16/2/2011

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2010-11

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 15/3/11

Άσκηση 1

Έστω $L_{0,X}$ και $L_{0,Y}$ τα ιδιομήκη των διαστημοπλοίων X και Y αντίστοιχα ενώ L_X είναι το μήκος του X όπως μετράται από τον πιλότο του Y και L_Y το μήκος του Y όπως μετράται από τον X. Ισχύουν

$$L_{0,X} = \gamma L_X$$
$$L_{0,Y} = \gamma L_Y$$

A) Στο ΣΑ του Y, ο πιλότος θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο και βλέπει διαδοχικά την αρχή και το τέλος του διαστημοπλοίου του X να περνάει από δίπλα του. Η διαφορά χρόνου ανάμεσα από τα δύο γεγονότα για τον Y είναι $\Delta t = 250ns$. Επίσης στο ΣΑ του Y το X κινείται με ταχύτητα υ και επομένως το μήκος του είναι

$$L_X = \upsilon \Delta t = 0.9c250ns = 67.5m$$

Εφόσον $\gamma = \left[1-(\upsilon/c)^2\right]^{1/2} \cong 2.3$, βρίσκουμε $L_{0,X} = \gamma L_X = 155.25m$

B) Σύμφωνα με τον X

$$L_Y = \frac{1}{2} L_{0,X}$$

Κατά συνέπεια,

$$L_{0,Y} = \frac{\gamma}{2} L_{0,X} = 178.54m$$

Άσκηση 2

Το Β ως προς τον Α είναι συνεσταλμένο, $L' = L\sqrt{1-\beta_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}2}}$ όπου v_A^B συμβολίζει την ταχύτητα «του Β ως προς το Α», και $\beta = v/c$. Ο Α μετρά οτι το L' διέρχεται πλήρως από την θέση Ο σε χρόνο Τ.

Άρα

$$v_A^B = \frac{L'}{T} \Rightarrow \beta_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \frac{v_A^B}{c} = \frac{L}{cT}\sqrt{1-\beta_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}2}} \Rightarrow \beta_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \frac{L/\ cT}{\sqrt{1+L^2/\ cT^{\ 2}}} = \frac{L}{\sqrt{cT^{\ 2}+L^2}}$$

Η ταχύτητα του Β ως προς την Γή είναι

$$v_{\Gamma}^{B} = v_{A}^{B} \oplus v_{\Gamma}^{A} \Rightarrow \beta_{\Gamma}^{B} = \frac{\beta_{A}^{B} + \beta_{\Gamma}^{A}}{1 + \beta_{A}^{B}\beta_{\Gamma}^{A}}$$

Η μέρα έχει Ν = 24 . 60^2 δευτερόλεπτα. Αν ρολόι που κινείται με ταχύτητα υ χάνει δ δευτερόλεπτα ανά ημέρα, τότε (1 ημέρα + δ δευτερόλεπτα) = γ (1 ημέρα)

$$\mathrm{N} + \delta = \gamma \mathrm{N} \Rightarrow \delta = \mathrm{N}\ \ \gamma - 1\ \ = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

Άρα το ρολόϊ του Α χάνει $\delta_{\mathrm{A}} = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\Gamma}^{\mathrm{A}2}}} - 1\right)$ και του Β χάνει

$\delta_{\mathrm{B}} = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\Gamma}^{\mathrm{B}2}}} - 1\right)$ δευτερόλεπτα ανά ημέρα.

(Σημειωτέον ότι αν $\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2}$, οπότε $\delta = \frac{\mathrm{N}\beta^2}{2} = \frac{\mathrm{N}v^2}{2c^2}$).

Άσκηση 3

(α) Ισχύει $\gamma = 2$. Απο τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε

$$x_A = \gamma(x'_A + \upsilon t'_A) = 2(10^3 m + 0.886 \cdot 3\times10^8 \cdot 3\times10^{-5} m) = 17.948\times10^3 m \cong 17.95 Km$$

$$t_A = \gamma(t'_A + \frac{\upsilon}{c^2} x'_A) = 2(3\times10^{-5} s + \frac{0.866}{3\times10^8} \cdot 10^3 s) = 6.577\times10^{-5} s = 65.77 \mu s$$

(β) Αντίστοιχα βρίσκουμε

$$x'_B = \gamma(x_B - \upsilon t_B) = 2(2\times10^3 m - 0.886 \cdot 3\times10^8 \cdot 1\times10^{-5} m) = -1.316\times10^3 m \cong -1.32 Km$$

$$t'_B = \gamma(t_B - \frac{\upsilon}{c^2} x_B) = 2(1\times10^{-5} s - \frac{0.866}{3\times10^8} \cdot 2\times10^3 s) = 0.845\times10^{-5} s = 8.45 \mu s$$

