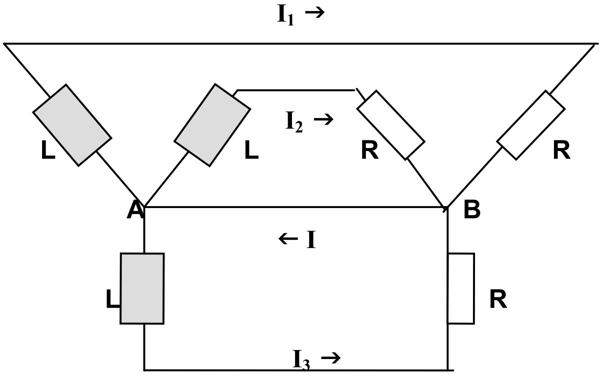
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1η Άσκηση



$$E_1 = V_0 \sin(\omega t)$$
$$E_2 = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$E_3 = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Θεωρούμε ότι το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγούς του κυκλώματος έχει τη φορά έχει τη φορά που είναι σημειωμένη στο παραπάνω σχήμα.

Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$I = I_1 + I_2 + I_3$ *(1)*

Όμως για το I_1 ισχύει: $I_1 = \frac{E_1}{R} \Leftrightarrow I_1 = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t)$ *(2)*

για το I_2 ισχύει: $I_2 = \frac{E_2}{R} \Leftrightarrow I_2 = \frac{V_0}{R}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ *(3)*

για το I_3 ισχύει: $I_3 = \frac{E_3}{R} \Leftrightarrow I_3 = \frac{V_0}{R}\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$ *(4)*

Οι σχέσεις *(2)*, *(3)* και *(4)* προκύπτουν λόγω των E_1, E_2 και E_3 έτσι όπως δίνονται από την εκφώνηση της άσκησης, με αντικατάσταση στη σχέση $I = \frac{E}{R}$ για κάθε μια από τις περιπτώσεις των I_1, I_2 και I_3.

Παρατηρούμε ότι μεταξύ των σχέσεων *(2)*, *(3)* και *(4)* *υπάρχει διαφορά φάσεως* $\theta = \frac{2\pi}{3}$*, λόγω του ότι τα τρία* πηνία του σχήματος κείται στο επίπεδο και σχηματίζουν διαδοχικά γωνία 120^{o}.

Λαμβάνοντας τις *(2)*, *(3)* και *(4)* ως ηλεκτρικές ταλαντώσεις, διαπιστώνουμε πως το πλάτος των ταλαντώσεων αυτών είναι $A = \frac{V_0}{R}$.

Γνωρίζουμε ότι στη σύνθεση πολλών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια συχνότητα ισχύει η σχέση:

$B = A\frac{\sin\left(\frac{n\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$ *(5)* , όπου B είναι το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης, A είναι το πλάτος των συνιστωσών ταλαντώσεων, n είναι το πλήθος των ταλαντώσεων και δ είναι η μεταξύ του γωνία.

Με αντικατάσταση στη σχέση *(5)* των δεδομένων της άσκησης έχουμε:

όπου $B = I$ αφού από την *(1)* έχουμε $I = I_1 + I_2 + I_3$

$$A = \frac{V_0}{R}$$
$$n = 3$$
$$\delta = 120^o \text{ ή } \delta = \frac{2\pi}{3}$$

οπότε: $I = \dfrac{V_0}{R}\dfrac{\sin\left(\frac{3\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)} \Leftrightarrow I = \dfrac{V_0}{R}\dfrac{\sin(\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow I = \dfrac{V_0}{R}\dfrac{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow I = 0$

Άρα αφού προκύπτει ότι $I = 0$, τότε ο αγωγός ΑΒ δεν διαρρέεται από ρεύμα.

2η Άσκηση

Γνωρίζουμε πως οι εικόνες Lissajous του σχήματος **2.22**, αναφέρονται σε δύο κάθετες αρμονικές ταλαντώσεις με διαφορά φάσεων $\Delta\phi = 90^o$ ή $\Delta\phi = \dfrac{\pi}{2}$, δηλαδή έχουμε σύνθεση ταλαντώσεων με άνισες συχνότητες.
Έτσι για τις δύο κάθετες ταλαντώσεις έχουμε τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις:

$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_x) \qquad \text{και} \qquad y = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_y)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \Leftrightarrow \omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega$

για $\phi_x = 0$ και $\phi_y = \dfrac{\pi}{2}$ οι κυματοσυναρτήσεις γράφονται:

$$x = A_1\cos\omega t \quad (1) \qquad \text{και} \qquad y = A_2\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

όμως λόγω τριγωνομετρίας έχουμε: $y = A_2\cos\left(2\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -A_2\sin(2\omega t) = -2A_2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ *(3)*

Λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ οι σχέσεις *(1)* και *(3)* γράφονται:

$$x = A_1\cos\omega t \Leftrightarrow \frac{x}{A_1} = \cos\omega t \Leftrightarrow \frac{x^2}{A_1^2} = \cos^2\omega t \qquad (4)$$

$$y=-2A_2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\Leftrightarrow\frac{y}{2A_2}=-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\Leftrightarrow\frac{y^2}{4A_2^2}=\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t)\Leftrightarrow$$
$$\frac{y^2}{4A_2^2}=\sin^2(\omega t)\frac{x^2}{A_1^2}\Leftrightarrow\frac{y^2}{4A_2^2}\frac{A_1^2}{x^2}=\sin^2(\omega t)\Leftrightarrow\frac{y^2}{x^2}\frac{A_1^2}{4A_2^2}=\sin^2(\omega t) \qquad (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις *(4)* και *(5)* έχουμε:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{A_1^2}{4A_2^2}=\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)\Leftrightarrow\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{x^2}\frac{A_1^2}{4A_2^2}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{x^2}\frac{A_1^2}{4A_2^2}=1-\frac{x^2}{A_1^2}\Leftrightarrow$$
$$y^2=\frac{4A_2^2}{A_1^2}x^2\left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\frac{2A_2}{A_1}x\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση τροχιάς.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε πως το διάνυσμα της σύνθετης κίνησης περιορίζεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $2A_1$ και $2A_2$, κατά άξονα x και y αντίσταοιχα.

