ΕΑΠ - ΦΥΕ 34. Ακαδημαϊκό Έτος 2003-2004

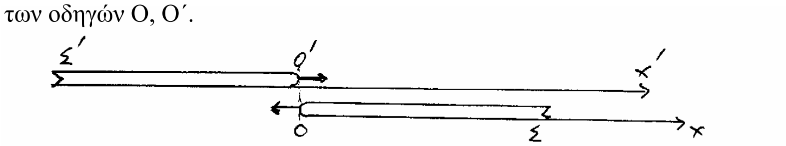
1η Εργασία (Προθεσμία: 25/11/2003)

Ασκήσεις

Σημείωση: Οι πέντε πρώτες ασκήσεις καθώς και οι δύο πρώτες ερωτήσεις απαιτούν γνώσεις μόνο από τα 3 πρώτα κεφάλαια. Οι υπόλοιπες ασκήσεις και ερωτήσεις απαιτούν γνώση και 4ου κεφαλαίου του βιβλίου της Σχετικότητας

1. Α) Οι συντεταγμένες δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς Σ είναι οι εξής:
Γεγονός 1: $t_1 = x_0/c$, $x_1 = x_0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$. Γεγονός 2: $t_2 = x_0/2c$, $x_2 = 2x_0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$.
Δείξτε ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς Σ΄, στο οποίο τα δύο αυτά γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα. Ποια είναι η ταχύτητά του ως προς το Σ και ποιά η κοινή χρονική στιγμή t΄ ;

Β) Δύο τρένα Σ, Σ', κινούμενα αντίθετα με σχετική ταχύτητα 1000 m/s συναντώνται στο (x,t)=(x',t')=(0,0). Εκεί είναι οι θέσεις των οδηγών Ο, Ο΄.



Εάν έχουν ένα (1) επιβάτη ανά μέτρο (m) και, μετά από χρόνο t = 1.5 s, ο 1000ος επιβάτης του Σ ανάψει τσιγάρο, ποιός επιβάτης του Σ' θα τον δει μπροστά του, και μετά από πόσο χρόνο t' ; Αν το άναβε μετά από t=1 s;

2. Ένας αστροναύτης παίρνει μαζί του από τη Γη καλλιέργεια N_o βακτηριδίων, που διπλασιάζονται κάθε T_o = 20 min. Ταξιδεύει με ταχύτητα υ = 0.8 c και επιστρέφει μετά από 10 ώρες Γης. Αν N_o=2, πόσα βακτηρίδια έχουν αναπτυχθεί στο διαστημόπλοιο, και πόσα, αντίστοιχα, θα είχαν αναπτυχθεί στη Γη, αν η καλλιέργεια είχε παραμείνει στη Γη;

3. Αν ένας σφαιρικός γαλαξίας έχει διάμετρο 10^5 έτη φωτός ως προς ένα ακίνητο παρατηρητή στο κέντρο του Κ,
α) τί διαστάσεις θα του απέδιδε αστροναύτης κινούμενος με ταχύτητα υ = 0.999999 c ως προς το Κ κατά μήκος μιας διαμέτρου του και σε πόσον ίδιο-χρόνο θα διάνυε μια διάμετρό του; β) Ως προς το Κ, πόσος χρόνος χρειάζεται για να διανυθεί ο γαλαξίας από αυτόν τον αστροναύτη; Πόσα μέτρα ένα φωτεινό σήμα θα προηγείται του αστροναύτη ως προς το Κ στο τέλος του ταξιδιού του, αν το σήμα εκπεμπόταν τη στιγμή που ο αστροναύτης περνούσε από το Κ με την παραπάνω ταχύτητα; Πόσα μέτρα ως προς το διαστημόπλοιο; (Αγνοήστε τυχόν κινήσεις του γαλαξία).

4. Μια ράβδος μήκους ηρεμίας L_0 κινείται με ταχύτητα μέτρου v κατά μήκος του άξονα Οx του συστήματος Σ, σχηματίζοντας γωνία θ με αυτόν. Στο σύστημα αναφοράς Σ΄, στο οποίο η ράβδος ηρεμεί, σχηματίζει γωνία θ_0 με τον άξονα x'. Δείξτε ότι το μήκος της ράβδου όπως μετριέται από ένα ακίνητο παρατηρητή στο Σ είναι $L = L_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2\theta_0}$. Δείξτε ότι για τον ακίνητο παρατηρητή στο Σ, η ράβδος συστέλλεται και ότι $\theta \neq \theta_0$ (η ράβδος φαίνεται περιστρεμμένη).
<u>Υπόδειξη</u> Θεωρήστε ότι το κάτω σημείο της ράβδου συμπίπτει με τη αρχή του τονούμενου συστήματος συντεταγμένων και υπολογίστε την γωνία (ή την εφαπτομένη της γωνίας) θ στο ακίνητο σύστημα αναφοράς.