(γ) Για να είναι τα δύο γεγονότα ταυτόχρονα ως προς ένα τρίτο αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα u ως προς την Γη θα πρέπει να ισχύει $t''_A = t''_B$, όπου με ζδύο τόνους συμβολίζονται τα μεγέθη στο νεο σύστημα αναφοράς. Κατά συνέπεια πρεπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\gamma_u(t_A - \frac{u}{c^2} x_A) = \gamma_u(t_B - \frac{u}{c^2} x_B)$$

Δηλαδή

$$u = c^2 \frac{t_A - t_B}{x_A - x_B} = c^2 \frac{6.57 - 1}{17.94 - 2} \times 10^{-8} \frac{s}{m} = 1.045c$$

Το οποίο δεν μπορεί αν συμβεί και άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

(δ) Αντίστοιχα πρέπει να έχουμε $x''_A = x''_B$, δηλαδή

$$\gamma_u(x_A - ut_A) = \gamma_u(x_B - ut_B);$$

Απο την σχέση αυτή βρίσκουμε

$$u = \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} = \frac{15.94}{5.57} \times 10^8 = 2.86 \times 10^8 \frac{m}{s} = 0.953c$$

Δηλαδή είναι δυνατό.

(ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση στον χώρο Minkowski (σελ 30, Περσίδης) ανάμεσα στα δύο γεγονότα Α, Β σε ενα σύστημα αναφοράς, πχ της Γής:

$$c(t_A - t_B) = 3 \times 10^8 (65.77 - 10) \times 10^{-6} m = 16.73 \times 10^3 m$$
$$x_A - x_B = (17.95 - 2) \times 10^3 m = 15.95 \times 10^3 m$$
$$\Phi = c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 \cong 2.5 \times 10^8 > 0$$

Παρατηρούμε ότι η απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι χρονοειδής και κατά συνέπεια τα δύο γεγονότα μπορούν να συνδεθούν αιτιατά. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με τα (γ), (δ).

Άσκηση 4

Α) Έστω Σ το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και Σ' το ΣΑ στο οποίο τα δύο σωματίδια ισορροπούν. Θεωρούμε ότι τα δύο γεγονότα στο Σ' συμβαίνουν στα : Διάσπαση του σωματιδίου α $\left(x'_\alpha, t'_\alpha\right)$ και διάσπαση του σωματιδίου β $\left(x'_\beta, t'_\beta\right)$. Στο Σ συμβαίνουν αντίστοιχα στα $\left(x_\alpha, t_\alpha\right)$ και $\left(x_\beta, t_\beta\right)$. Στο Σ' έχουμε

$$\Delta t' = t'_\beta - t'_\alpha = 0$$

Ενώ στο Σ'

$$\Delta x = x_\beta - x_\alpha = 120m \ ,$$

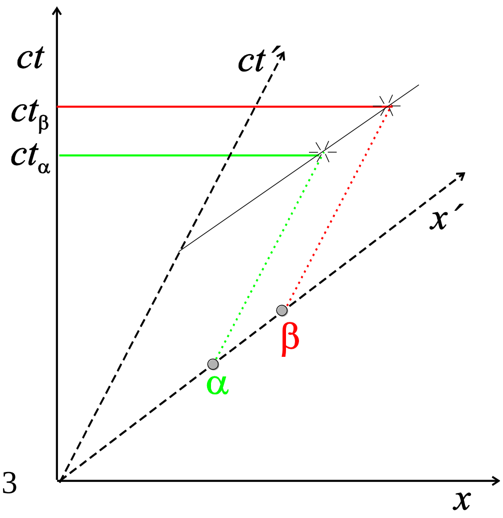
Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Lorentz

$$\Delta x = \gamma\left(\upsilon \Delta t' + \Delta x'\right) \Rightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \quad (1)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) \xrightarrow{(1)} \Delta t = \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x \Rightarrow \Delta t = 396\text{ns}$$

Β) Έχουμε $\Delta t = t_\beta - t_\alpha = 396\text{ns}$ επομένως $t_\beta > t_\alpha$ και άρα διασπάται πρώτα το α. Το αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα δίνεται στο Σχήμα:

Με διακεκομμένες γραμμές παρουσιάζεται το ΣΑ Σ' στο οποίο τα δύο σωματίδια ισορροπούν (βρίσκονται στον άξονα των x'). Σε αυτό τα δύο γεγονότα διάσπαση α,β είναι ταυτόχρονα καθώς βρίσκονται σε άξονα παράλληλο με τον x'.