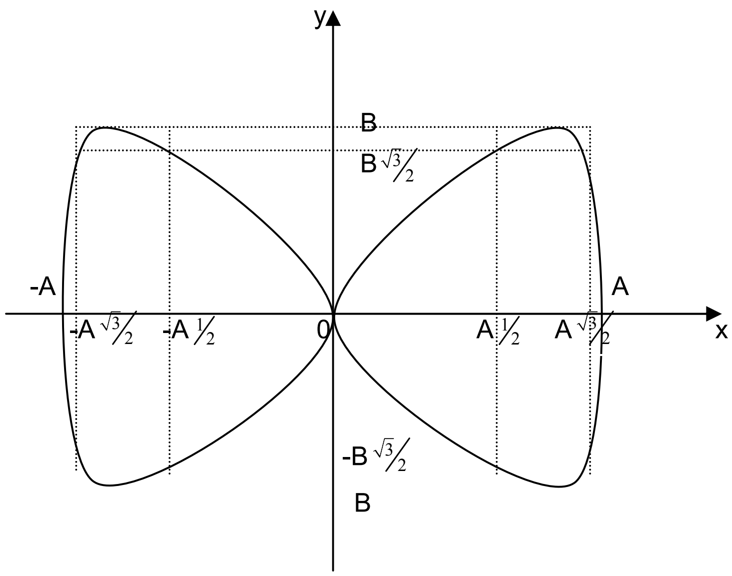
Η εικόνα διαγράφεται από το κινητό σε 12s, δηλαδή για ολοκλήρωση διαδρομής ίσης με 2π (ένας κύκλος) απαιτούνται 12s, έτσι $T\omega=2\pi\Leftrightarrow12\omega=2\pi\Leftrightarrow\omega=\frac{2\pi}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}=\omega_1$

Αφού $2\omega_1=\omega_2\Leftrightarrow\omega_2=\frac{2\pi}{6}\Leftrightarrow\omega_2=\frac{\pi}{3}$

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις $x=A_1\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ και $y=A_2\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)$

που με αντικατάσταση για κάθε ακέραιο sec δίνουν:

Για $t=0$ τότε $x=A$ και $y=0$
Για $t=1$ τότε $x=A\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y=-B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=2$ τότε $x=A\frac{1}{2}$ και $y=-B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=3$ τότε $x=0$ και $y=0$
Για $t=4$ τότε $x=-A\frac{1}{2}$ και $y=B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=5$ τότε $x=-A\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y=B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=6$ τότε $x=-A$ και $y=0$
Για $t=7$ τότε $x=-A\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y=-B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=8$ τότε $x=-A\frac{1}{2}$ και $y=-B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=9$ τότε $x=0$ και $y=0$
Για $t=10$ τότε $x=A\frac{1}{2}$ και $y=B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=11$ τότε $x=A\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y=B\frac{\sqrt{3}}{2}$
Για $t=12$ τότε $x=A$ και $y=0$



3η Άσκηση

Σχέση *(3.27)* $$x(t)=\frac{F_0\cos(\omega t-\delta)}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$$

Σχέση *(3.22)* $$A_{\varepsilon\lambda\sigma\tau}=\mathrm{Re}\,\widehat{\mathrm{A}}=\frac{F_0}{m}\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}$$ (ελαστικό πλάτος ή πλάτος διασποράς)

Σχέση *(3.23)* $$A_{\alpha\pi\rho\varphi}=\mathrm{Im}\,\widehat{\mathrm{A}}=-\frac{F_0}{m}\frac{(\gamma\omega)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}$$ (απορροφητικό πλάτος)

Από τις σχέσεις *(3.22)* και *(3.23)* βλέπουμε ότι η γωνία φάσεως του πλάτους $\widehat{\mathrm{A}}_1$ δίνεται από τη σχέση:

$$\tan(\theta)=\tan(-\delta)=\frac{\mathrm{Im}\,\widehat{\mathrm{A}}}{\mathrm{Re}\,\widehat{\mathrm{A}}}=-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) ορίσαμε το σύμβολο δ να δηλώνει το αντίθετο της πολικής γωνίας θ ($\theta=-\delta$) ώστε να γράψουμε το μιγαδικό πλάτος ως $\hat{x}=\left|\widehat{\mathrm{A}}\right|e^{i(\omega t-\delta)}$.
Με τον τρόπο αυτό, η φάση δ υποδηλώνει την υστέρηση φάσης της μετατόπισης συγκριτικά με τη φάση της οδηγούσας δύναμης (ωt).

Μπορούμε έτσι να γράψουμε:

$$\widehat{\mathrm{A}} \equiv \left|\widehat{\mathrm{A}}\right| e^{-i\delta} = \frac{F(\omega)}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} e^{-i\delta} = A(\omega) e^{-i\delta} \qquad (2)$$

και $$\hat{x} = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} e^{-i(\omega t-\delta)} \qquad (3)$$

οπότε η τελική λύση για την απομάκρυνση x (και το πλάτος $A(\omega)$ σαν συνάρτηση του χρόνου), είναι το πραγματικό μέρος της *(3)*, δηλαδή $$x(t) = \frac{F_0\cos(\omega t-\delta)}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad (4)$$

όπου η διαφορά φάσης δ δίνεται (με βάση την *(1)*) από τη σχέση $\delta_{(\omega)} = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ *(5)*

Από τη σχέση *(5)* έχουμε

$$\tan\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta} = \frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2\delta}{\cos^2\delta} = \frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2\delta}-1 = \frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}-1 \Leftrightarrow \cos^2\delta = \frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{(\gamma\omega)^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\gamma\omega)^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}} \qquad (6)$$

Ισχύει ότι $\sin\delta = \sqrt{1-\cos^2\delta} \Leftrightarrow \sin\delta = \sqrt{1-\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{(\gamma\omega)^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$ *(7)*

Εάν αναπτύξουμε το συνημίτονο $\omega t-\delta$ της σχέσης *(3.27)* θα εμφανιστούν δύο συνιστώσες της απομάκρυνσης:

$$x(t) = \frac{F_0\cos\omega t\cos\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} + \frac{F_0\sin\omega t\sin\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad (8)$$

Με αντικατάσταση των (6) και (7) στην (8) έχουμε μετά την εκτέλεση των πράξεων:

$$x(t) = \frac{F_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}\cos\omega t + \frac{F_0\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}\sin\omega t \qquad (9)$$

διαπιστώνουμε δηλαδή ότι περιέχουν αντίστοιχα το ελαστικό πλάτος $A_{\varepsilon\lambda\sigma\tau}$ *(3.22)* και το απορροφητικό πλάτος $A_{\alpha\pi\rho\phi}$ *(3.23)*

Με αυτούς τους ορισμούς η σχέση *(9)* γράφεται

$x(t) = A_{\varepsilon\lambda\sigma\tau}\cos(\omega t) + A_{\alpha\pi\rho\phi}\sin(\omega t)$ σχέση *(3.30)*