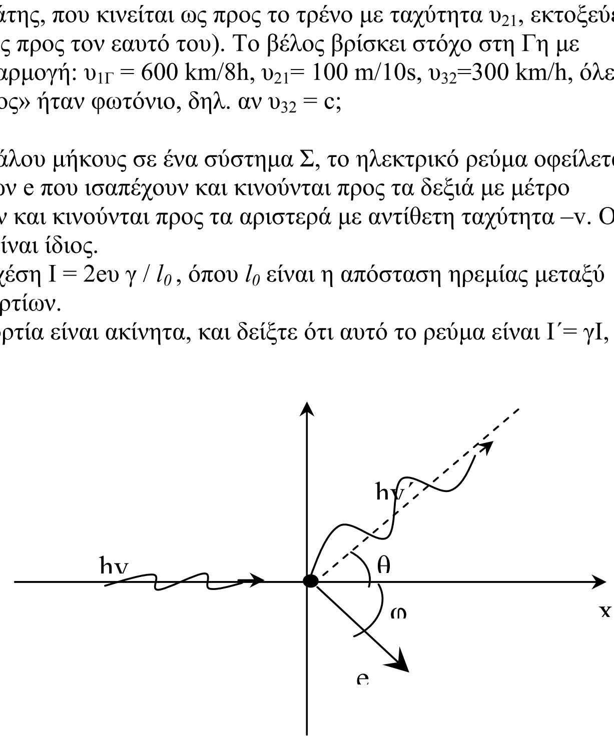
5. Ένα τρένο κινείται ως προς τη Γη με ταχύτητα $\upsilon_{1\Gamma}$. Ένας επιβάτης, που κινείται ως προς το τρένο με ταχύτητα υ_{21}, εκτοξεύει αβαρές βέλος οριζοντίως με ταχύτητα υ_{32} ως προς το τόξο του (ως προς τον εαυτό του). Το βέλος βρίσκει στόχο στη Γη με ταχύτητα $\upsilon_{3\Gamma}$ ως προς τη Γη. Α) Πόση είναι η ταχύτητα $\upsilon_{3\Gamma}$; Εφαρμογή: $\upsilon_{1\Gamma}$ = 600 km/8h, υ_{21}= 100 m/10s, υ_{32}=300 km/h, όλες οι ταχύτητες είναι ομόρροπες. Β) Πόση θα ήταν η $\upsilon_{3\Gamma}$ αν το «βέλος» ήταν φωτόνιο, δηλ. αν υ_{32} = c;

6. Θεωρήστε ότι σ' έναν ευθύγραμμο οριζόντιο αγωγό πολύ μεγάλου μήκους σε ένα σύστημα Σ, το ηλεκτρικό ρεύμα οφείλεται στην κίνηση μιας γραμμικής διάταξης ελεύθερων θετικών φορτίων e που ισαπέχουν και κινούνται προς τα δεξιά με μέτρο ταχύτητας v και ελεύθερων αρνητικών φορτίων –e που ισαπέχουν και κινούνται προς τα αριστερά με αντίθετη ταχύτητα –v. Ο αριθμός των θετικών ή αρνητικών φορτίων ανά μονάδα μήκους είναι ίδιος.

α) Δείξτε ότι, ως προς το Σ, το ρεύμα I δίνεται από τη σχέση I = 2eυ γ / l_0, όπου l_0 είναι η απόσταση ηρεμίας μεταξύ διαδοχικών θετικών φορτίων ή μεταξύ διαδοχικών αρνητικών φορτίων.

β) Βρείτε το ρεύμα I΄, ως προς τη Γή, όπου τα θετικά φορτία είναι ακίνητα, και δείξτε ότι αυτό το ρεύμα είναι I΄= γI, δηλαδή μεγαλύτερο από το ρεύμα που μετρείται στο σύστημα Σ.

7. Ένα φωτόνιο ακτίνων Χ συχνότητας ν εισέρχεται από τα αριστερά στο σχήμα κατά μήκος του άξονα των x και προσπίπτει σε ένα ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, οπότε του μεταβιβάζει μέρος της ενέργειας και της ορμής του. Το φωτόνιο σκεδάζεται κατά μια γωνία θ, ενώ το ηλεκτρόνιο αποκτά κινητική ενέργεια Κ και ορμή **p**. Το διάνυσμα **p** σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των x. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο, λόγω της κινητικής ενέργειας που μεταβίβασε στο ηλεκτρόνιο χάνει μέρος της ενέργειάς του και έτσι η νέα του ενέργεια hν΄ (όπου h η σταθερά του Planck) είναι μικρότερη από την αρχική. Χρησιμοποιώντας τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και της ορμής κατά μήκος των

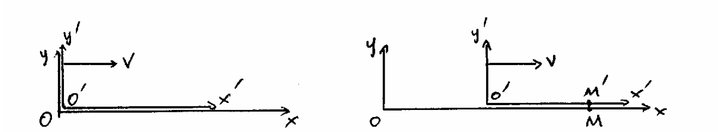


αξόνων x και y, βρείτε την γωνία φ και την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.
Υποδ. Μπορείτε να πολλαπλασιάσετε την ταυτότητα $\gamma^2 - \gamma^2 \upsilon^2/c^2 = 1$ επί m^2c^4.