Άσκηση 5

(α) Έστω ότι το προσπίπτον δευτέριο κινείται στον άξονα x ενώ το πρωτόνιο στον αρνητικό άξονα y. Η διατήρηση ενέργειας είναι

$$E_2 + m_2c^2 = E'_1 + E'_3 \qquad (1)$$

όπου τονούμενες ποσότητες είναι μετά την αντίδραση; E_2 , p_2 είναι η συνολική ενέργεια και ορμή αντίστοιχα του κινούμενου δευτέριου, E'_1, p'_1, E'_3, p'_3 οι αντίστοιχες του πρωτονίου και τριτίου. Η διατήρηση ορμής δίνεται σε κάθε άξονα από

$$\begin{aligned} p_{2,x} + 0 &= 0 + p'_{3,x} \\ 0 + 0 &= p'_{1,y} + p'_{3,y} \\ 0 + 0 &= 0 + p'_{3,z} \end{aligned} \qquad (2)$$

(β) Η μάζα ηρεμίας του τρίτιου είναι μιά αναλοίωτη ποσότητα και μπορει να υπολογισθεί ως εξής

$$m_3^2c^4 = \left(E'_3\right)^2 - (p'_{3,x})^2 - (p'_{3,y})^2 - (p'_{3,z})^2 \qquad (3)$$

Χρηση των εξισώσεων (1), (2) στην (3) δίδει

$$\begin{aligned} m_3^2c^4 &= \left(E_2 + m_2c^2 - E'_1\right)^2 - (p_{2,x})^2 - (p'_{1,y})^2 \\ &= \left(\mathrm{E}_2^2 - p_{2,x}^2\right) + \left(\mathrm{E}'^2_1 - p'^2_{1,y}\right) + \left(m_2c^2\right)^2 + 2m_2c^2E_2 - 2m_2c^2E'_1 - 2E_2E'_1 \end{aligned} \qquad (4)$$

Στις πρώτες δύο παρενθέσεις έχουμε αναλλοίωτες ποσότητες που σχετίζονται αντίστοιχα με την μάζα του κινούμενου δευτερίου και του πρωτονίου, δηλ.

$$\begin{aligned} m_3^2c^4 &= m_1^2c^4 + 2m_2^2c^4 + 2m_2c^2E_2 - 2m_2c^2E'_1 - 2E_2E'_1 \\ &= m_1^2c^4 + 2m_2c^2\left(m_2c^2 + E_2\right) - 2E'_1\left(m_2c^2 + E_2\right) \\ &= m_1^2c^4 + 2\left(m_2c^2 + E_2\right)\left(m_2c^2 - E'_1\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Η ολική ενέργεια είναι άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας, δηλ.

$$\begin{aligned} E_2 &= m_2c^2 + E_{kin,2} \\ E'_1 &= m_1c^2 + E'_{kin,1} \end{aligned} \qquad (6)$$

και τελικά

$$m_3^2c^4 = m_1^2c^4 + 2\left(2m_2c^2 + E_{kin,2}\right)\left(m_2c^2 - m_1c^2 - E'_{kin,1}\right) \qquad (7)$$

(γ) Η ενέργειες ηρεμίας του πρωτονίου και δευτερίου είναι αντίστοιχα

$$m_1c^2 = \frac{1.0078252u}{1.073562\times10^{-3}\,u/MeV} = 0.9387675\times10^3\,MeV = 938.767MeV$$
$$m_2c^2 = \frac{2.0141019u}{1.073562\times10^{-3}\,u/MeV} = 1.8760927\times10^3\,MeV = 1876.093MeV$$

Τελικά

$$m_3^2c^4 = (938.767)^2 + 2(2\cdot1876.093+1.808)(1876.093-938.767-3.467)(MeV)^2$$
$$= 7.892\times10^6(MeV)^2$$

ή

$$m_3c^2 = 2.809392\times10^3\,MeV$$

Σε ατομικές μονάδες μάζας η μάζα του τρίτιου είναι

$$m_3 = 3.016056u$$

Άσκηση 6

Έστω υ η ταχύτητα του προσπίπτοντος σωματιδίου και V η ταχύτητα του συσσωματώματος και M η μάζα του. Από τη διατήρηση ορμής και ενέργειας έχουμε

$$\gamma_\upsilon m\upsilon = \gamma_V MV \qquad (1)$$
$$T + 2mc^2 = \gamma_V M c^2 \qquad (2)$$