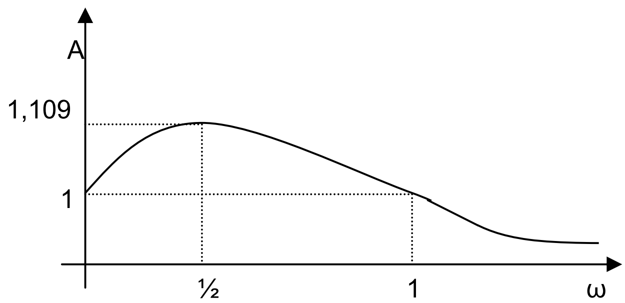
Η σχέση *(2.27)*: $x(t) = \dfrac{F_0\cos(\omega t - \delta)}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}$ για τις τιμές $F_0 = 1N$, $m = 1Kg$, $\omega_0 = 1s^{-1}$ και $\gamma = 1s^{-1}$

γράφεται $x(t) = \dfrac{\cos(t - \delta)}{\left[\left(1 - \omega^2\right)^2 + (\omega)^2\right]^{1/2}}$ και το δ γράφεται $\delta = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{1 - \omega^2}$

Από τη σχέση *(3.27)* έχουμε δύο όρους, που λόγω των δεδομένων τιμών παίρνουν μορφή:

$$A = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\left[\left(1 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\right]^{1/2}}$$

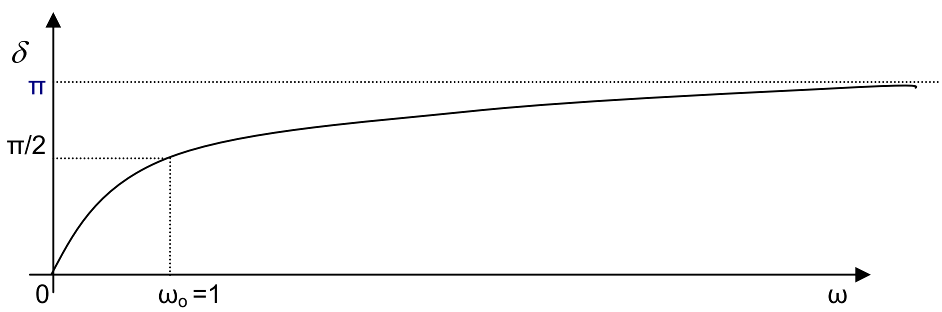
ο οποίος αποδίδεται από το σχήμα:



Για ω=0 τότε A=1
Για ω= ½ τότε A=1,109
Για ω=1 τότε A=1
Για ω=3/2 τότε A=0,51
Για ω=2 τότε A=0,27

για να πάρουμε το $\omega_{\max}$ θα πρέπει η παράγωγος $\dfrac{\partial A}{\partial \omega}$ να είναι μηδέν , δηλαδή $\dfrac{\partial A}{\partial \omega} = 0 \Leftrightarrow \omega_{\max} = 1/2$

Ο δεύτερος όρος είναι το δ που γράφεται $\delta = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{1 - \omega^2}$ και αποδίδεται από το σχήμα:



για το οποίο έχουμε:

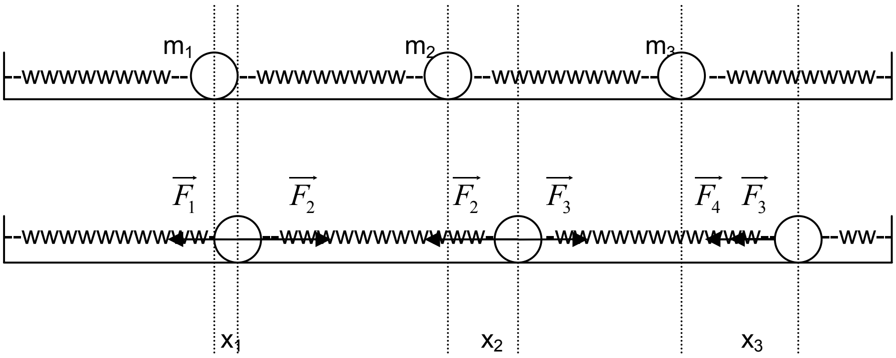
Όταν $\omega \to \infty$ τότε $\delta \simeq \pi$ άρα οι διαφορά φάσης μεταξύ εξωτερικής δύναμης και ταλάντωσης είναι 180°.

Όταν $\omega = \omega_0 = 1$ τότε το $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ και

Όταν $\omega = \omega_{\max}$ τότε το $\delta = \tan^{-1}\dfrac{2}{3}$

Παρατηρούμε πως όταν το $\gamma \to 0$ η μεταβολή της καμπύλης γίνεται όλο και πιο απότομη, ενώ για $\gamma = 0$ η μεταβολή γίνεται ακαριαία από μηδέν σε π, στο $\omega = \omega_0$.

4^{η} Άσκηση



(αρχική «θέση ισορροπίας»)

(τελική θέση)

Γνωρίζουμε πως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι: κάθε συνιστώσα του συστήματος να εκτελεί ταλάντωση με την ίδια συχνότητα, η οποία είναι και η αντίστοιχη κανονική ταλάντωση.

Επειδή οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ανεξάρτητες ταλαντώσεις, δεν ανταλλάσσουν ενέργεια μεταξύ τους και οι απομακρύνσεις τους μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Έτσι εάν θεωρήσουμε ότι για μία δεδομένη χρονική στιγμή η απομάκρυνση του πρώτου σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι x_1, του δεύτερου x_2 και του τρίτου x_3 και δεχτούμε τώρα ότι $x_1 \prec x_2 \prec x_3$, η δύναμη που θα ασκείτε στο κάθε σώμα θα είναι αντίστοιχα (κατά μέτρο):

$F_1 = kx_1$, $\quad F_2 = k(x_2 - x_1)$, $\quad F_3 = k(x_3 - x_2)$, $\quad F_4 = kx_3$

και η εξίσωση κίνησης για κάθε σώμα θα είναι:

Για το 1° σώμα:

$$\begin{aligned} & m\ddot{x}_1 = -F_1 + F_2 \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 + F_1 - F_2 = 0 \Leftrightarrow \\ & m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Για το 2° σώμα:

$$m\ddot{x}_2 = -F_2 + F_3 \Leftrightarrow m\ddot{x}_2 + F_2 - F_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$m\ddot{x}_2 + k\left(x_2 - x_1\right) - k\left(x_3 - x_2\right) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - k\left(x_1 + x_3\right) = 0 \qquad (2)$$

Για το 3$^{\text{ο}}$ σώμα:

$$m\ddot{x}_3 = -F_3 - F_4 \Leftrightarrow m\ddot{x}_3 + F_3 + F_4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$m\ddot{x}_3 + k\left(x_3 - x_2\right) - kx_3 = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}_3 + 2kx_3 - kx_2 = 0 \qquad (3)$$

