30/3/2011

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34 2010-11

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 5ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 3/5/11

Άσκηση 1

Θεωρούμε ότι κάθε φωτόνιο που προσπίπτει στο μέταλλο απελευθερώνει ένα ηλεκτρόνιο, δηλαδή έχουμε απόδοση 100%. Η ενέργεια του κάθε φωτονίου είναι $\dfrac{hc}{\lambda}$.

Έτσι ο αριθμός φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου n' είναι

$$n' = \left(0.05\times 10\times 10^{-6}\,\frac{W}{cm^2}\times 0.2cm^2\right)\times\frac{\lambda}{hc} = 10^{-7}W\times\frac{300\times 10^{-9}m}{\left(6.6\times 10^{-34}J\cdot s\right)\left(3.0\times 10^{8}ms^{-1}\right)} =$$

$$= 1.5\times 10^{11}s^{-1}$$

και, κατά συνέπεια, το φωτορεύμα I_0 είναι

$$I_0 = en' = \left(1.6\times 10^{-19}C\right)\left(1.5\times 10^{11}s^{-1}\right) = 2.4\times 10^{-8}A = 24nA$$

Η συνάρτηση $I(V)$ για αρνητικές τάσεις δίνεται από

$$I = I_0 - \frac{I_0}{V_s}V$$

όπου V_s είναι η τάση αποκοπής για την οποία I=0. Δίνεται ότι $V_s/I_0 = 0.77\times 10^{8}V/A$ και άρα $V_s = 1.85V$. Μπορούμε τώρα να βρούμε το έργο εξαγωγής του μετάλλου από την βασική εξίσωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, δηλ.

$$\varphi = \frac{hc}{\lambda} - eV_s = \frac{1240eV\cdot nm}{300nm} - 1.85eV = 4.13 - 1.85 = 2.28$$

Παρατηρούμε οτι το έργο εξαγωγής αντιστοιχεί με αυτό του Na.

Άσκηση 2

Το μέγιστο της ποσότητας $I(\lambda,T)$ συμβαίνει όταν η παράγωγος ως προς λ μηδενίζεται

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}\right)=0 \Rightarrow$$

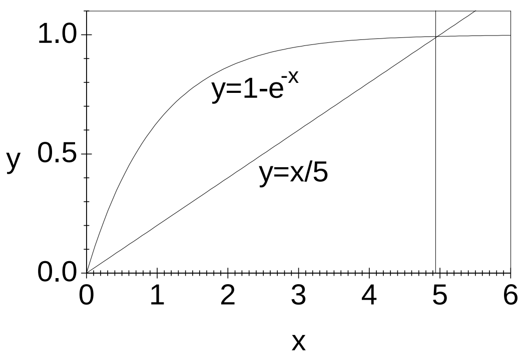
$$2\pi hc^2\left(\frac{-5}{\lambda^4}\frac{1}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}-\frac{e^{hc/\lambda kT}hc/(kT)}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^4\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}\right)\times\left(5+\frac{e^{hc/\lambda kT}hc}{kT\lambda\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}\right)=0 \Rightarrow$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας εξίσωσης δεν μηδενίζεται σε πεπερασμένες τιμές του λ. Για να εξετάσουμε τα σημεία μηδενισμού του δεύτερο όρου εισάγουμε τη μεταβλητή $x=\dfrac{hc}{\lambda kT}$ και η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\left(5+\frac{xe^x}{\left(e^x-1\right)}\right)=0 \Rightarrow 5\left(e^x-1\right)=xe^x \Rightarrow$$

$$1-e^{-x}=\frac{x}{5}$$



Η τελευταία εξίσωση λύνεται αριθμητικά και έχει ως λύση $x=4.97$. Κατά συνέπεια το ακρότατο ως προς λ το οποίο συμβαίνει στην τιμή $\lambda=\lambda_{\max}$ (σύμφωνα με τη γραφική παράσταση 40.2 πρόκειται για μέγιστο)

$$x=\frac{hc}{\lambda_{\max}kT}=4.965 \Rightarrow \lambda_{\max}T=\frac{hc}{4.965k}=\frac{\left(6.626\times10^{-11}J\,s\right)\left(2.998\times10^{8}m/s\right)}{4.965\times1.381\times10^{-23}J/K} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\max}T=0.29\times10^{-2}m\,K$$