8. Αντιπρωτόνιο p^- μάζας ηρεμίας $M_0 = 938$ MeV/c^2 διεισδύει σε κομμάτι ύλης, επιβραδύνεται και, όταν ηρεμήσει, αλληλεπιδρά με παρευρισκόμενο πρωτόνιο p^+ που ηρεμεί (ίσης μάζας ηρεμίας M_0). Με την αλληλεπίδραση τα δύο ηρεμούντα σωμάτια εξαϋλώνονται, και παράγονται δύο ουδέτερα πιόνια π^0 μάζας ηρεμίας $m_0 = 135$ MeV/c^2 το καθένα. Να βρεθεί το μέτρο της ορμής καθενός πιονίου σε MeV/c και η ταχύτητά του σε ποσοστό του c.

Ερωτήσεις

1. Ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ' (O,t',x',y',z'), κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}=V\mathbf{i}$, V>0, ως προς άλλο, Σ (O,t,x,y,z). Τη στιγμή t = t' = 0, οι αρχές O, O' ταυτίζονται. Ύστερα, για t >0, t' >0 και για τυχόν σημείο M' της ευθείας O΄x', που αντιστοιχεί στο σημειο M του Ox, (π.χ. τη θέση μιας μύγας) με συντεταγμένες x' και x, αντίστοιχα, θα έχουμε:



Ως προς Σ: OM = OO' + O'M . Ως προς Σ': O'M' = OM' - OO' .
A) Εξηγήστε γιατί
Ως προς Σ: OM $\neq$ OO' + O'M' . Ως προς Σ': O'M' $\neq$ OM - OO';
B) Εαν $AB_{(\Sigma)}$ σημαίνει «το μήκος AB ως προς το Σ, δηλαδή στο συγχρονισμό του Σ»,
(π.χ. το μήκος μιας ράβδου στο Σ, όταν τα άκρα της είναι τα A και B και προσδιορίζονται την ίδια χρονική στιγμή) εξηγήστε γιατί
$OO'_{(\Sigma)} = V\,t$, ενώ $OO'_{(\Sigma')} = V'\,t' = -V\,t'$,
$O'M_{(\Sigma)} = (1-V^2/c^2)^{1/2}\;\; O'M'_{(\Sigma')}$ και $OM'_{(\Sigma')} = (1-V^2/c^2)^{1/2}\;\; OM_{(\Sigma)}$

2. Υπάρχει παράδοξο στον εξής συλλογισμό**;** «Ενα διαμπερές δωμάτιο και ένα δόρυ έχουν μήκη ηρεμίας $L_o = 4$ m και $l_o = 5$ m, αντίστοιχα. Το δόρυ κινείται με σχετικιστική ταχύτητα ούτως ώστε το μήκος του ως προς το δωμάτιο να γίνεται $l(\upsilon) = l_o/\gamma = 4$ m. Ως προς τον συγχρονισμό της Γής, το κινούμενο δόρυ χωράει ολόκληρο μέσα στο δωμάτιο. Ως προς τον συγχρονισμό του δόρατος το (κινούμενο) δωμάτιο έχει μήκος μικρότερο από 4 m και άρα ουδέποτε μπορεί να περιέχει ολόκληρο το δόρυ.»
(_Υπόδειξη_: Θεωρήστε ότι οι πόρτες ήσαν κλειστές και καθεμία ανοίγει την κατάλληλη στιγμή για να περάσει το δόρυ, και μόλις εκτελέσει τον προορισμό της, ξανακλείνει. Θεωρήστε την χρονική αλληλουχία όλων αυτών των γεγονότων στα δύο συστήματα αναφοράς)

3. _Ως γνωστόν, παράλληλα ρεύματα έλκονται. Δηλαδή ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα **v** παράλληλα προς τα κινούμενα ηλεκτρόνια ενός ρευματοφόρου σύρματος, έλκεται προς το σύρμα με δύναμη **F** = q**v** x **B** λόγω του μαγνητικού πεδίου **B** που αναπτύσσεται γύρω από το σύρμα. Όμως, στο δικό του σύστημα αναφοράς (ως προς τον εαυτό του) έχει ταχύτητα **v** = 0. Άρα δεν επηρεάζεται από κανένα μαγνητικό πεδίο. Τότε τίθεται το ερώτημα "πώς έλκεται;". Η θεωρία Σχετικότητας ερμηνεύει αυτή την έλξη με την συστολή του μήκους. Για την ερμηνεία αυτή απαντήστε περιγραφικά, χωρίς υπολογισμούς στην εξής άσκηση._

Έστω σύρμα σταθερής πυκνότητας αποτελούμενο από άτομα που συνεισφέρουν ένα (1) ελεύθερο ηλεκτρόνιο (αγωγιμότητας). Όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα, τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση ταχύτητα $\mathbf{v}_d$. Ένα άλλο ηλεκτρόνιο, απ΄ έξω, έστω ότι την στιγμή της παρατηρήσεως κινείται παράλληλα προς το σύρμα με την ίδια ταχύτητα $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d$.

