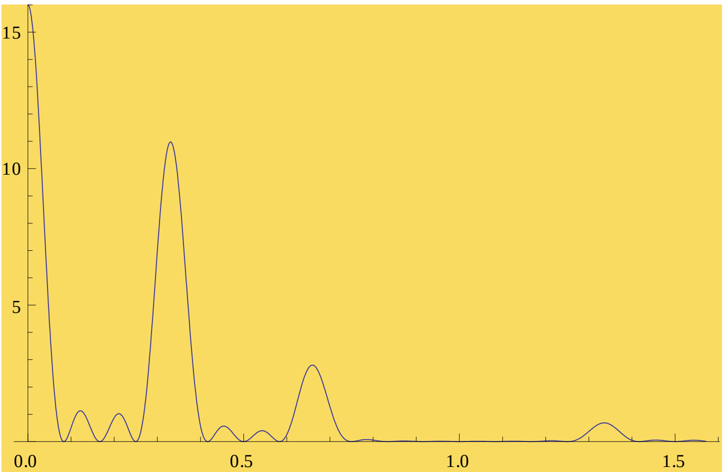
$$I_M = I_0 \frac{\left[\sin\left(\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{3N}\right)\right]^2}{\left[\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{3N}\right]^2} \frac{\left[\sin\left(n_{\mathrm{M}}\pi\right)\right]^2}{\left[\sin\left(\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{N}\right)\right]^2}, \quad n_M = \frac{21(27)}{2}$$

Η ένταση $I_K$ του κεντρικού μεγίστου λαμβάνεται από την (1) στο όριο $\theta \to 0$:
Ο όρος της περιθλάσεως τείνει στο $(1)^2$ ως $\sin x/x$.
Ο όρος της συμβολής τείνει στο $(N)^2$ ως $\sin Nx/\sin x \to Nx/x \to N$.
Άρα $I_K = I_0\,(N)^2$
Επομένως

$$\frac{I_M}{I_K} = \frac{\left[\sin\left(\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{3N}\right)\right]^2}{\left[\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{3}\right]^2} \frac{\left[\sin\left(n_{\mathrm{M}}\pi\right)\right]^2}{\left[\sin\left(\frac{n_{\mathrm{M}}\pi}{N}\right)\right]^2}, \quad n_M = \frac{21(27)}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, το ποσοστό είναι 1/1000 της κεντρικής εντάσεως, πρακτικώς ελλείπον (βλ. Σχήμα).



**Άσκηση 9**

Α) Σύμφωνα με το παράδειγμα 22.3 του βιβλίου των Alonso-Finn τα ελάχιστα της ανάκλασης από λεπτό φιλμ δίνονται από

$$2an\cos\theta_r = m\lambda,\ m = 1,2,\ldots$$

Εδώ $\theta_r = 0$ και επομένως

$$\lambda = \frac{2an}{m} = \frac{1474}{m}\,\mathrm{nm}, m = 1,2,3,\ldots$$

ή

$$\lambda = 1474\mathrm{nm}, 737.\mathrm{nm}, 491.\mathrm{nm},\ldots$$

Β) Τα ελάχιστα της διάδοσης δίνονται από

$$2an\cos\theta_r = \frac{(2m-1)}{2}\lambda,\ m = 1,2,\ldots$$

Επομένως

$$\lambda = \frac{4an}{2m-1} = \frac{2948}{2m-1}\,\mathrm{nm}, m = 1,2,3,\ldots$$

ή

$$\lambda = 2948\mathrm{nm}, 982.7\mathrm{nm}, 589.6\mathrm{nm}, 421.1\mathrm{nm}, 327.6\mathrm{nm}, 268.\mathrm{nm},\ldots$$

Από αυτά στο ορατό φως είναι τα $589.6\mathrm{nm}, 421.1\mathrm{nm}$ και αυτά είναι που δεν βλέπει ο φοιτητής.