Άσκηση 3

Οι τετραορμές των σωματιδίων δίνονται από τις σχέσεις

$p_1^\mu=(\frac{hf}{c},\frac{hf}{c},0,0)$, $p_2^\mu=(m_0c,0,0,0)$ πριν από την κρούση και

$p_1^\mu{}'=(\frac{hf'}{c},\frac{hf'}{c}\cos\theta,\frac{hf'}{c}\sin\theta,0)$, $p_2^\mu{}'=(\frac{E}{c},p\cos\phi,-p\sin\phi,0)$,

$E_2'=E=m_0\gamma c^2$, $p_2'=p=m_0\gamma v$ μετά από την κρούση.

Η διατήρηση της τετραορμής πριν και μετά την κρούση μας δίνει:

$p_1^\mu+p_2^\mu=p_1^\mu{}'+p_2^\mu{}'$ (1)

$\Rightarrow$

$p_2^\mu{}'=p_1^\mu+p_2^\mu-p_1^\mu{}'$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι γενικά $p^{\mu} p_{\mu} = (\frac{E}{c})^2 - p^2 = (m_0 c)^2$ και ότι για το φωτόνιο $p^{\mu} p_{\mu} = 0$ ($m_0 = 0$), υψώνουμε στο τετράγωνο την παραπάνω σχέση και παίρνουμε

$$p_2^{\mu\prime} p_{2\mu}{}' = (p_1 + p_2 - p_1')^{\mu} (p_1 + p_2 - p_1')_{\mu} = p_1^{\mu} p_{1\mu} + p_2^{\mu} p_{2\mu} + p_1^{\mu\prime} p_{1\mu}{}' + 2(p_1^{\mu} p_{2\mu} - p_1^{\mu} p_{1\mu}{}' - p_2^{\mu} p_{1\mu}{}')$$

$\Rightarrow$

$$(m_0 c)^2 = 0 + (m_0 c)^2 + 0 + 2[\frac{hf}{c} m_0 c - (\frac{hf}{c}\frac{hf'}{c} - \frac{hf}{c}\frac{hf'}{c}\cos\theta) - \frac{hf'}{c} m_0 c]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{hfhf'}{c}(1-\cos\theta) = (hf - hf')m_0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{hf'} - \frac{1}{hf} = \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) για $\mu = 0$ παίρνουμε (διατ. ενέργειας)

$$hf + m_0 c^2 = hf' + E = hf' + (T + m_0 c^2) \Rightarrow T = hf - hf'$$

Η σχέση (2) μας δίνει

$$\frac{hf - hf'}{(hf)(hf')} = \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) \Rightarrow T = \frac{(hf)(hf')}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)$$

Η σχέση (2) μας δίνει

$$hf' = \frac{1}{\frac{1}{hf} + \frac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\theta)} = \frac{hf}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε τελικά

$$T = \frac{(hf)(hf)(1-\cos\theta)}{m_0 c^2 (1+\alpha(1-\cos\theta))} = \frac{hf\alpha}{1+\alpha(1-\cos\theta)}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 4

Α) Το Δευτέριο είναι ένα σταθερό ισότοπο του Υδρογόνου. Ο πυρήνας του ατόμου του Δευτερίου περιέχει ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο σε αντίθεση με τον πυρήνα του ατόμου του Υδρογόνου ο οποίος περιέχει μόνο ένα πρωτόνιο. Η ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου της βασικής κατάστασης , σύμφωνα με το μοντέλο του Bohr, δίνεται από τον τύπο

$$E = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}$$

όπου μ η ανοιγμένη μάζα του κάθε ατόμου και $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Θεωρώντας m τη μάζα του ηλεκτρονίου και ίσες μάζες M για το πρωτόνιο και το νετρόνιο, η ανηγμένες μάζες των δύο ατόμων δίνονται από

$$\mu_H = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}, \mu_D = \frac{2mM}{m+2M} = \frac{m}{1+\frac{m}{2M}}$$