A) Πώς το ελεύθερο ηλεκτρόνιο, θεωρώντας τον εαυτό του ακίνητο, θα βλέπει τα ηλεκτρόνια του σύρματος και πώς θα βλέπει να κινούνται τα θετικά ιόντα;

B) Αν σε ένα μήκος Δx, απέναντί του, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο βλέπει να υπάρχουν N ηλεκτρόνια στο σύρμα, σε πόσο μήκος θα βλέπει να υπάρχουν N θετικά ιόντα;

Γ) Στο ίδιο μήκος Δx θα βλέπει να υπάρχουν περισσότερα θετικά ιόντα από ηλεκτρόνια ή λιγότερα;

Δ) Βάσει των ανωτέρω εξηγήστε γιατί το (ακίνητο ως προς τον εαυτό του) ηλεκτρόνιο υφίσταται ολική ελκτική δύναμη με φορά προς το σύρμα.

E) Πώς ερμηνεύεται αυτή η ελκτική δύναμη από το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου (όπου τα θετικά ιόντα είναι ακίνητα και τα ηλεκτρόνια κινούνται);

4. _Ως αποτέλεσμα των μετασχηματισμών 5.11-5.13 του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, είναι εύκολο να επαληθευθεί με απλή αντικατάσταση, ότι οι ποσότητες_ $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ _και_ $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ _είναι αναλλοίωτες κατά Lorentz. Χρησιμοποιώντας την πληροφορία αυτή, απαντήστε στην εξής ερώτηση:_ (Απαιτούνται γενικές σκέψεις περί αναλλοιώτου και όχι ειδικές γνώσεις του 5ου κεφαλαίου).

Έστω ότι σε ένα σύστημα αναφοράς Σ ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει μόνο ηλεκτρικό πεδίο **E** (π.χ. γύρω από ένα ακίνητο φορτίο q), δηλαδή **B** = **0**. Υπάρχει κινούμενο σύστημα αναφοράς Σ΄ στο οποίο ένας (ακίνητος ως προς αυτό) παρατηρητής θα έβλεπε μόνο μαγνητικό πεδίο **B**΄ (δηλαδή **E**΄ = **0**);

(Κάθε άσκηση αντιστοιχεί σε μια βαθμολογική μονάδα, ενώ κάθε ερώτηση σε μισή)

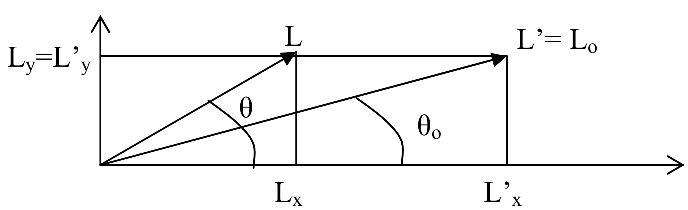
Λύσεις των ασκήσεων

1Α) Εργάζομαι με $\tau=ct$ και $\beta=\upsilon/c$. Έστω οτι η ταχύτητα του Σ' είναι υ, $\gamma=\gamma(\upsilon)$
$\tau_1'=\gamma(\tau_1-\beta x_1) = \tau_2'=\gamma(\tau_2-\beta x_2)$ ==> $\beta=(\tau_1-\tau_2)/(x_1-x_2)$, οπότε $\tau_1'= \tau_2'=\gamma(\tau_1-\beta x_1) =(\tau_2 x_1-\tau_1 x_2)/(x_1-x_2)$.
Εφαρμογή για $\tau_1 = x_0$, $x_1=x_0$, $\tau_2 = x_0/2$, $x_2=2x_0$, δίνει $\tau_1'= \tau_2'= 1.5\ x_0$ με $\beta=-0.5$ (ήτοι $\upsilon= -0.5c$, $t'=\sqrt{3}\ x_0/c$).
Β) $\upsilon=10^3$ m/s, $c=3\ 10^8$ m/s, $\beta=\upsilon/c= 3.33\ 10^{-6}$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2} = 1.0000000000055$ ==> γ=1
$\upsilon/c^2 = \beta/c = 1.11e\text{-}14$ s/m
Κατά σύμβασιν τα τονούμενα συστήματα κινούνται προς τα δεξιά:
$\{x' = \gamma(x-\upsilon t),\ t'= \gamma(t-\beta x/c)\}$ ==> $\{x' = (x-10^3\ t),\ t'= (t-1.11e\text{-}^{14}\ x)\}$ στο σύστημα S.I.
Αν x=1000m, t=1.5s ==> x΄= 1000(1-1.5) ==> $\boxed{x'=-500}$ (ο 500^{ος} επιβάτης πίσω από τον Ο'),
$t'= t(1-10^{-11}) = 1.5 * 0.99999999999$ s = 1.499999999985 s ==> $\boxed{t'=1.5\ s}$.
Αν x=1000m, t=1.0s ==> x΄= 1000(1-1.0) ==> $\boxed{x'=0}$ (ο οδηγός Ο'), $t'=t(1-10^{-11})$ ==> $\boxed{t' = 1.0\ s}$
Η υ είναι πολύ μικρή για να φανούν σχετικιστικά φαινόμενα.