Η ταχύτητα υ και η ποσότητα γ_υ για το προσπίπτον σωματίδιο υπολογίζεται από την κινητική του ενέργεια T ως εξής

$$T = (\gamma_\upsilon - 1)mc^2 \Rightarrow \gamma_\upsilon = \frac{T+mc^2}{mc^2} \qquad (3)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{T+mc^2}{mc^2} \Rightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{T+mc^2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = 1-\left(\frac{mc^2}{T+mc^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{T\left(T+2mc^2\right)}{\left(T+mc^2\right)^2} \Rightarrow$$
$$\upsilon = c\frac{\sqrt{T\left(T+2mc^2\right)}}{T+mc^2} \qquad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) και χρησιμοποιώντας τις (3) και (4) βρίσκουμε

$$\frac{V}{c^2} = \frac{\gamma_\upsilon m\upsilon}{T+2mc^2} = \frac{1}{T+2mc^2}\left(\frac{T+mc^2}{mc^2}\right) mc\frac{\sqrt{T\left(T+2mc^2\right)}}{T+mc^2} \Rightarrow V = c\sqrt{\frac{T}{T+2mc^2}} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε

$$M = \frac{T+2mc^2}{\gamma_V c^2} = \frac{T+2mc^2}{c^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{T+2mc^2}{c^2}\sqrt{1-\frac{T}{T+2mc^2}} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{2m\left(T+2mc^2\right)}}{c}$$

Άσκηση 7

Α) Έστω υ η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Δ ως προς το περιπολικό Π. Το κύμα που οταν εκπέμπεται απο το Π έχει συχνότητα f, μετατοπίζεται προς το ερυθρό στο Δ λόγω φαινομένου Doppler και λόγω της σχετικής απομάκρυνσης πηγής-παρατηρητή έχει συχνότητα

$$f_{\Delta} = f\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} \qquad (1)$$

Στην συνέχεια επανεκπέμπεται (ανακλάται) από το σύστημα του Δ με συχνότητα f_{Δ} και οταν φθάνει ξανά στο Π έχει συχνότητα f'. Εφόσον τα δύο διαστημόπλοια απομακρύνονται έχουμε

$$f' = f_{\Delta}\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} \qquad (2)$$

Τελικά, από τις (1) και (2)

$$f' = f\,\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c} \qquad (3)$$

Η εξ. (3) λύνεται ως προς την ταχύτητα του Δ και βρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{f-f'}{f+f'}c = 0.875c \qquad (4)$$

Β) Στην Γή παρατηρούνται δύο κύματα, το πρώτο εκπέμπεται από το Π και το δεύτερο ειναι προιόν της ανάκλασης από το Δ. Εφόσον το Π απομακρύνεται από την Γη θά έχουμε πάλι μετατόπιση προς το ερυθρό και στην Γή παρατηρούμε το κύμα συχνότητας f ως

$$f_{\Gamma\mathrm{H},\Pi} = f\sqrt{\frac{1-\upsilon_{\Pi}/c}{1+\upsilon_{\Pi}/c}} = 3\times10^{14}\sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}} \cong 1\times10^{14}Hz \qquad (5)$$

Το δεύτερο κύμα προέρχεται από το Δ; για να βρουμε την ταχύτητά του ως προς τη Γη θα πρέπει να κάνουμε σύνθεση ταχυτήτων:

$$\upsilon_{\Delta} = \frac{\upsilon_{\Pi}+\upsilon}{1+\upsilon_{\Pi}\upsilon/c^2} = 0.985c \qquad (6)$$

Από τη σχέση (1) και (4) βρίσκουμε $f_{\Delta} \cong 0.774\times10^{14}Hz$

Έτσι, η συχνότητα του δεύτερου ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπεται από το Δ είναι

$$f_{\Gamma\mathrm{H},\Delta} = f_{\Delta}\sqrt{\frac{1-\upsilon_{\Delta}/c}{1+\upsilon_{\Delta}/c}} = 0.774\times10^{14}\sqrt{\frac{1-0.985}{1+0.985}} \cong 6.73\times10^{12}Hz$$

Παρατηρούμε ότι στην τελευταία περίπτωση η μεταβολή στην συχνότητα είναι πιο σημαντική λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητας του Δ ως προς τη Γη.

Άσκηση 8

Α) Ως προς το βαγόνι Σ' οι σφαίρες κινούνται με ταχύτητες ±υ' και οι λάμψεις ταχύτητες ±c. Μετά τις ανακλάσεις οι ταχύτητες αλλάζουν φορά. Αν οι λάμψεις ανακλώνται στα άκρα σε χρόνο t'_1 και οι σφαίρες σε χρόνο t'_2, οι εξισώσεις είναι:

Δεξιά λάμψη: $x' = ct', \Rightarrow t'_1 = L'/c$ (1),

επιστροφή: $x' = L' - c(t' - t'_1) = 2L' - ct'$ (2)

Αριστερή λάμψη: $x' = -ct', \Rightarrow t'_1 = -L'/\ -c$ (3)

επιστροφή: $x' = -L' + c(t' - t'_1) = -2L' + ct'$ (4)