Έτσι έχουμε

$$\Delta\mathrm{E} = E_D - E_H = -\frac{k^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{m}{1+\frac{m}{2M}} - \frac{m}{1+\frac{m}{M}}\right) \approx \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{m}{2M} = 13.6\mathrm{eV}\times\frac{5.4\times10^{-4}}{2} \approx 3.7\mathrm{meV}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα $(1+x)^\alpha \approx 1+a\,x$, $x \ll 1$ με

$x = m/M \approx \dfrac{0.511\mathrm{MeV/c^2}}{938.\mathrm{MeV/c^2}} = 5.4\times10^{-4}$

B) Τα μήκη κύματος των εκπεμπόμενων φωτονίων όταν ένα ηλεκτρόνιο μεταπίπτει από στάθμη ενέργειας E_f σε στάθμη ενέργειας E_i δίνονται από

$$f = \frac{E_f - E_i}{h} = \frac{\mu}{h}\frac{k^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Στη σειρά Lyman έχουμε $n_f = 1$ και για την πρώτη γραμμή $n_i = 2$ επομένως

$$f = \mu\frac{k^2e^4}{2\hbar^2}\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{4}{3}\frac{c}{\mu}\left(\frac{2\hbar^2}{k^2e^4}\right)$$

Η διαφορά των δύο μηκών κύματος δίνεται από

$$\lambda_H - \lambda_D = \frac{4}{3}\frac{hc}{\mu}\left(\frac{2\hbar^2}{k^2e^4}\right)\left(\frac{1}{\mu_H} - \frac{1}{\mu_D}\right) = \frac{2}{3}hc\frac{m}{M}\left(\frac{2\hbar^2}{mk^2e^4}\right) \approx 33\mathrm{pm}$$

Άσκηση 5

A) Η προσέγγιση ευρέος φράγματος ισχύει αν

$L \gg \delta = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}} \Rightarrow \dfrac{\hbar^2}{2mL^2} \ll U - E \Rightarrow E \ll U - \dfrac{\hbar^2}{2mL^2}$.

Άρα για το δοθέν εύρος τιμών για να ισχύει η προσέγγιση ευρέος φράγματος πρέπει

$\dfrac{\hbar^2}{2mL^2} \ll U$.

Συγκεκριμένα, άν $\delta \le L/10$,

$\delta^2 = \dfrac{\hbar^2}{2m(U-E)} \le \dfrac{L^2}{100} \Rightarrow \dfrac{100\hbar^2}{2mL^2} \le U - E$ (1)

και για το δοθέν εύρος, είναι $\dfrac{\hbar^2}{2mL^2} < E$ (2)

Προσθέτοντας (1)+(2),

$$\frac{101\hbar^2}{2mL^2} \le U \Rightarrow L \ge \sqrt{\frac{101\hbar^2}{2mU}}$$

οπότε, από (1),(2) έχουμε

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2} < E \le U - \frac{100\hbar^2}{2mL^2} < U$$

Για το μικρότερο επιτρεπτό $L = \sqrt{\frac{101\hbar^2}{2mU}} \quad \left(\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{U}{101} \right)$,

είναι $E = \frac{\hbar^2}{2mL^2} = U - \frac{100\hbar^2}{2mL^2} = \frac{U}{101}$

Εφαρμόζοντας, διευκολύνει να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με c^2 και να εργασθούμε σε *eV* και *Å*.

($\hbar c$ =1973 *eV Å*, $m_e c^2 = 0.5 \;\; 10^6 eV, \quad m_p c^2 = 938 \;\; 10^6 eV, \quad m_a = 4m_p$)

Για $U = 7eV$ έχουμε $\frac{U}{101} = 0.07eV$, και

Α) ηλεκτρόνιο: $L \ge \sqrt{\frac{101\hbar^2}{2mU}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 1.973^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 0.5 \cdot 10^6 \cdot 7}}$ *Å* = 7.5 *Å*,

Β) πρωτόνιο: $L \ge \sqrt{\frac{101\hbar^2}{2mU}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 1.973^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 938 \cdot 10^6 \cdot 7}}$ *Å* = 0.17 *Å*,

Γ) σωμάτιο *α*: $L \ge \sqrt{\frac{101\hbar^2}{2mU}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 1.973^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 4 \cdot 938 \cdot 10^6 \cdot 7}}$ *Å* = 0.09 *Å*.