2) Ο ιδιόχρονος του αστροναύτη είναι $\Delta\tau = \Delta t/\gamma$ όπου $\Delta t = 10$ h, ο αντίστοιχος χρόνος της Γής.
$1/\gamma^2=1- \upsilon^2/c^2 = 1\text{-}64/100 = 36/100 \Rightarrow 1/\gamma = 0.6$
$\Delta\tau = 0.6 * 10\ h = 6\ h = 6 * 60\ min = 6 * 60 * T_o / 20 = 18\ T_o$.
Μετά απο 1 T_o , $N_1 = 2\ N_o$
Μετά απο 2 T_o , $N_2 = 2\ N_1 = 2^2\ N_o$
Μετά απο 3 T_o , $N_3 = 2\ N_2 = 2^3\ N_o$. Δηλαδή $N(t) = N_o\ 2^{(t/T_o)}$
Αρα για $N_o = 2$ βακτηρίδια,
μετά απο $\Delta\tau = 6h = 18\ T_o$, $\boxed{N(\Delta\tau) = 2^{18}\ N_o = 2^{19} = 524288 \text{ βακτηρίδια } (500.000 \text{ βακτηρίδια})}$ και
μετά απο $\Delta t = 10h = 30\ T_o$, $\boxed{N(\Delta t) = 2^{30}\ N_o = 2^{31} = 2.147.483.647 \text{ βακτηρίδια} = 4.096\ N(\Delta\tau)}$.
Αν 500.000 βακτηρίδια χωρούν σε ένα δοκιμαστικό σωλήνα, τότε στη Γή θα γέμιζαν 4000 δοκιμαστικούς σωλήνες.

3) Α) $L' = L_0\sqrt{1-\beta^2} = 10^5\ .\ 1.4142\ .10^{-3} = 141.42$ έτη φωτός. Τότε t' = L'/υ = 141.42 έτη.
Β) $t = L/\upsilon = 10^5$ έτη.
Γ) Στο τέλος του χρόνου t (ως προς το Κ) και του χρόνου t' (ως προς το Κ') το φώς θα προηγείται αντίστοιχα κατά απόσταση $\chi = ct - \upsilon t = (1 - \beta)\ ct = 0.1$ έτος φωτός (ως προς το Κ), και $\chi' = ct' = 141.42$ έτη φωτός (ως προς το Κ').

4)



Α' Τρόπος: Η προβολή της ράβδου στον άξονα x συστέλλεται, στον άξονα y όχι.
$L_x = L'_x/\gamma$, $L_y=L'_y$, $\tan\theta_o=L'_y/L'_x$, $\tan\theta=L_y/L_x = L'_y/(L'_x/\gamma) = \boxed{\gamma \tan\theta_o > \tan\theta_o}$ (φαίνεται εστραμμένη πιο όρθια).
$L^2 = L_x^2 + L_y^2 = L'^2_x/\gamma^2 + L'^2_y = L'^2 (\cos^2\theta_o / \gamma^2 + \sin^2\theta_o) = L'^2 (\cos^2\theta_o (1- \upsilon^2/c^2) + \sin^2\theta_o)$ ==>
$\boxed{L=L_o(1-\upsilon^2/c^2 \cos^2\theta_o)^{1/2}}$.
Β' Τρόπος (με κατευθείαν υπολογισμό του συγχρονισμού)
Έστω ότι στο κινούμενο σύστημα Σ' για $t'_1=0$, το κάτω άκρον είναι στο $x'_1 =0,\ y'_1 =0,$ και **συγχρόνως** για $t'_2=0$ το άνω άκρον είναι στο $x'_2 = L'_x,\ y'_2 = L'_y$. Από τους μετασχηματισμούς Lorentz, εκείνη τη στιγμή, (δηλ. $t'_1= t'_2=0$) στο Σ το κάτω άκρον δείχνει $t_1=0\ x_1 =0,\ y_1 =0,$ και το άνω άκρον δείχνει
$t_2 = \gamma(t'_2 + \upsilon x'_2/c^2) = \gamma(0+ \upsilon L'_x /c^2) = \gamma\, \upsilon\, L'_x /c^2 > 0$, $x_2 = \gamma(x'_2 + \upsilon\, t'_2) = \gamma(L'_x +0) = \gamma L'_x$, και $y_2=y'_2 = L'_y$.
Αλλά, **<u>στο συγχρονισμό του Σ</u>**, μας ενδιαφέρει **πού ήταν το άνω άκρον την στιγμή $t_1=0$** (ή πού θα έχει πάει το κάτω άκρον την στιγμή $t_2 = \gamma\, \upsilon\, L'_x /c^2$) **: Ήταν $\upsilon(t_2 - t_1)$ πιο πίσω**, (ή το κάτω άκρον θα έχει προχωρήσει κατά $\upsilon(t_2 - t_1) = \upsilon t_2$.
Αρα το «σύγχρονο» μήκος $L_x = \mathbf{x_2 - \upsilon t_2} = \gamma L'_x - \upsilon\, \gamma\, \upsilon\, L'_x /c^2 = L'_x\, \gamma\, (1- \upsilon^2/c^2)$ =>
$L_x =L'_x/\gamma$, $L_y=L'_y$, κλπ όπως στον Α' τρόπο.