Αφού η μέθοδος αναζήτησης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης βασίζεται στο ότι το σύστημα ακολουθεί έναν τρόπο ταλάντωσης, τότε κάθε συνιστώσα του συστήματος εκτελεί ταλάντωση με την ίδια συχνότητα, την κανονική συχνότητα ταλάντωσης. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε την (ή τις) κανονική συχνότητα ταλάντωσης αναγνωρίζοντας λύσεις για τις *(1)*, *(2)* και *(3)* της μορφής:

$$x_1 = A_1 \cos\omega t$$
$$x_2 = A_2 \cos\omega t$$
$$x_3 = A_3 \cos\omega t$$

θέτοντας την αρχική φάση ίση με το μηδέν. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης *(1)*, *(2)* και *(3)* βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} -m\omega A_1 \cos\omega t + 2kA_1 \cos\omega t - kA_2 \cos\omega t = 0 \\ -m\omega^2 A_2 \cos\omega t + 2kA_2 \cos\omega t - k\left(A_1 + A_3\right)\cos\omega t = 0 \\ -m\omega^2 A_3 \cos\omega t + 2kA_3 \cos\omega t - kA_2 \cos\omega t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \left(2k - m\omega^2\right)A_1 & -kA_2 & \\ -kA_1 & \left(2k - m\omega^2\right)A_2 & -kA_3 \\ & -kA_2 & \left(2k - m\omega^2\right)A_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Για να έχει λύση αυτό το σύστημα θα πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(2k - m\omega^2\right)\left[\left(2k - m\omega^2\right)^2 - k^2\right] + k\left[\left(-k\right)\left(2k - m\omega^2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(2k - m\omega^2\right)\left[\left(2k - m\omega^2\right)^2 - k^2 - k^2\left(2k - m\omega^2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left(2k - m\omega^2\right)\left(2k - m\omega^2 + \sqrt{2}k\right)\left(2k - m\omega^2 - \sqrt{2}k\right) = 0$$

Οπότε έχουμε:

Εάν $\left(2k - m\omega^2\right) = 0$ τότε $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

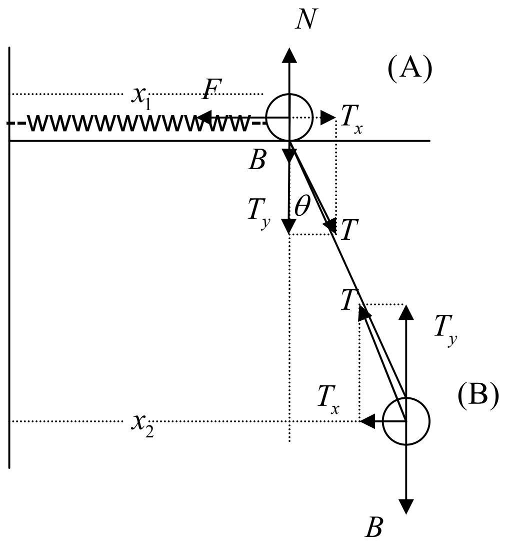
Εάν $\left(2k - m\omega^2 + \sqrt{2}k\right) = 0$ τότε $\omega_2 = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$ και

Εάν $\left(2k - m\omega^2 - \sqrt{2}k\right) = 0$ τότε $\omega_3 = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$

Η διάταξη και αρίθμηση των συχνοτήτων πρέπει να είναι από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη.

Δηλαδή:
$\omega_1 \to \omega_2$
$\omega_2 \to \omega_3$
$\omega_3 \to \omega_1$

5η Άσκηση



(Αρχική Θέση Ισορροπίας)

(Το σώμα έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας κατά $x = x_2 - x_1$)

Για το σώμα (Α) στον άξονα των x ισχύει:

$$m\ddot{x}_1 = T_x - F \Leftrightarrow m\ddot{x}_1 = T\sin\theta - kx_1 \qquad (1)$$

και στον άξονα των y ισχύει:

$$\sum \vec{F_y} = 0 \Leftrightarrow N = B + T_y \Leftrightarrow N = mg + T\cos\theta \qquad (2)$$

Για το σώμα (Β) στον άξονα των x ισχύει:

$$m\ddot{x}_2 + T\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

και στον άξονα των y ισχύει:

$$mg = T\cos\theta \Leftrightarrow T \simeq mg \qquad (4)$$ (αφού θ πολύ μικρή, $\theta \simeq 0$)

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε:

$$\sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{L} \qquad (5)$$

Άρα με αντικατάσταση των *(4)* και *(5)* στις *(1)* και *(3)* έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} & mg\frac{x_2 - x_1}{L} - kx_1 = m\ddot{x}_1 \\ & \text{και} \\ & m\ddot{x}_2 + \frac{mg}{L}\left(x_2 - x_1\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} & \ddot{x}_1 + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)x_1 - \frac{g}{L}x_2 = 0 \qquad (6) \\ \\ & \ddot{x}_2 + \frac{g}{L}x_2 - \frac{g}{L}x_1 = 0 \qquad (7) \end{aligned}$$

Αφού η μέθοδος αναζήτησης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης βασίζεται στο ότι το σύστημα ακολουθεί τρόπο ταλάντωσης κοινό, τότε κάθε συνιστώσα του συστήματος εκτελεί ταλάντωση με την ίδια (κανονική) συχνότητα ταλάντωσης.

Μπορούμε έτσι να βρούμε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης, αναζητώντας λύσεις για τις (6) και (7) εξισώσεις κίνησης της μορφής:

$x_1 = A_1\cos\omega t$ και $x_2 = A_2\cos\omega t$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} & -\omega^2 A_1\cos\omega t + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)A_1\cos\omega t - \frac{g}{L}A_2\cos\omega t = 0 \\ & -\omega^2 A_2\cos\omega t + \frac{g}{L}A_2\cos\omega t - \frac{g}{L}A_1\cos\omega t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)A_1 - \frac{g}{L}A_2 = 0 \\ & -\frac{g}{L}A_1 + \left(\frac{g}{L} - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Για να έχει λύση αυτό το σύστημα θα πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{g}{L} \\ -\frac{g}{L} & \frac{g}{L} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{L} - \omega^2\right) - \left(-\frac{g}{L}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{g^2}{L^2} + \frac{gk}{mL} - \frac{g\omega^2}{L} - \frac{g\omega^2}{L} - \frac{k\omega^2}{m} + \omega^4 - \frac{g^2}{L^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m}\frac{g}{L} - 2\frac{g}{L}\omega^2 - \frac{k\omega^2}{m} + \omega^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{k}{m}\frac{g}{L} - \left(2\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\omega^2 + \omega^4 = 0$$