Δοθέντος ότι οι ενδοατομικές αποστάσεις των υλικών είναι ≈ 1-2 *Å*, δηλαδή 100/πλάσιες των ως άνω τιμών για τα πρωτόνια και βαρύτερα σωμάτια, και $\frac{\hbar^2}{2mL^2} \simeq 0 \;\; < E < U$, έπεται ότι γι' αυτά κάθε υλικό φράγμα είναι πρακτικώς ευρύ.

Άσκηση 6

Το δυναμικό V(x) έχει δύο περιοχές; αν θεωρήσουμε οτι ο άξονας x ξεκινά από το αριστερό άκρο του πηγαδιού έχουμε την ακόλουθη συναρτησιακή εξάρτηση για το δυναμικό:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < \mathrm{x} < \mathrm{a}, \quad (\mathrm{I}) \\ \mathrm{V_0}, & \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}, \quad (\mathrm{II}) \end{cases} \qquad (1)$$

Α) Η εξίσωση του Schroedinger για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ γράφεται ως εξής

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

οπου η σταθερά k παίρνει τις τιμές $k^2 = \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ για την περιοχή (Ι) και

$k^2 = -\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ για την περιοχή (ΙΙ) ενώ ο τόνος παριστά παραγώγιση ως προς την μεταβλητή x.

B) Η εξίσωση (2) είναι η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή και κατά συνέπεια οι λύσεις της είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις για $k^2>0$ ή υπερβολικές συναρτήσεις για $k^2<0$. Αν θεωρήσουμε $E<V_0$ οπως στο σχήμα τότε έχουμε τις λύσεις

$$\psi(x)=\begin{cases}\mathrm{A}\sin(\kappa \mathrm{x})+\mathrm{B}\cos(\kappa \mathrm{x}), & \mathrm{(I)}\\ \mathrm{C}\mathrm{e}^{\lambda x}+D\mathrm{e}^{-\lambda x}, & \mathrm{(II)}\end{cases} \qquad (3)$$

Για $E>V_0$ η λύση των εξ. (3) στη περιοχή (II) δίνεται από τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι σταθερές A, B, B, D προσδιορίζονται από συνοριακές συνθήκες.

Γ) Εφαρμόζουμε τώρα τις συνοριακές συνθήκες στις εξισώσεις (3). Επειδή το δυναμικό είναι άπειρο στα σημεία $x=0,\ b$, έχουμε $\psi(0)=\psi(b)=0$ και άρα $B=0$ από την πρώτη σχέση. Από την δεύτερη παίρνουμε

$$Ce^{\lambda b}+De^{-\lambda b}=0 \qquad (4)$$

το οποίο δίνει $D=-Ce^{2\lambda b}$ (5)

Η λύση στην περιοχή (II) γράφεται

$$\psi(x)=Ce^{\lambda x}-Ce^{2\lambda b}e^{-\lambda x}=Ce^{\lambda b}\left[e^{\lambda(x-b)}-e^{-\lambda(x-b)}\right] \qquad (6)$$

και, κατά συνέπεια έχουμε

$$\psi(x)=\begin{cases}\mathrm{A}\sin(\kappa \mathrm{x}), & \mathrm{(I)}\\ 2\mathrm{C}\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{b}}\sinh\lambda(\mathrm{x}-\mathrm{b}), & \mathrm{(II)}\end{cases} \qquad (7)$$

Γ) Για να βρούμε την ενέργεια χρησιμοποιούμε τωρα τις συνθήκες συνέχειας της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου της στο σημείο x=a. Βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned}A\sin\kappa a&=2Ce^{\lambda b}\sinh\lambda(a-b)\\ A\kappa\cos\kappa a&=2Ce^{\lambda b}\cosh\lambda(a-b)\end{aligned} \qquad (8)$$

Διαιρώντας κατα μέλη τις σχέσεις στην εξ. (8) βρίσκουμε την ζητούμενη σχέση

$$\frac{1}{\kappa}\tan\kappa a=-\frac{1}{\lambda}\tanh\lambda(b-a) \qquad (9)$$

Άσκηση 7

Α και Β) Η εξίσωση του Schroedinger για το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή παίρνει τη μορφή ((41.30) βιβλίου Serway)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\left[\frac{2mE}{\hbar^2}-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2x^2\right]\psi$$