5) $\upsilon_{3\Gamma} = \dfrac{\upsilon_{31}+\upsilon_{1\Gamma}}{1+\upsilon_{31}\upsilon_{1\Gamma}/c^2} = \dfrac{\dfrac{\upsilon_{32}+\upsilon_{21}}{1+\upsilon_{32}\upsilon_{21}/c^2}+\upsilon_{1\Gamma}}{1+\dfrac{\upsilon_{32}+\upsilon_{21}}{1+\upsilon_{32}\upsilon_{21}/c^2}\upsilon_{1\Gamma}/c^2} = \dfrac{\upsilon_{32}+\upsilon_{21}+\upsilon_{1\Gamma}+\upsilon_{32}\upsilon_{21}\upsilon_{1\Gamma}/c^2}{1+\upsilon_{32}\upsilon_{21}/c^2+\upsilon_{32}\upsilon_{1\Gamma}/c^2+\upsilon_{21}\upsilon_{1\Gamma}/c^2}$

$\upsilon_{1\Gamma}$=600km/8h = 75km/h , υ_{21}=10m/s = 10 10^{-3} km/(1/3.600)h = 36 km/h , υ_{32}= 300 km/h .
Αρα $\boxed{\upsilon_{3\Gamma} = 411 \text{ km/h}}$.
Αν όμως ο επιβάτης δεν έριχνε βέλος, αλλά μια δέσμη LASER, υ_{32}=c, τότε στον τύπο του $\upsilon_{3\Gamma}$ αφού το c βγεί κοινός παράγων, ο αριθμητής με τον παρονομαστή απαλείφονται, και $\upsilon_{3\Gamma}$ =c.
Επίσης και αν υ_{32}=c, υ_{21}=c, πάλι $\upsilon_{3\Gamma}$ =c.

6) Α) Ως προς Σ: (Ο συμβολισμός f[υ] υποδηλώνει «f συνάρτηση του υ». Επίσης, χρησιμοποιούμε για απλούστευση της γραφής, c = 1, δηλαδή αντί για υ/c γράφουμε απλώς υ)
$\upsilon^{(+)} = \upsilon$
$\upsilon^{(-)} = -\upsilon$
$l^{(+)}[\upsilon] = l^{(-)}[-\upsilon] = l_o\,(1-\upsilon^2)^{1/2} = l_o/\gamma$.
$\iota^{(+)} = dq^{(+)}/dt = dq^{(+)}/dx\; dx/dt = +e / l^{(+)}[\upsilon]\;\; \upsilon = e\upsilon\,\gamma/ l_o$
$\iota^{(-)} = dq^{(-)}/dt = dq^{(-)}/dx\; dx/dt = -e / l^{(-)}[\upsilon]\;\; (-\upsilon) = e\upsilon\,\gamma/ l_o$
$\boxed{I= \iota^{(+)} + \iota^{(-)} = 2e\upsilon\,\gamma/ l_o}$

Β) Ως προς Σ' (τη Γή):
$\upsilon'^{(+)} = 0$
$l'^{(+)} = l_o$
$\upsilon'^{(-)} = -2\upsilon/(1+\upsilon^2)$ (επαλληλία της ταχύτητας του Σ ως προς Γη και του –υ ως προς Σ)
$l'^{(-)} = l_o / \gamma[\upsilon'^{(-)}] = l_o\,(1-\upsilon'^{(-)\,2})^{1/2}$.
Αλλά $1-\upsilon'^{(-)\,2} = 1-4\upsilon^2/(1+\upsilon^2)^2 = (1-\upsilon^2)^2/(1+\upsilon^2)^2$
Οπότε $l'^{(-)} = l_o\;(1-\upsilon^2)/(1+\upsilon^2)$
Αρα $I' = \iota'^{(-)} = dq^{(-)}/dt' = dq^{(-)}/dx'\; dx'/dt' = -e / l'^{(-)}[\upsilon']\;\; (-\upsilon') =$
$= e /[\, l_o\;(1-\upsilon^2)/(1+\upsilon^2)]\; [2\upsilon/(1+\upsilon^2)] = 2e\upsilon\,\gamma^2/ l_o \Longrightarrow \boxed{I' = I\,\gamma}$.