ή

$$\omega^2=\frac{\frac{k}{m}+2\frac{g}{L}\pm\sqrt{\left(2\frac{g}{L}+\frac{k}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}\frac{g}{L}}}{2}\Leftrightarrow\omega^2=\frac{\frac{k}{m}+2\frac{g}{L}\pm\sqrt{\left(2\frac{g}{L}+\frac{k}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}\frac{g}{L}}}{2}$$

$$\omega^2=\frac{\frac{k}{m}+2\frac{g}{L}\pm\sqrt{4\frac{g^2}{L^2}+\frac{k^2}{m^2}}}{2}\Leftrightarrow\omega^2=\frac{k}{2m}+\frac{g}{L}\pm\sqrt{\frac{g^2}{L^2}+\frac{k^2}{4m^2}}\Leftrightarrow$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{2m}+\frac{g}{L}+\sqrt{\frac{g^2}{L^2}+\frac{k^2}{4m^2}}}$$

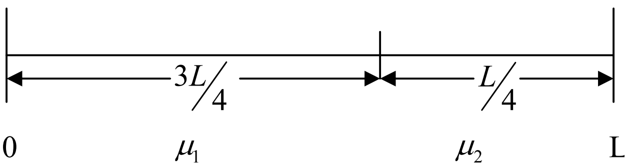
$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{2m}+\frac{g}{L}-\sqrt{\frac{g^2}{L^2}+\frac{k^2}{4m^2}}}$$

όπου $\sqrt{\frac{g}{L}}=\omega_0$

Οι ω_1 και ω_2 είναι οι δύο συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (για μικρές απομακρύνσεις) οι οποίοι μπορούν να αναπτυχθούν όταν το επάνω σώμα δεν είναι πακτωμένο.

Στην περίπτωση που το επάνω σώμα είναι πακτωμένο το εκκρεμές θα εκτελούσε ταλάντωση με συχνότητα $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}$.

6η Άσκηση



Κάθε κομμάτι εκτελεί Κ.Τ.Τ. και σύμφωνα με την 5.86 σελ.253 του Α' μέρους «Ταλαντώσεις & κύματα», Α.Ζδέτση, και τη χρονική εξάρτηση της 5.83, θα έχουμε:

$$(1)\begin{cases} y_1(x,t)=\left[A\cos(k_1x)+B\sin(k_1x)\right]\cos(\omega t+\phi) \\ y_2(x,t)=\left\{\Gamma\cos\left[k_2(L-x)\right]+\Delta\sin\left[k_2(L-x)\right]\right\}\cos(\omega t+\phi)\end{cases}$$

(η χρήση του (L-x) στην y_2 διευκολύνει τις πράξεις)
επίσης από 5.81 και 5.85, <u>αφού το ω είναι κοινό</u>,

$$\omega=k_1\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}=k_2\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}=k_2\sqrt{\frac{T}{9\mu_1}}\Rightarrow k_2=3k_1 \quad (2)$$

Συνοριακές συνθήκες:

(α) $y_1(0,t)=0 \Rightarrow A=0$

(β) $y_2(L,t)=0 \Rightarrow B=0$ (σταθερά τα x=0, L)

(γ) $y_1\left(\frac{3L}{4},t\right)=y_2\left(\frac{3L}{4},t\right)$ (συνέχεια της απομάκρυνσης στο $x=\frac{3L}{4}$)

$\Rightarrow B\sin\frac{3k_1L}{4}=\Delta\sin\frac{3k_2L}{4}=\Delta\sin\frac{3k_1L}{4}$

(δ) $\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\frac{3L}{4}}=\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{\frac{3L}{4}} \Rightarrow Bk_1\cos\frac{3k_1L}{4}=-\Delta k_2\cos\frac{k_2L}{4} \Rightarrow Bk_1\cos\frac{3k_1L}{4}=-3k_1\Delta\cos\frac{3k_1L}{4}$

(συνέχεια της κλίσης στο $x=\frac{3L}{4}$)

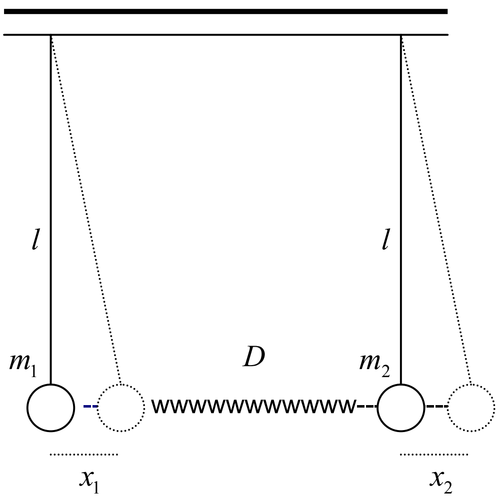
$\Rightarrow (\mathrm{B}-\Delta)\sin\frac{3k_1L}{4}=0$ και $\mathrm{B}+3\Delta\cos\frac{3k_1L}{4}=0$

$\Rightarrow \varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \quad \mathrm{B}=\Delta \quad \kappa\alpha\iota \quad \cos\frac{3k_1L}{4}=0 \Rightarrow \frac{3k_1L}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1=\frac{3L}{2n+1}$

$\Rightarrow \varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \quad \mathrm{B}=-3\Delta \quad \kappa\alpha\iota \quad \sin\frac{3k_1L}{4}=0 \Rightarrow \frac{3k_1L}{4}=n\pi \Rightarrow \lambda_1=\frac{3L}{2n}$

Το σημείο που ενώνονται οι δύο χορδές δεν είναι πακτωμένο. Έτσι η απομάκρυνση σε αυτό το σημείο δεν είναι μηδέν. (Είναι συνεχής και έχει συνεχή κλίση, παράγωγο.)