**Άσκηση 10**

Α) Η ένταση από φράγμα περίθλασης φωτός δίνεται από την έκφραση

$$I = I_0\left[\frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right]^2\left[\frac{\sin(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\vartheta)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\vartheta)}\right]^2 \qquad (1)$$

Ανάμεσα σε δύο διαδοχικά πρωτεύοντα μέγιστα υπάρχουν Ν-2 δευτερεύοντα μέγιστα. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι Ν-2=2, κατά συνέπεια Ν=4.

Το πρώτο ελάχιστο από την περίθλαση συμβαίνει όταν $\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta = \pi$. Από τα δεδομένα βρίσκουμε ότι $\sin\vartheta = (2cm)/(20m) = 10^{-3}$, δηλαδή

$$a = \frac{\lambda}{\sin\vartheta} = \frac{6\times10^3\times10^{-10}m}{10^{-3}} = 0.6mm \qquad (2)$$

Το πρώτο κύριο μέγιστο συμβαίνει όταν $\frac{\pi d}{\lambda}\sin\vartheta = \pi$. Εφόσον $\sin\vartheta = (0.4cm)/(20m) = 0.2\times10^{-3}$ βρίσκουμε

$$d = \frac{\lambda}{\sin\vartheta} = 3mm \qquad (3)$$

Β) Η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τον συντελεστή περίθλασης από μία σχισμή, δηλ

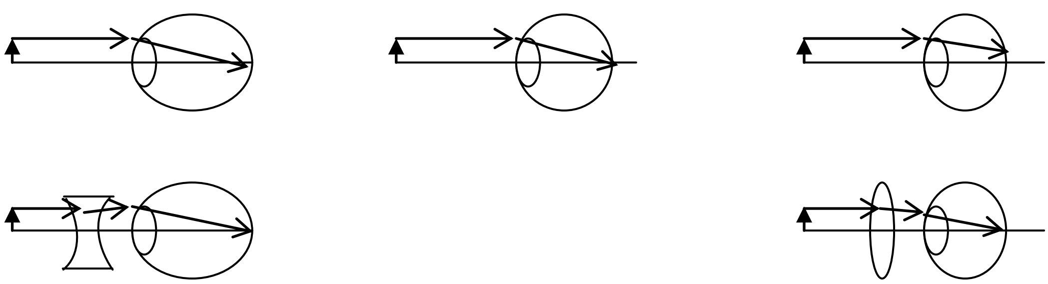
$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right]^2$$

και συνεπώς παριστά την κατανομή της έντασης του φωτός που περιθλάται από κάθε μία σχισμή. Ο δεύτερος παράγοντας στην εξίσωση (1) δίνει την ένταση από την συμβολή από N σχισμές η οποία διαμορφώνεται από την διακεκομμέ.νη καμπύλη στο σχήμα, δηλ από την καμπύλη περίθλασης μιάς σχισμής.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

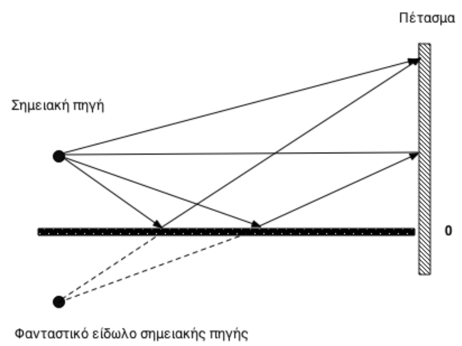
**1)**

Διότι ο φακός αντί να εστιάζει φυσιολογικά επί του αμφιβληστροειδούς χιτώνος, στον μεν μυωπικό οφθαλμό εστιάζει μέσα, μπροστά από τον αμφιβληστροειδή χιτώνα, στον δε υπερμετρωπικό εστιάζει έξω, πίσω από τον αμφιβληστροειδή χιτώνα.
Άρα τα γυαλιά μυωπίας πρέπει να στείλουν το είδωλο πιο πίσω, δηλαδή να ανοίξουν την δέσμη (να αποκλίνει), ενώ της υπερμετρωπίας πρέπει να στείλουν το είδωλο πιο μπροστά, δηλαδή να κλείσουν την δέσμη (να συγκλίνει).