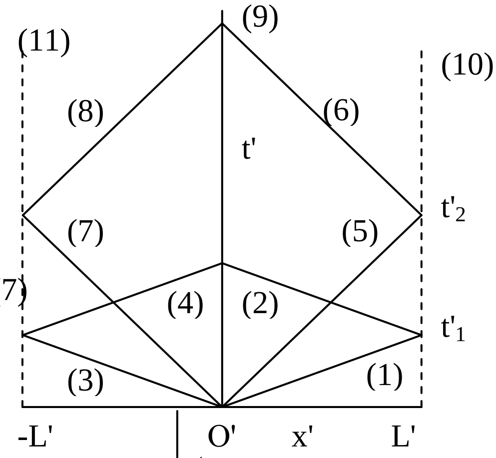
Δεξιά σφαίρα: $x' = v't', \Rightarrow t'_2 = L'/v'$ (5),

επιστροφή: $x' = L' - v'(t' - t'_2) = 2L' - v't'$ (6)

Αριστερή σφαίρα: $x' = -v't', \Rightarrow t'_2 = -L'/\ -v'$ (7)

επιστροφή: $x = -L' + v'(t' - t'_2) = -2L' + v't'$ (8)

Οι κοσμικές γραμμές φαίνονται παραπλεύρως (των άκρων (10-11) είναι διακεκομμένες).



Β) Ως προς το έδαφος Σ, το βαγόνι κινείται με ταχύτητα V και είναι συνεσταλμένο:

$L = L'\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Τα φώτα κινούνται με ταχύτητες ±c.

Η δεξιά σφαίρα αρχικά κινείται με ταχύτητα

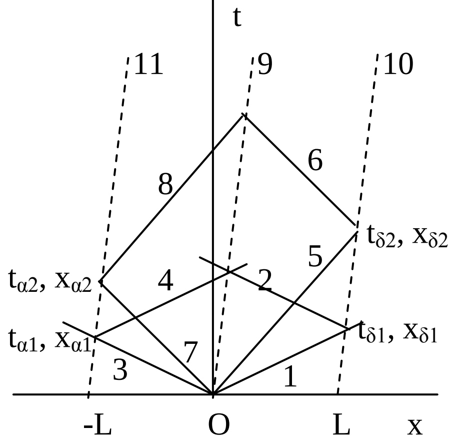
$$v_\delta = V \oplus v' = \frac{V + v'}{1 + Vv'/c^2},$$

ομοίως δε και η αριστερή μετά την ανάκλαση.

Η αριστερή σφαίρα αρχικά κινείται με ταχύτητα

$$v_a = V \oplus \ -v'\ = \frac{V - v'}{1 - Vv'/c^2},$$

όπως και η δεξιά μετά την ανάκλαση.



Πρώτα ανακλάται η αριστερή λάμψη σε χρόνο $t_{\alpha 1}$ στη θέση $x_{\alpha 1}$.

Ύστερα ανακλάται η δεξιά λάμψη σε χρόνο $t_{\delta 1}$ στη θέση $x_{\delta 1}$. Τρίτη ανακλάται η αριστερή σφαίρα σε χρόνο $t_{\alpha 2}$ στη θέση $x_{\alpha 2}$. Τελευταία ανακλάται η δεξιά σφαίρα σε χρόνο $t_{\delta 2}$ στη θέση $x_{\delta 2}$.

Οι αντίστοιχες κοσμικές γραμμές φαίνονται παραπλεύρως με την ίδια, ως άνω, αρίθμηση, αλλά χωρίς παρενθέσεις. Οι εξισώσεις τους είναι:

1: $x = ct$

2: $x = x_{\delta 1} - c\ \ t - t_{\delta 1}$

3: $x = -ct$

4: $x = x_{\alpha 1} + c\ \ t - t_{\alpha 1}$

5: $x = v_\delta t$

6: $x = x_{\delta 2} + v_\alpha\ \ t - t_{\delta 2}$

7: $x = v_\alpha t$

8: $x = x_{\alpha 2} + v_\delta\ \ t - t_{\alpha 2}$

9: $x = Vt$

10: $x = L + Vt$
11: $x = -L + Vt$
Γ) Η τομή των (2),(9), ή (2),(4), ή των (4),(9) προσδιορίζει τον χρόνο συναντήσεως των ανακλασθέντων φώτων στο Σ'.
(2),(9): $x' = 0 = 2L' - ct'_\phi \Rightarrow t'_\phi = 2L'/c$
(4),(9): $x' = 0 = -2L' + ct_\phi' \Rightarrow t_\phi' = 2L'/c$
(2),(4): $x'_\phi = 2L' - ct'_\phi = -2L' + ct'_\phi \Rightarrow 4L' = 2ct'_\phi \Rightarrow t'_\phi = 2L'/c \Rightarrow x'_\phi = 0$
Ομοίως η τομή των (6),(9) προσδιορίζει τον χρόνο συναντήσεως των σφαιρών στο Σ'.
$x' = 0 = 2L' - v't'_\sigma \Rightarrow t'_\sigma = 2L'/v'$
Το ίδιο βγαίνει και από τις (8),(9) καθώς και από τις (6),(8).