όπου $U = \dfrac{1}{2} k\, x^2$ = $m\omega^2$ x^2 /2 η δυναμική ενέργεια. Αντικαθιστώντας την προτεινόμενη κυματοσυνάρτηση βρίσκουμε

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A x e^{-b x^2} \right) = -\left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] A x e^{-b x^2}$$

$$\Rightarrow A \frac{d}{dx}\left(e^{-b x^2} - 2b x^2 e^{-b x^2} \right) = -\left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] A x e^{-b x^2}$$

$$\Rightarrow -2bxe^{-b x^2} - 4bxe^{-b x^2} + 4b^2 x^3 e^{-b x^2} = -\left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] x e^{-b x^2}$$

$$\Rightarrow 2\left(-6b + 2b^2 x^2 \right) x e^{-b x^2} = -\left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] x e^{-b x^2}$$

$$\Rightarrow 2\left(-3b + 2b^2 x^2 \right) = -\frac{2mE}{\hbar^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2$$

$$\Rightarrow x^2 \left(4b^2 - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \right) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - 6b \right) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει για κάθε x, άρα (εξισώνουμε τους συντελεστές όλων των δυνάμεων του *x* με μηδέν)

$$\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - 6b \right) = 0$$

$$\left(4b^2 - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \right) = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Συγκρίνοντας με τον τύπο των ενεργειακών σταθμών της εξίσωσης (41.33) του βιβλίου του Serway, $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2} \right)\hbar\omega$ βρίσκουμε *n=1* και συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για την πρώτη διεγερμένη κατάσταση.

Γ) Η ενέργεια της βασικής κατάστασης είναι $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Επομένως η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου είναι ίση με

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega$$

Άσκηση 8

A)

Από την ταυτότητα

$$\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x) = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{(m-n)\pi x}{L}) + \cos(\frac{(m+n)\pi x}{L})\right)$$

παίρνουμε

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \cos(\frac{(m-n)\pi}{L}x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \cos(\frac{(m+n)\pi}{L}x)\,dx$$

Για $m \neq n$ και οι δύο όροι δίνουν 0 ενώ για $m = n$ ό πρώτος όρος είναι $\frac{L}{2}$ και ο δεύτερος 0. Άρα

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,dx = \delta_{n,m}\frac{L}{2} \quad (1)$$

B)

Για να είναι σωστή η κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz = 1$$

που σημαίνει ότι η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο στο χώρο είναι 1. Αφού η κυματοσυνάρτηση είναι 0 εκτός του κουτιού το ολοκλήρωμα γίνεται ως εξής

$$\int_0^L dx\int_0^L dy\int_0^L dz\,|\psi(x,y,z,t)|^2$$

και το τετράγωνο του μέτρου υπολογίζεται σαν

$|\psi|^2 = \psi^*\psi$ όπου ψ^* η μιγαδική συζυγής της ψ. Έχουμε

$$\psi(x,y,z,t) = A\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)\sin(\frac{2\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)e^{-i\omega t} + 2A\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{2\pi}{L}z)e^{-i\omega t}$$

όπου

$$\omega = \frac{E_{2,2,1}}{\hbar} = \frac{E_{2,1,2}}{\hbar} = \frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2} \text{ και}$$

$$\psi(x,y,z,t)^* = A\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)\sin(\frac{2\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)e^{i\omega t} + 2A\left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{2\pi}{L}z)e^{i\omega t}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και ολοκληρώνουμε. Σύμφωνα με την (1) αναζητάμε τους όρους όπου όλοι οι ακέραιοι στα ημίτονα είναι ίσοι. Επίσης παρατηρούμε ότι οι παράγοντες $e^{\pm\omega t}$ εξαφανίζονται δίνοντας 1 και το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του χρόνου (Σημ.: αυτό είναι γενικό συμπέρασμα για το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^3}|\psi|^2\,d\vec{r}$ που βγαίνει για οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση του Schrodinger. Σκεφτείτε αυτό να μην ίσχυε... Αυτό θα το μάθετε στη ΦΥΕ40.). Οι όροι με μη μηδενικη συνεισφορά είναι οι