7η Άσκηση



με $m_1 \neq m_2$

Η ποσοτική περιγραφή της παραπάνω κίνησης έχει ως εξής:

Εάν κάποια δεδομένη χρονική στιγμή η απομάκρυνση του ενός εκκρεμούς από τη θέση ισορροπίας του είναι x_1 και του άλλου x_2, η εξίσωση κίνησης για το κάθε εκκρεμές θα είναι:

Για το σώμα m_1 : $m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + \underbrace{m_1 g \dfrac{x_1}{l}}_{\text{βαρύτητα}} + \underbrace{D\left(x_1 - x_2\right)}_{\text{ελαστικότητα}} = 0$ *(1)*

Για το σώμα m_2 : $m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + \underbrace{m_2 g \dfrac{x_2}{l}}_{\text{βαρύτητα}} - \underbrace{D\left(x_1 - x_2\right)}_{\text{ελαστικότητα}} = 0$ *(2)*

όπου με τους όρους βαρύτητα και ελαστικότητα σημειώνουμε τη φυσική προέλευση κάθε όρου, δηλαδή την επαναφέρουσα δύναμη του βάρους και την ελαστική δύναμη του ελατηρίου.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις *(1)* και *(2)* έχουμε:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_1 g \frac{x_1}{l} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m_2 g \frac{x_2}{l} = 0 \Leftrightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right) = 0 \qquad (3)$$

θέτοντας $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ η σχέση *(3)* γράφεται:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 \left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right) = 0 \qquad (4)$$

θεωρούμε $x = x_1 - x_2$ *(5)* και $X = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ *(6)*

Από την *(6)* έχουμε $\left(m_1 + m_2\right) X = m_1 x_1 + m_2 x_2$ *(7)*

Από την *(3)* έχουμε $\dfrac{d^2\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right)}{dt^2} + \left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right)\dfrac{g}{l} = 0$ που λόγω της *(7)* και της *(5)* γράφεται:

$$\left(m_1 + m_2\right)\frac{d^2\left(X\right)}{dt^2} + \left(m_1 + m_2\right) X \frac{g}{l} = 0 \qquad (8)$$

Θεωρούμε την ανηγμένη μάζα $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ οπότε:

$$\mu \frac{d^2\left(X\right)}{dt^2} + \mu\left(X\right)\frac{g}{l} + DX = 0 \Leftrightarrow \mu \frac{d^2\left(X\right)}{dt^2} + \left(\mu \frac{g}{l} + D\right) = 0 \qquad (9)$$

Από τη σχέση (8) προκύπτει: $\omega_1^2 = \left(m_1 + m_2\right)\frac{g}{l}\frac{1}{\left(m_1 + m_2\right)} \Leftrightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{l}$ *(10)*

Από τη σχέση (9) προκύπτει: $\omega_2^2 = \frac{\mu\frac{g}{l} + D}{\mu} \Leftrightarrow \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{D}{\mu}$ *(11)*

Για το $x_1\left(t\right)$ θα έχουμε:

$$x_1\left(t\right) = \frac{1}{2}\left[A_+ \cos\left(\omega_1 t + \delta_+\right) + A_- \cos\left(\omega_2 t + \delta_-\right)\right] \quad (12)$$

Για το $x_2\left(t\right)$ θα έχουμε:

$$x_2\left(t\right) = \frac{1}{2}\left[A_+ \cos\left(\omega_1 t + \delta_+\right) - A_- \cos\left(\omega_2 t + \delta_-\right)\right] \quad (13)$$

όπου ω_1 και ω_2 είναι οι κανονικές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης,
δηλαδή $\omega_1 = \omega_{0,+}$ και $\omega_2 = \omega_{0,-}$
Για μια δεδομένη χρονική στιγμή t_0 το x_1 θα πάρει την τιμή μηδέν, ενώ τότε το x_2 θα πάρει την τιμή $x_2 = x$.

Δηλαδή από τη σχέση *(12)* θα έχουμε:

$$0 = \frac{1}{2}\left[A_+ \cos\left(\omega_1 t_0 + \delta_+\right) + A_- \cos\left(\omega_2 t_0 + \delta_-\right)\right] \quad (14)$$

και από τη σχέση *(13)* θα έχουμε:

$$x = \frac{1}{2}\left[A_+ \cos\left(\omega_1 t_0 + \delta_+\right) - A_- \cos\left(\omega_2 t_0 + \delta_-\right)\right] \quad (15)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις *(14)* και *(15)* προκύπτει:

$$x = A_+ \cos\left(\omega_1 t_0 + \delta_+\right) \Leftrightarrow A_+ = \frac{x}{\cos\left(\omega_1 t_0 + \delta_+\right)}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις *(14)* και *(15)* προκύπτει:

$$-x = A_- \cos\left(\omega_2 t_0 + \delta_-\right) \Leftrightarrow A_- = \frac{x}{\cos\left(\omega_2 t_0 + \delta_-\right)}$$

8η Άσκηση

Σχέσεις *(5.25)*, κανονικές συχνότητες του συστήματος των τριών μαζών, $N=3$:

$$\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 \qquad (1)$$

$$\omega_2=\sqrt{2}\,\omega_0 \qquad (2)$$

$$\omega_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0 \qquad (3)$$

Η ισότητα των σχέσεων αποδεικνύεται αναλυτικά με βάση απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες.
Π.χ. η ω_1 γράφεται διαδοχικά:

$$\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \omega_1^2=\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2=2\omega_0^2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\omega_0^2\left(1-\cos 2\frac{\pi}{8}\right)=2\omega_0^2\left[1-\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\right]=$$

$$=2^2\omega_0^2\sin^2\frac{\pi}{8}\Rightarrow \quad \omega_1=2\omega_0\sin\frac{\pi}{8}$$

Σχέσεις *(5.25)*:

$$\omega_1=2\omega_0\sin\frac{\pi}{8} \qquad (4)$$

$$\omega_2=2\omega_0\sin\frac{2\pi}{8} \qquad (5)$$

$$\omega_3=2\omega_0\sin\frac{3\pi}{8} \qquad (6)$$

Από τη σχέση *(1)* εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει: $\omega_1=0,765\omega_0$

Από τη σχέση *(4)* εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει: $\omega_1=0,765\omega_0$

Ομοίως για τις *(2)* και *(5)* προκύπτει: $\omega_2=1,414\omega_0$

και για τις *(3)* και *(6)* προκύπτει: $\omega_3=1,84776\omega_0$

Στην εγκάρσια ταλάντωση συστήματος τριών συντεταγμένων ταλαντωτών (μαζών) οι εξισώσεις κίνησης γράφονται (για $N=3$):

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\omega_0^2y_1-\omega_0^2y_2=0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+2\omega_0^2y_2-\omega_0^2y_1-\omega_0^2y_3=0$$

$$\frac{d^2y_3}{dt^2}+2\omega_0^2y_3-\omega_0^2y_2=0$$

Για να βρούμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$y_1 = A_1 \cos\omega t$, $y_2 = A_2 \cos\omega t$, $y_3 = A_3 \cos\omega t$

Οδηγούμαστε στο ομογενές σύστημα:

$$\begin{array}{llll} \left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)A_1 & \omega_0^2 A_2 & 0A_3 & =0 \\ \omega_0^2 A_1 & \left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)A_2 & \omega_0^2 A_3 & =0 \\ 0A_1 & \omega_0^2 A_2 & \left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)A_3 & =0 \end{array} \qquad (7)$$