Στο Σ, η τομή των εξ. 1 και 10 προσδιορίζει τα $t_{\delta 1}$, $x_{\delta 1}$:
$$x_{\delta 1} = L + Vt_{\delta 1} = ct_{\delta 1} \Rightarrow t_{\delta 1} = \frac{L}{c-V} \Rightarrow x_{\delta 1} = ct_{\delta 1} = c\frac{L}{c-V}$$
Η τομή των εξ. 3 και 11 προσδιορίζει τα $t_{\alpha 1}$, $x_{\alpha 1}$:
$$x_{a1} = -L + Vt_{a1} = -ct_{a1} \Rightarrow t_{a1} = \frac{L}{c+V} \Rightarrow x_{a1} = -ct_{a1} = -c\frac{L}{c+V}$$
Η τομή των εξ. 2,9 ή των 4,9 ή των 2,4 προσδιορίζει τον χρόνο συναντήσεως των ανακλασθέντων φώτων στο Σ.
$$2,9: \begin{cases} x_\phi = x_{\delta 1} - c\,(t_\phi - t_{\delta 1}) = Vt_\phi \Rightarrow (c+V)\,t_\phi = x_{\delta 1} + ct_{\delta 1} = 2ct_{\delta 1} = 2c\dfrac{L}{c-V} \Rightarrow \\ t_\phi = 2c\dfrac{L}{c^2 - V^2} \Rightarrow x_\phi = Vt_\phi = 2cV\dfrac{L}{c^2 - V^2} \end{cases}$$

$$4,9: \begin{cases} x_\phi = x_{\alpha 1} + c\,(t_\phi - t_{\alpha 1}) = Vt_\phi \Rightarrow (c-V)\,t_\phi = ct_{\alpha 1} - x_{\alpha 1} = 2ct_{\alpha 1} = 2c\dfrac{L}{c+V} \Rightarrow \\ t_\phi = 2c\dfrac{L}{c^2 - V^2} \Rightarrow x_\phi = Vt_\phi = 2cV\dfrac{L}{c^2 - V^2} \end{cases}$$

$$2,4: \begin{cases} x_\phi = x_{\delta 1} - c\,(t_\phi - t_{\delta 1}) = x_{\alpha 1} + c\,(t_\phi - t_{\alpha 1}) \Rightarrow 2ct_\phi = x_{\delta 1} + ct_{\delta 1} - x_{\alpha 1} + ct_{\alpha 1} = \\ = 2ct_{\delta 1} + 2ct_{\alpha 1} \Rightarrow t_\phi = \dfrac{L}{c-V} + \dfrac{L}{c+V} = 2c\dfrac{L}{c^2 - V^2} \Rightarrow \\ x_\phi = x_{\delta 1} - c\,(t_\phi - t_{\delta 1}) = 2ct_{\delta 1} - ct_\phi = 2c\dfrac{L}{c-V} - 2c^2\dfrac{L}{c^2 - V^2} = 2cV\dfrac{L}{c^2 - V^2} \end{cases}$$
Επειδή $L = L'\sqrt{1 - V^2/c^2}$ και $t'_\phi = 2L'/c \Rightarrow 2L' = ct'_\phi$, έπεται
$$t_\phi = 2c\frac{L}{c^2 - V^2} = c\frac{2L'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{c^2 - V^2} = t'_\phi\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{(c^2 - V^2)/c^2} \Rightarrow t_\phi = \frac{t'_\phi}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
άρα επαληθεύεται ο γνωστός τύπος διαστολής του χρόνου.

Για τις σφαίρες, η τομή των εξ. 5,10 προσδιορίζει τα $t_{\delta 2}$, $x_{\delta 2}$.