7) Έστω p^μ_1, p^μ_2, p^μ_e, αντιστοίχως, τα τετρανύσματα των ορμών του εισερχομένου φωτονίου, του εξερχομένου φωτονίου και του εξερχομένου ηλεκτρονίου, στο αδρανειακό σύστημα του (ακινήτου) ηλεκτρονίου με p^μ_o. Έστω (χ,ψ) το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα των τριών ορμών **$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_e$.** Στο σύστημα μονάδων h = c = 1 , αν **υ** η ταχύτητα του εξερχομένου ηλεκτρονίου, οπότε $\boxed{\gamma^2 - \gamma^2\upsilon^2 = 1 \text{ (ΒΣ)}}$, έχουμε: Όλες οι z-συνιστώσες = 0. Επίσης:
$p^\tau_1 = E_1 = h\nu_1 = hc/\lambda_1 = 1/\lambda_1$, $p^\tau_e = m = \gamma m_o$, και $p^\tau_o = m_o$
$p^\chi_1 = E_1/c = E_1 = 1/\lambda_1$, $p^\chi_2 = E_2 \cos\theta = (1/\lambda_2)\cos\theta$, $p^\chi_e = m\,\upsilon_\chi = m_o\gamma\,\upsilon\cos\varphi$, και $p^x_o = 0$
$p^\psi_1 = 0$, $p^\psi_2 = E_2 \sin\theta$, $p^\psi_e = m\,\upsilon_\psi = m_o\gamma\,\upsilon \sin\varphi$, και $p^\psi_o = 0$
Αν $\varepsilon = E / m_o$,

$$p^\mu_1 + p^\mu_o = p^\mu_2 + p^\mu_e \Longrightarrow \begin{array}{ll} E_1 + m_o = E_2 + m_o\,\gamma & \Longrightarrow \gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1 \\ E_1 + 0 = E_2\cos\theta + m_o\gamma\,\upsilon\cos\varphi & \Longrightarrow \gamma\,\upsilon\cos\varphi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2\cos\theta \\ 0 + 0 = E_2\sin\theta + m_o\gamma\,\upsilon\sin\varphi & \Longrightarrow \gamma\,\upsilon\sin\varphi = -\,\varepsilon_2\sin\theta \end{array}$$

Τετραγωνίζω και αντικαθιστώ στη ΒΣ, απαλείφονται τα $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 1$, διαιρώ δια 2 και έχω:
$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (1-\cos\theta)\,\varepsilon_1\varepsilon_2 \Longrightarrow \varepsilon_2 = 1/(1-\cos\theta + 1/\varepsilon_1)$
$\cot\varphi = (1+\varepsilon_1)\tan(\theta/2)$, και $K/ m_0 = (\gamma-1) = \varepsilon_1/(1+1/(\varepsilon_1\,(1-\cos\theta)))$

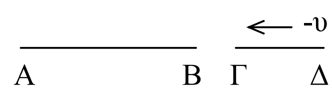
8) $p^\mu_1 + p^\mu_2 = p^\mu_3 + p^\mu_4$
Διατήρηση της ορμής: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 \Rightarrow \upsilon_3 = \upsilon_4 \Rightarrow \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma$.
Διατήρηση της ενέργειας: $M_0 + M_0 = \gamma m_0 + \gamma m_0$ (αν θεωρήσουμε τον x αξονα κατά την διεύθυνση της κινήσεως.) Αρα $\gamma = M_0/m_0 = 135/938 = 6.948 \Longrightarrow \upsilon = c\sqrt{(\gamma^2-1)}/\gamma = 0.9896$ c .
Είναι: $c^2p^2_3 = E^2_3 - (m_0c^2)^2 \Longrightarrow p^2_3 = m^2_0\, c^2\,(\gamma^2-1) = (M_0^2 - m_0^2)c^2$
$\Longrightarrow p_3 = \sqrt{938^2 - 135^2}$ MeV/c = 928.23MeV/c.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις

1) A) O'M' είναι η απόσταση της μύγας από το O' στο συγχρονισμό του Σ', ενώ το O΄M μετράται στο συγχρονισμό του Σ και οι δύο συγχρονισμοί δεν συμπίπτουν.
Ομοίως το $OM_{(\Sigma)}$ στο συγχρονισμό του Σ δεν συμπίπτει με το $OM'_{(\Sigma')}$ στο συγχρονισμό του Σ'.
B) Το O' ως προς το Σ κινείται με ταχύτητα υ, άρα $OO'_{(\Sigma)} = \upsilon t$. Το O ως προς το Σ' κινείται με ταχύτητα $\upsilon' = -\upsilon$, άρα $OO'_{(\Sigma')} = -\upsilon t'$.
Κάθε μήκος ηρεμίας, μετρούμενο από κινούμενο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, βρίσκεται, στο συγχρονισμό αυτού του συστήματος, οτι είναι μικρότερο $L=L_0(1-v^2/c^2)^{1/2}$.

2) Δεν υπάρχει παράδοξο διότι η αλληλουχία των γεγονότων γίνεται σε διαφορετικούς χρόνους στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
Στα παρακάτω χρησιμοποιούνται το χ αντί του x για τη συντεταγμένη θέσης και το τ = ct .
Επίσης το υ, αντί του β = υ /c.