$$1=\int|\psi|^2\,dxdydz = A^2\left(\frac{2}{L}\right)^3\int_0^L dx\sin^2(\frac{2\pi}{L}x)\int_0^L dy\sin^2(\frac{2\pi}{L}y)\int_0^L dz\sin^2(\frac{\pi}{L}z)$$

$$+4A^2\left(\frac{2}{L}\right)^3\int_0^L dx\sin^2(\frac{2\pi}{L}x)\int_0^L dy\sin^2(\frac{\pi}{L}y)\int_0^L dz\sin^2(\frac{2\pi}{L}z)$$

$$= A^2\left(\frac{2}{L}\right)^3\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}+4A^2\left(\frac{2}{L}\right)^3\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{2}=5A^2$$

Άρα $5A^2=1\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{5}}$ (αφού δίνεται ότι Α>0).

Άσκηση 9

Α) Με βάση το Σχήμα η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται για $x\le -a$ και $x\ge +a$. Στην περιοχή $-a\le x\le 0$ δίνεται από μια ευθεία άρα $\psi_I = Ax+B$ με $\psi_I(-a)=0$, $\psi_I(0)=a\Rightarrow\psi_I = x+a$ και ομοίως στην περιοχή $0\le x\le a$ έχουμε $\psi_{II}=Dx+E\Rightarrow\psi_{II}=-x+a$. Η κυματοσυνάρτηση είναι συνεχής στο $x=0$ και στα $x=\pm a$. Η γενική της μορφή , με μια πολλαπλασιαστική σταθερά C, για την καλύψουμε την περίπτωση που δεν είναι κανονικοποιημένη, είναι

$$\psi(x)=\begin{cases}0\ ,x\le -a\\ C(x+a),-a\le x\le 0\\ C(-x+a),0\le x\le a\\ 0,x\ge a\end{cases}$$

Β) Η κανονικοποίηση απαιτεί

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left|\psi(x)\right|^2=1\Rightarrow|C|^2\int_{-a}^{0}dx(x+a)^2+|C|^2\int_0^a dx(-x+a)^2=1$$

$$\Rightarrow|C|^2\int_0^a dyy^2-|C|^2\int_a^0 dyy^2=2|C|^2\int_0^a dy\,y^2=2|C|^2\frac{a^3}{3}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$$

Γ) Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από

$$P=\int_{-\infty}^{0}dx|\psi(x)|^2=\frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{0}dx(x+a)^2=\frac{3}{2a^3}\int_0^a dxy^2=\frac{3}{2a^3}\frac{a^3}{3}=0.5=50\%$$

Δ)

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{3}{2a^3}\left[\int_{-a}^{0} dx\, x\left(x+a\right)^2 + \int_{0}^{a} dx\, x\left(-x+a\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2a^3}\left[\int_{-a}^{0} dx\, x\left(x+a\right)^2 + \int_{0}^{-a} dy\, y\left(y+a\right)^2\right] = 0$$

Ε)

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle - \left\langle x\right\rangle^2} = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{3}{2a^3}\left[\int_{-a}^{0} dx\, x^2\left(x+a\right)^2 + \int_{0}^{a} dx\, x^2\left(-x+a\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2a^3}\left[\int_{-a}^{0} dx\, x^2\left(x+a\right)^2 - \int_{0}^{-a} dy\, y^2\left(y+a\right)^2\right] = \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{0} dx\, x^2\left(x+a\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{0} dx\left(x^4 + 2ax^3 + a^2x^2\right) = \frac{3}{a^3}\left(\frac{a^5}{5} - 2a\frac{a^4}{4} + a^2\frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2}{10}$$

Επομένως $\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle} = \dfrac{a}{\sqrt{10}}$

Άσκηση 10

Α) $\psi_{2,1,1}\ \ r,\theta,\phi\ \ = R_{2,1}\ \ r\ \ Y^{1,1}\ \ \theta,\phi\ \ = R_{2,1}\ \ r\ \ \dfrac{-1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$