$x_{\delta 2} = v_\delta t_{\delta 2} = L + V t_{\delta 2} \Rightarrow t_{\delta 2} = \frac{L}{v_\delta - V} \Rightarrow x_{\delta 2} = \frac{v_\delta L}{v_\delta - V}$ (Θα αντικαταστήσουμε το $υ_δ$ στο τέλος).
Και η τομή των 6,9 προσδιορίζει τον χρόνο συναντήσεως των σφαιρών στο Σ.

$$x_\sigma = x_{\delta 2} + v_\alpha (t_\sigma - t_{\delta 2}) = V t_\sigma \Rightarrow t_\sigma (V - v_\alpha) = x_{\delta 2} - v_\alpha t_{\delta 2} = \frac{v_\delta L}{v_\delta - V} - v_\alpha \frac{L}{v_\delta - V} \Rightarrow$$

$$t_\sigma = L\frac{v_\delta - v_\alpha}{(V - v_\alpha)(v_\delta - V)} = L\frac{\frac{V+v'}{1+Vv'/c^2} - V + V - \frac{V-v'}{1-Vv'/c^2}}{\left(V - \frac{V-v'}{1-Vv'/c^2}\right)\left(\frac{V+v'}{1+Vv'/c^2} - V\right)} =$$

$$L\frac{\frac{v'(1-V^2/c^2)}{1+Vv'/c^2} + \frac{v'(1-V^2/c^2)}{1-Vv'/c^2}}{\left(\frac{v'(1-V^2/c^2)}{1+Vv'/c^2}\right)\left(\frac{v'(1-V^2/c^2)}{1-Vv'/c^2}\right)} \Rightarrow t_\sigma = \frac{2L}{v'(1-V^2/c^2)}$$

Το ίδιο βγαίνει και από τις εξ. 8,9 καθώς και από τις εξ. 6,8.
Επειδή $L = L'\sqrt{1 - V^2/c^2}$ και $t'_\sigma = 2L'/v'$, έπεται και πάλι $t_\sigma = \frac{t'_\sigma}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$
άρα και πάλι επαληθεύεται ο γνωστός τύπος διαστολής του χρόνου.

Άσκηση 9

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{\upsilon}) = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \to \gamma m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\gamma mc^2\right) = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \to$$

$$\gamma m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\frac{dE}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \to \gamma m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \to$$

$$\gamma m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}q\vec{E}\cdot\vec{\upsilon} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right) \to \gamma m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B} - \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\vec{E}\cdot\vec{\upsilon}\right) \to$$

$$\vec{a} = \frac{q}{\gamma m}\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B} - \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\vec{E}\cdot\vec{\upsilon}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\upsilon} = q\vec{E}\cdot\vec{\upsilon}$

Άσκηση 10

Λόγω της αξονικής συμμετρίας ώς προς τη διεύθυνση κίνησης του φορτίου, επιλέγω σημείο $P(x, y, z=0)$. Στο σύστημα αναφοράς Ο’ το φορτίο είναι ακίνητο και έχω ένα απλό ηλεκτρικό πεδίο Coulomb

$$E_x' = \frac{Qx'}{4\pi\epsilon_0((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \qquad E_y' = \frac{Qy'}{4\pi\epsilon_0((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Από τις σχέσεις μετασχηματισμού

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma x \quad y' = y$$

και από τις σχέσεις μετασχηματισμού του πεδίου ($\vec{B}' = 0$ αφού το φορτίο είναι ακίνητο)

$$E_x = E_x' \qquad E_y = \gamma E_y'$$

παίρνουμε

$$E_x = \frac{Q\gamma x}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad E_y = \gamma \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

Άρα το ηλεκτρικό πεδίο είναι *στην ακτινική διεύθυνση*
Το μέτρο του πεδίου είναι

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = \gamma^2\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{x^2+y^2}{(\gamma^2 x^2 + y^2)^3} = \gamma^2\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{x^2}{(1-\beta^2)} + y^2\right)^3}$$

$$= \gamma^2\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{\gamma^6}\frac{x^2+y^2}{(\gamma^2 x^2 + (1-\beta^2)y^2)^3} = \frac{1}{\gamma^4}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2-\beta^2 y^2)^3}$$

Και αντικαθιστώντας $r^2 = x^2 + y^2$, $y = r\sin\theta$ παίρνουμε

$$E^2 = \frac{1}{\gamma^4}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{r^2}{(r^2 - \beta^2 r^2 \sin^2\theta)^3}$$

Και τελικά:

$$E = \frac{1}{\gamma^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\beta^2}{r^2(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)

$$\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2 \quad = \mathrm{E}_x'^2 + \mathrm{E}_y'^2 + \mathrm{E}_z'^2 - c^2\left(\mathrm{B}_x'^2 + \mathrm{B}_y'^2 + \mathrm{B}_z'^2\right) =$$

$$= \mathrm{E_x}^2 + \gamma^2\left(\mathrm{E_y} - \upsilon \mathrm{B_z}\right)^2 + \gamma^2\left(\mathrm{E_z} + \upsilon \mathrm{B_y}\right)^2 - c^2\left[\mathrm{B_x}^2 + \gamma^2\left(\mathrm{B_y} + \frac{\upsilon}{c^2}\mathrm{E_z}\right)^2 + \gamma^2\left(\mathrm{B_z} - \frac{\upsilon}{c^2}\mathrm{E_y}\right)^2\right]$$