για $\omega = \omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0$

και

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A_1 = A\frac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] A_2 = A\sin\frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow A_2 = A \\[2ex] A_3 = A\sin\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow A_3 = A\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \quad \text{σχέσεις } \mathit{(5.27)}$$

από τη σχέση *(7)* έχουμε με αντικατάσταση:

$$\begin{array}{llll} \left[\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right]A\frac{\sqrt{2}}{2} & \omega_0^2 A_2 & 0 & =0 \\ \omega_0^2 A\frac{\sqrt{2}}{2} & \left[\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right]A & \omega_0^2 A\frac{\sqrt{2}}{2} & =0 \Leftrightarrow \\ 0 & \omega_0^2 A & \left[\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right]A\frac{\sqrt{2}}{2} & =0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\omega_0^2 A + \omega_0^2 A = 0 \\[2ex] \omega_0^2 A\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\omega_0^2 A + \omega_0^2 A\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\[2ex] \omega_0^2 A - \omega_0^2 A = 0 \end{array}\right\} \quad \text{που ισχύουν εκ ταυτότητος}$$

για $\omega = \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$

και
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\sin\frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow A_1 = A \\ A_2 &= A\sin\frac{4\pi}{4} \Leftrightarrow A_2 = 0 \\ A_3 &= A\sin\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow A_3 = -A \end{aligned}\right\}$$
σχέσεις *(5.28)*

από τη σχέση *(7)* έχουμε με αντικατάσταση:

$$\begin{matrix} \left(2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right)A & \omega_0^2 0 & 0(-A) & =0 \\ \omega_0^2 A & \left(2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right)0 & \omega_0^2(-A) & =0 \Leftrightarrow \\ 0A & \omega_0^2 0 & \left(2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right)(-A) & =0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right)A = 0 \\ &\omega_0^2 A - \omega_0^2 A = 0 \\ &\left(2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right)A = 0 \end{aligned}\right\}$$
που ισχύουν εκ ταυτότητος

Τέλος για $\omega = \omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0$

και
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\sin\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}A \\ A_2 &= A\sin\frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow A_2 = -A \\ A_3 &= A\sin\frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}A \end{aligned}\right\}$$
σχέσεις *(5.29)*

από τη σχέση *(7)* έχουμε με αντικατάσταση:

$$\begin{array}{cccl}
\left[\left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2-2\omega_0^2\right]\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & \omega_0^2\left(-A\right) & 0\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & =0 \\
\omega_0^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & \left[\left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2\right]\left(-A\right) & \omega_0^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & =0 \Leftrightarrow \\
0\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & \omega_0^2\left(-A\right) & \left[\left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2-2\omega_0^2\right]\dfrac{\sqrt{2}}{2}A & =0
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\omega_0^2A-\omega_0^2A=0 \\
\dfrac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2A-\sqrt{2}\omega_0^2A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2A=0 \\
-\omega_0^2A+\omega_0^2A=0
\end{array}\right\}$$ που ισχύουν εκ ταυτότητος

<u>9^{η} Άσκηση</u>

Σχέση *(5.62)*: $y\left(x,t\right)=A\sin\left(kx+\omega t\right)$

Σχέση *(5.63)*: $y\left(x,t\right)=B\sin\left(kx-\omega t\right)$

Σχέση *(5.64)*: $y\left(x,t\right)=\dfrac{1}{2}\left[A\sin\left(kx+\omega t\right)+B\sin\left(kx-\omega t\right)\right]$

Οριακές συνθήκες *(5.1)*: $y_0=0$ και $y_{N+1}=0$

Σχέση *(5.62)*: $y\left(x,t\right)=A\sin kx\cos\omega t$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y_n=A_ne^{i\omega t}$ *(1)*

όπου τα πλάτη A_n θεωρούνται σε γενική περίπτωση σαν μιγαδικοί αριθμοί, της μορφής $A_n=Ae^{inka}$ με $n=1,2,3,\ldots,N$ *(2)*

Η απομάκρυνση θα περιέχει τόσο το φανταστικό (ημίτονο) όσο και το πραγματικό (συνημίτονο) μέρος του A_n, στην σχέση *(2)*, και στο όριο $\dfrac{a}{L}\prec\prec 1$ την μορφή: $y\left(x,t\right)=Ae^{i\left(kx+\omega t\right)}$ της οποίας το φανταστικό μέρος είναι η σχέση (5.62): $y\left(x,t\right)=A\sin\left(kx+\omega t\right)$.

Επειδή η χρονική εξάρτηση γράφεται με τη μορφή $\cos\omega t$, που αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $e^{i\omega t}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην $y(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}$ με $e^{-i\omega t}$ και να γράψουμε διαδοχικά:

$y_n = B_n e^{-i\omega t} \Leftrightarrow y_n = Be^{inka}e^{-\omega t} \Leftrightarrow y_n = Be^{i(kx-\omega t)} \Rightarrow y(x,t) = B\sin(kx-\omega t)$ και η λύση έχει η μορφή της σχέσης *(5.64)*: $y(x,t)=\frac{1}{2}\left[A\sin(kx+\omega t)+B\sin(kx-\omega t)\right]$

Στις οριακές συνθήκες *(5.1)* ισχύει $y=0$ για $x=0$ και $y=0$ για $x=L$.

Η οριακή συνθήκη $x=0$ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνει για την *(5.64)*:

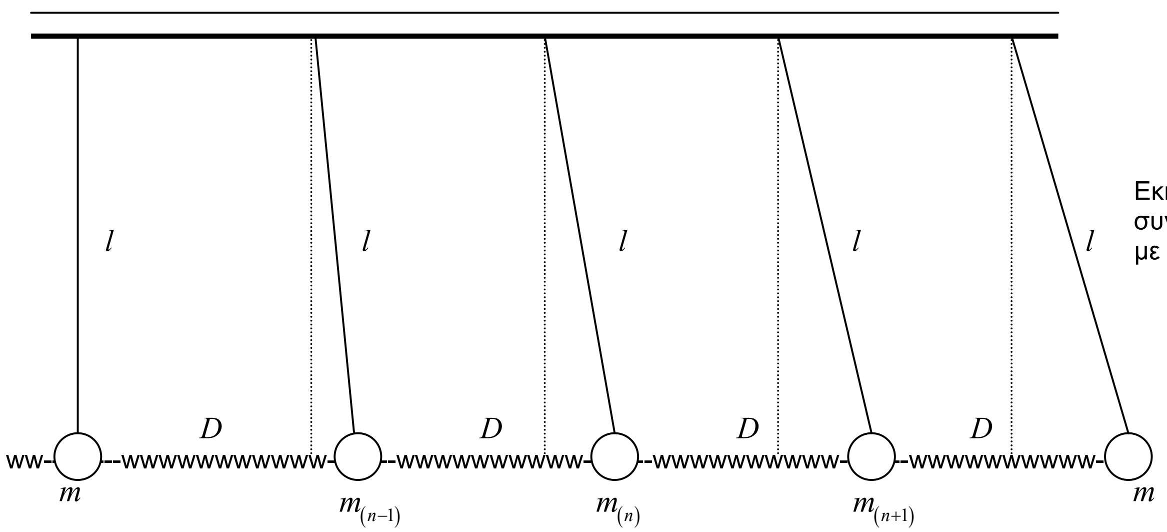
$y(0,t)=\frac{1}{2}\left[A\sin\omega t+B\sin(-\omega t)\right] \Leftrightarrow y(0,t)=\frac{1}{2}\left[A\sin\omega t-B\sin\omega t\right]$, οπότε αναγκαστικά $A=B$.