Ως προς τη Γή (Σ) το δόρυ $AB_{(\Sigma)}$ = 4m και τό δωμάτιο $\Gamma\Delta_{(\Sigma)}$ = 4m .
Ως προς το δόρυ (Σ') το δόρυ $AB_{(\Sigma')}$ = 5m = γ (4m) ==> γ = 5/4
==> υ = 3/5 (και $\Gamma\Delta_{(\Sigma')}$ = (4m).4/5 = 16/5 m = 3.2 m)



Αρα χ' = (5χ – 3τ)/4 , τ' = (5τ – 3χ)/4 (ML)
και χ = (5χ' + 3 τ')/4 , τ = (5τ' + 3χ')/4.

Καθώς πλησιάζουν (κατά μήκος του άξονα χ) έχουμε τα εξής συμβάντα:
α) Το B ταυτίζεται με το Γ (που συμβολίζω με B→Γ για το Σ, και B←Γ για το Σ')
β) B→Δ ή B←Δ , γ) A→Γ ή A←Γ , δ) A→Δ ή A←Δ

Εστω Γ η αρχή των αξόνων του Σ (χ_Γ **:=** 0), και B του Σ' (χ'_B **:=** 0) και έστω οτι το πείραμα (η χρονομέτρηση) αρχίζει οταν το B ταυτίζεται με το Γ ($\tau_{B\to\Gamma} = 0$) και ($\tau'_{B\leftarrow\Gamma} = 0$)

Τότε ως προς Σ έχω:
α) B→Γ : {$\chi_{B\to\Gamma} = 0$, $\tau_{B\to\Gamma} = 0$}
β) B→Δ : {$\chi_{B\to\Delta} = 4$, $\tau_{B\to\Delta}$ = ΓΔ/υ = 4/(3/5) = 20/3 = 6.66}
γ) A→Γ : {$\chi_{A\to\Gamma} = 0$, $\tau_{A\to\Gamma}$ = AB/υ = 4/(3/5) = 20/3 = 6.66} δηλαδή ταυτόχρονα με το B→Δ
δ) A→Δ : {$\chi_{A\to\Delta} = 4$, $\tau_{A\to\Gamma}$ = AΔ/υ = 8/(3/5) = 40/3 = 13.3}.
[Δηλαδή όταν τ=0 ανοίγει η πύλη Γ, όταν τ=6.66 ανοίγει η Δ και συγχρόνως κλείνει η Γ, και όταν τ=13.3 κλείνει η Δ.]

Οπότε, από (ML), ως προς Σ' έχω:
α) B←Γ : {$\chi'_{B\leftarrow\Gamma} = 0$, $\tau'_{B\leftarrow\Gamma} = 0$)
β) B←Δ : {$\chi'_{B\leftarrow\Delta}$ = (5 (4) – 3 (20/3))/4 = 0, $\tau'_{B\leftarrow\Delta}$ = (5 (20/3) – 3 (4))/4 = 16/3 = 5.33}
γ) A←Γ : {$\chi'_{A\leftarrow\Gamma}$ = (5 (0) – 3 (20/3))/4 = -5, $\tau'_{A\leftarrow\Gamma}$ = (5 (20/3) – 3 (0))/4 = 25/3 = 8.33}
δ) A←Δ : {$\chi'_{A\leftarrow\Delta}$ = (5 (4) – 3 (40/3))/4 = -5, $\tau'_{A\leftarrow\Delta}$ = (5 (40/3) – 3 (4))/4 = 41/3 = 13.66}
[Δηλαδή όταν τ'=0 ανοίγει η πύλη Γ, όταν τ'=5.33 ανοίγει η Δ ενώ η Γ είναι ανοικτή, όταν τ'=8.33 κλείνει η Γ, και όταν τ'=13.66 κλείνει η Δ.]
Αξίζει να σχεδιάσει κανείς τα συμβάντα σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα (τ,χ), (τ',χ').

3) A) Θα βλέπει τα ηλεκτρόνια ακίνητα μπροστά του, ενώ τα πρωτόνια να κινούνται με αντίθετη ταχύτητα.
B) Τα N (αντιθέτως κινούμενα) θετικά ιόντα θα καταλαμβάνουν μήκος μικρότερο: $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$.
Γ) Άρα στο ίδιο μήκος Δx θα βλέπει N ηλεκτρόνια και περισσότερα N_θ (> N) θετικά ιόντα .
Δ) Θα υφίσταται την άπωση των N ηλεκτρονίων και την (μεγαλύτερη) έλξη των N_θ θετικών ιόντων.
Δηλαδή η συνισταμένη θα είναι έλξη.
E) Ως προς το εργαστήριο, το ηλεκτρόνιο, κινούμενο μέσα στο μαγνητικό πεδίο που υπάρχει γύρω από το σύρμα, υφίσταται έλξη προς το σύρμα κατά Lorentz: F=euB.

4) Επειδή $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2$ **,** θα έπρεπε $0 - c^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - 0$, όπερ αδύνατον.