και αναπτύσσοντας τα τετράγωνα, απλοποιώντας και ομαδοποιώντας καταλήγουμε στην

$$\vec{\mathrm{E}}'^2 - c^2\vec{\mathrm{B}}'^2 =$$

$$= \mathrm{E_x}^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\mathrm{E_y}^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\mathrm{E_z}^2 - c^2\left[\mathrm{B_x}^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\mathrm{B_y}^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\mathrm{B_z}^2\right]$$

απ' όπου, προφανώς, έπεται ότι

$$\vec{\mathrm{E}}'^2 - c^2\vec{\mathrm{B}}'^2 = \mathrm{E_x}^2 + \mathrm{E_y}^2 + \mathrm{E_z}^2 - c^2\left[\mathrm{B_x}^2 + \mathrm{B_y}^2 + \mathrm{B_z}^2\right] = \vec{\mathrm{E}}^2 - c^2\vec{\mathrm{B}}^2$$

2)

Έστω υ και $-\upsilon$ η ταχύτητα των δύο διαστημοπλοίων στο ΣΑ της Γης. Τότε η σχετική τους ταχύτητα (η ταχύτητα του ενός στο ΣΑ του άλλου) θα δίνεται από

$$0.7c = \frac{\upsilon - (-\upsilon)}{1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}} \to \frac{2}{0.7}\frac{\upsilon}{c} = 1 + \frac{\upsilon^2}{c^2} \to \upsilon = 0.41c$$

Η άλλη ρίζα $\upsilon = 2.45c$ απορρίπτεται γιατί είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.

3)
Το φορτίο διατηρείται, Q' = Q. Η μάζα αυξάνει είναι αναλλοίωτη επομένως M' =M. Το μήκος συστέλλεται κατά γ, L' = L/γ. Το πλάτος διατηρείται d' = d, άρα ο όγκος μικραίνει κατά γ,
V' = d' L' = d L/γ = V/γ.
Η πυκνότητα M' / V' = M/(V/γ) = γ M/V αυξάνει κατά γ.
Η πυκνότητα φορτίου Q' / V' = Q' /(V/γ) = γQ/V αυξάνει κατά γ.

4)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \Rightarrow u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \frac{d(ct)}{dt} \\ \gamma \frac{dr_1}{dt} \\ \gamma \frac{dr_2}{dt} \\ \gamma \frac{dr_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{\upsilon} \end{pmatrix}$$

επομένως

$$u^2 \equiv g_{\mu\nu} u^\mu u^\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{\upsilon}^2 = \gamma^2 \left(c^2 - \vec{\upsilon}^2\right) = \frac{1}{1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}} \left(c^2 - \vec{\upsilon}^2\right) = c^2$$

5)
Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ακτίνες της λύσης Schwarzschild (σελ. 86 Περσίδης)

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

όπου $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Η μάζα του ήλιου είναι $M_H = 1.98 \times 10^{30} kg$ ενώ η μάζα της Γής $M_\Gamma = 5.9 \times 10^{24} kg$. Για να βρούμε την μάζα του ηλιακού συστήματος προσθέτουμε τις μάζες του ήλιου και των πλανητών. Χρησιμοποιώντας την μάζα της Γής σαν μονάδα έχουμε οτι η μαζα του ήλιου είναι περίπου 332837, ενώ η μάζες των πιο μεγάλων πλανητών 317 (Δίας), 95 (Κρόνος), 14 (Ουρανος). Κατα συνέπεια, η συμβολή στην μάζα του ηλιακού συστήματος συνολικά όλων των πλανητων είναι της τάξης 10^{-3} της μάζας του ήλιου και μπορεί να αγνοηθεί. Τέλος ένας τυπικός Γαλαξίας έχει της τάξης των 100 δισεκατομυρίων (10^{11}) ήλιους. Τελικά έχουμε

(α) Γη

$$R_{\Gamma} = \frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.9 \times 10^{24}}{9 \times 10^{16}} m \cong 8.7 \times 10^{-3} m = 8.7 mm \approx 1 cm$$

(β) Ήλιος

$$R_{H} \cong 2910,7m \approx 3Km$$

(γ) Ηλιακό σύστημα, περίπου το ίδιο οπως και του ηλίου

(δ) Γαλαξίας

$$R_{\Gamma\alpha\lambda} \approx 10^{14} m \cong 0.01 ly$$

οπου ένα έτος φωτός (ly) ειναι περίπου $10^{16} m$. Στον υπολογισμό αυτό δεν έχει συμπεριληφθεί η σκοτεινή ύλη που μαλλον υπαρχει στον γαλαξία.