έτσι η σχέση *(5.64)* γράφεται:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[A\sin(kx+\omega t)+A\sin(kx-\omega t)\right]=$$

$$\frac{1}{2}A\left[\sin kx\cos\omega t+\cos kx\sin\omega t+\sin kx\cos\omega t-\cos kx\sin\omega t\right]=A\sin kx\cos\omega t$$ σχέση *(5.55)*

10^{η} Άσκηση



Εκκρεμή συνδεδεμένα με ελατήρια

Θεωρούμε το σύστημα των συντεταγμένων εκκρεμών του παραπάνω σχήματος. Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης εργαζόμαστε ως εξής:

Για τη μάζα n θα ισχύει:

$$m\frac{d^2\xi_n}{dt^2}+m\frac{\xi_n}{l}+2D\xi_n-D\left(\xi_{n+1}+\xi_{n-1}\right)=0 \qquad (1) \qquad \text{με } n=1,2,...,N$$

εισάγοντας τη φυσική συχνότητα $\omega_0^{'}$ των εκκρεμών: $\omega_0^{'} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

απαλείφοντας την μάζα m και θέτοντας $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ η σχέση *(1)* γράφεται:

$$m\frac{d^2\xi_n}{dt^2} + \left(\omega_0^{'}\right)^2 \xi_n + 2\omega_0^2\xi_n - \omega_0^2\left(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}\right) = 0 \qquad (2) \qquad \text{(σχέση: 5.75)}$$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής $\xi_n = Ae^{i\omega t}$ η σχέση *(2)* μπορεί να γραφτεί:

$$-\omega^2 A_n + \left(\omega_0^{'}\right)^2 A_n + 2\omega_0^2 A_n - \omega_0^2\left(A_{n+1} + A_{n-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$A_n\left(-\omega^2 + \left(\omega_0^{'}\right)^2 + 2\omega_0^2\right) - \omega_0^2\left(A_{n+1} + A_{n-1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$A_n\left(-\omega^2 + \left(\omega_0^{'}\right)^2 + 2\omega_0^2\right) = \omega_0^2\left(A_{n+1} + A_{n-1}\right) \Leftrightarrow \frac{\left(-\omega^2 + \left(\omega_0^{'}\right)^2 + 2\omega_0^2\right)}{\omega_0^2} = \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{A_n} \qquad (3)$$

Όμως είναι φανερό πως για συγκεκριμένη τιμή του ω, η σχέση $\frac{\left(-\omega^2 + \left(\omega_0^{'}\right)^2 + 2\omega_0^2\right)}{\omega_0^2}$ είναι σταθερή.

Θεωρώντας $A_n = C\sin\left(n\phi\right)$ τότε $A_{n+1} = C\sin\left(n+1\right)\phi$ και $A_{n-1} = C\sin\left(n-1\right)\phi$

τότε η σχέση *(3)* γράφεται:

$$\frac{C\sin\left(n+1\right)\phi + C\sin\left(n-1\right)\phi}{C\sin\left(n\phi\right)} = \text{σταθερό,}$$

και λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $2\sin a\cos b = \sin\left(a+b\right) + \sin\left(a-b\right)$ γίνεται:

$$\frac{2C\sin\left(n\phi\right)\cos\phi}{C\sin\left(n\phi\right)} = \text{σταθερό} \Rightarrow 2\cos\phi = \text{σταθερό} \qquad (4)$$

Για τις οριακές συνθήκες $y_0 = A_0 = 0$ και $y_{N+1} = A_{N+1} = 0$ που αντιστοιχούν σε κλειστό σύστημα, ανάγονται στα γνωστά στάσιμα κύματα $y\left(x,t\right) = A\sin kx\cos\omega t$, δηλαδή για τις οριακές τιμές $\sin\left(N+1\right)\phi = 0 \Rightarrow \left(N+1\right)\phi = k\pi$ όπου $k = 1,2,3,...$

Κατά συνέπεια $\phi = \frac{k\pi}{N+1}$ *(5)*

Από τις *(3)*, *(4)* και *(5)* έχουμε: $$\frac{-\omega^2+\left(\omega_0^{'}\right)^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2}=2\cos\frac{k\pi}{N+1} \qquad (6)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην *(6)* βρίσκουμε:

$$\frac{-\omega^2+\left(\omega_0^{'}\right)^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2}=2\cos\frac{k\pi}{N+1}\Leftrightarrow -\omega^2+\left(\omega_0^{'}\right)^2+2\omega_0^2=2\omega_0^2\cos\frac{k\pi}{N+1}\Leftrightarrow$$
$$-\omega^2+\left(\omega_0^{'}\right)^2=-2\omega_0^2+2\omega_0^2\cos\frac{k\pi}{N+1}\Leftrightarrow \omega^2-\left(\omega_0^{'}\right)^2=2\omega_0^2-2\omega_0^2\cos\frac{k\pi}{N+1}\Leftrightarrow$$
$$\omega^2-\left(\omega_0^{'}\right)^2=2\omega_0^2\left(1-\cos\frac{k\pi}{N+1}\right)\Leftrightarrow \omega^2-\left(\omega_0^{'}\right)^2=4\omega_0^2\sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right]$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$\omega^2=\left(\omega_0^{'}\right)^2+4\omega_0^2\sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right]$$ και παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα:

$$\omega=\sqrt{\left(\omega_0^{'}\right)^2+4\omega_0^2\sin^2\left[\frac{k\pi}{2(N+1)}\right]}$$ και θέτοντας $a=\frac{\pi}{N+1}$ γίνεται

$$\omega=\sqrt{\left(\omega_0^{'}\right)^2+4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)}$$ σχέση (5.76),

η οποία δίνει τη διαφορά, που χαρακτηρίζει το εκτεταμένο μέσο (το σύστημα σφαιρών).