Άρα

$$\pi\iota\theta_{\mathrm{B}} = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|\psi_{2,1,1}\ \ r,\theta,\phi\ \ \right|^2 dV$$

$$= \int_0^\infty R_{2,1}\ \ r\ \ ^2 r^2 dr\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|Y^{1,1}\ \ \theta,\phi\ \ \right|^2 \sin\theta d\theta\ d\phi$$

$$= \int_0^\infty R_{2,1}\ \ r\ \ ^2 r^2 dr\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}\frac{3}{2\pi}\ \ 1-\cos^2\theta\ \ \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} e^{-i\phi}e^{i\phi}d\phi$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/4}\ \ 1-\cos^2\theta\ \ \sin\theta d\theta$$

Πάλι ως προς θ έχουμε

$$\int_0^{\pi/4}\ \ 1-\cos^2\theta\ \ \sin\theta d\theta = -\int_{\cos 0}^{\cos\ \pi/4}\ \ 1-\cos^2\theta\ \ d\ \ \cos\theta\ \ =$$

$$= +x\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{12}(8-5\sqrt{2})$$

Άρα

$\pi\iota\theta_B = \dfrac{1}{16}(8-5\sqrt{2}) = 2 - \dfrac{5\sqrt{2}}{16} \approx 0.058$, και άρα 2x0.058$\approx$0.12 αν συνυπολογίσουμε και τον κάτω κώνο.

Δηλαδή έχει 88% πιθανότητα να βρεθεί κοντά στο επίπεδο xy (σε «γεωγραφικό πλάτος» μεταξύ $\pm 45^{\mathrm{o}}$) όταν είναι στο τροχιακό 2p με $m_l = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)

Το μέγιστο μήκος κύματος συνδέεται με τη θερμοκρασία με το Νόμο του Wien $\lambda = b/T,\ b = 2.898\times10^{-6}\,\mathrm{K}$. Για τα δύο σώματα έχουμε

$$\lambda_1 = \frac{b}{T_1},\quad \lambda_2 = \frac{b}{T_2}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \Rightarrow \frac{b}{T_2} = \frac{b}{T_1} + \Delta\lambda \Rightarrow T = \frac{bT_1}{b + T_1\Delta\lambda} = 1.747kK$$

2)

Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας

$$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x\, m\Delta\upsilon \geq \hbar \Rightarrow \Delta\upsilon \geq \frac{\hbar}{m\Delta x}$$

$$\Delta\upsilon \geq \frac{1.054\times10^{-34}\,Js}{1.672\times10^{-27}\,Kg10^{-8}\,m} = 6.30m/s$$

3)

Διότι η πιθανότητα ευρέσεως σε απόσταση μεταξύ r και $r + dr$ είναι $|\psi\ r\,|^2\, dV\big|_r^{r+dr} = |\psi\ r\,|^2\, 4\pi r^2 dr$ και μηδενίζεται για $r = 0$.

4)

Το μήκος κύματος Compton είναι ίσο με $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 0.00243\mathrm{nm}$, ενώ το μήκος κύματος de Broglie δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m\upsilon}$. Εξισώνοντας τις δυο σχέσεις βρίσκουμε ότι η ζητούμενη ταχύτητα είναι

$$\frac{h}{mc} = \frac{h}{\gamma m\upsilon} \Rightarrow c = \gamma\upsilon \Rightarrow c^2 = \gamma^2\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{1-\upsilon^2/c^2}\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = c^2 - \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

5)

Η ενέργεια της στάσιμης κατάστασης κύριου κβαντικού αριθμού n δίνεται από τον τύπο

Οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού της στροφορμής είναι

$$\ell = 0,1,2,\ldots,19$$

και για κάθε τιμή από αυτές $m_\ell = \left(-\ell, -\ell+1\ldots,0,\ldots,\ell-1,\ell\right)$. Η γωνία μεταξύ της στροφορμής και του άξονα του z είναι

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell \cancel{\hbar}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\cancel{\hbar}} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

Αναζητούμε συνδυασμούς των τιμών ℓ, m_ℓ για τις οποίες $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, δηλαδή

$$\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow = m_\ell = \frac{\sqrt{3\ell(\ell+1)}}{2}$$

Υπολογίζοντας την παραπάνω ποσότητα για τις τιμές του $\ell = 0,1,2,\ldots,19$ προκύπτει μόνο μια ακέραια τιμή $m_\ell = 3$ για $\ell = 3$. Κατά συνέπεια

$$n = 20, \ell = 3, m_\ell = 3$$