**2)**

Θεωρούμε κατοπτρική επιφάνεια στην θέση του πλακιδίου υάλου; το ισοδύναμο σύστημα με δύο πηγές είναι το ακόλουθο:




Εφόσον ο κροσσός στο σημείο O είναι σκοτεινός η δέσμη που ανακλάται από την κατοπτρική επιφάνεια υφίσταται αλλαγή φάσης κατά π λόγω ανάκλασης.

**3)**
Οι εξισώσεις (21.27-30) των Α-Φ γίνονται

$$n_1 \sin i = n \sin r$$

$$n \sin r' = n_2 \sin i'$$

$$r + r' = A$$

$$i + i' - \delta = A$$

Αν $i \ll 1$ η πρώτη σχέση δίνει $r \ll 1$. Αν $A \ll 1$, $r \ll 1$ τότε η τρίτη σχέση δίνει $r' \ll 1$. Αν $r' \ll 1$ τότε η δεύτερη σχέση δίνει $i' \ll 1$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sin x \approx x$ για $x \ll 1$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$n_1 i \approx n r$$

$$n r' \approx n_2 i'$$

$$r + r' = A$$

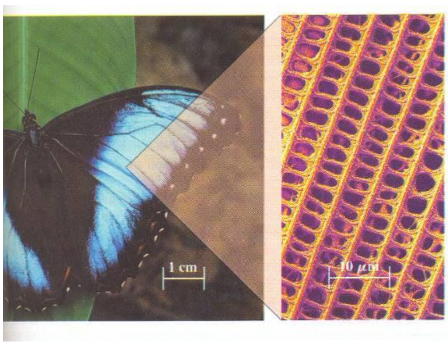
$$i + i' - \delta = A$$

Από όπου παίρνουμε

$$\delta \approx \left( \frac{n}{n_2} - 1 \right) A + \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right) i$$

Αν $n_1 = n_2$ τότε η γωνία $\delta$ δεν εξαρτάται από την $i$ (στη τάξη προσέγγισης που χρησιμοποιήσαμε).

**4)**
Τα φτερά της πεταλούδας περιέχουν οπές της τάξης μεγέθους μερικών μm και λειτουργούν ως φράγμα περίθλασης στο ορατό φως. Για κάθε μήκος κύματος παρουσιάζονται μέγιστα και ελάχιστα σε διαφορετικές γωνίες και για αυτό καθώς αλλάζουμε γωνία βλέπουμε διαφορετικά χρώματα.




**5)**
Τα δύο κύματα έχουν την ίδια συχνότητα διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση (την οποία διαλέγω να είναι ο άξονας των x), αλλά έχουν διαφορετικά πλάτη, και φάσεις

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \sin\left(k\,x - \omega t + \varphi_1\right),\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \sin\left(k\,x - \omega t + \varphi_2\right)$$

Η ένταση είναι ανάλογη της μέσης τιμές του τετραγώνου του αθροίσματος

$$\begin{aligned} I &= a\left\langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 \right\rangle = a\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + a\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + 2a\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2a\left\langle \sin\left(k\,x - \omega t + \varphi_1\right) \sin\left(k\,x - \omega t + \varphi_2\right) \right\rangle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \\ &= I_1 + I_2 + a\left\langle \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \cos\left(2k\,x + \varphi_1 + \varphi_2 - 2\omega t\right) \right\rangle \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \\ &= I_1 + I_2 + a\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \\ &= I_1 + I_2 + a\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) E_{10}\, E_{20} \cos\theta \end{aligned}$$

όπου $\theta$ η γωνία ανάμεσα στα δύο ηλεκτρικά πεδία και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\left\langle \cos\left(2k\,x + \varphi_1 + \varphi_2 - 2\omega t\right) \right\rangle = 0$. Αφού μας δίνεται ότι $I = I_1 + I_2$ η παραπάνω σχέση συνεπάγεται $\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \cos\theta = 0$ και επομένως είτε τα πεδία είναι κάθετα είτε έχουν διαφορά φάσης που ισούται με ημιακέραια πολλαπλάσια του $\pi / 2$.