

5^η Εργασία

Ασκήσεις

(Προθεσμία μέχρι 24-5-04)

1) Κάτω από ποιες προϋποθέσεις (εάν μπορούν να υπάρξουν κάποιες), η διαφορική εξίσωση $\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + R \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$, η οποία περιγράφει την κίνηση μιας ομογενούς χορδής, στην οποία αντιστέκεται μια δύναμη τριβής ανάλογη προς την ταχύτητα της, είναι μια γενικευμένη κυματική εξίσωση; Τι είδους κύματα περιγράφει στην γενική περίπτωση; Διερευνήστε.

2) Δείξτε ότι η κυματική εξίσωση $-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} + m^2 c^4 \Psi(x,t)$, περιγράφει κύματα de Broglie για ελεύθερα σωματίια μάζας m, τα οποία κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες.

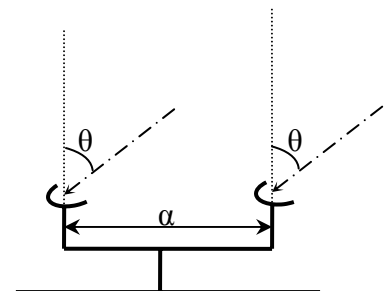
3) Μία ομοιογενής χορδή πιάνου έχει μήκος 1.4m και μάζα 110gr. Με πόση τάση θα πρέπει να τεντωθεί αυτή η χορδή για να δονηθεί με θεμελιώδη συχνότητα 131 Hz; Ποιες οι συχνότητες των τριών πρώτων υψηλότερων αρμονικών;

4) Ξεκινώντας από τους ορισμούς της ομαδικής και φασικής ταχύτητας, δείξτε ότι η ομαδική ταχύτητα ενός ηλεκτρομαγνητικού παλμού σε ένα μέσο με σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu_r \approx 1$ συνδέεται με τη (σχετική) διηλεκτρική σταθερά ϵ_r με την σχέση

$$v_g = v[1 + (\lambda / 2\epsilon_r) \cdot d\epsilon_r / d\lambda] \quad , \quad \text{όπου } v \text{ η φασική ταχύτητα.}$$

5) Στο πείραμα των δύο οπών του σχήματος 7.7, το οποίο εκτελούμε με οπτικά (ηλεκτρομαγνητικά) κύματα, πώς και κατά πόσο θα αλλάξει η εικόνα συμβολής, εάν τοποθετήσουμε πίσω από την μία οπή ένα πλακίδιο $\lambda/4$;

6) α) Μια συμβολομετρική διάταξη που χρησιμοποιείται στη ραδιοαστρονομία συνίσταται από δύο όμοια ραδιοτηλεσκόπια των οποίων οι κεραιές βρίσκονται σε απόσταση a μεταξύ τους. Αρμονικό ραδιοκύμα από ένα άστρο, που συλλαμβάνεται από τις δύο κεραιές, έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Τα σήματα υφίστανται επαλληλία στο σταθμό επεξεργασίας A, χωρίς να προκαλείται



πρόσθετη διαφορά φάσης. Να βρεθούν οι γωνίες θ για τις οποίες το προκύπτει από τη συμβολή στον επεξεργαστή σήμα είναι μέγιστο, αν το συλλεγόμενο από τις κεραίες ραδιοκύμα έχει μήκος κύματος λ .

β) Αν η αστρική πηγή βρίσκεται 1 έτος φωτός μακριά (δηλ. 9.46×10^{15} m) και το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι 1 mV/m στη θέση των κεραιών, πόση είναι η μέση εκπεμπόμενη ισχύς σε αυτό το μήκος κύματος, αν αγνοήσουμε τις διάφορες απορροφήσεις (μεσοαστρική σκόνη, ατμόσφαιρα) και η πηγή εκπέμπει ισοτροπικά;

7) Να δείξετε ότι η απόσταση μεταξύ πανομοιότυπων πηγών σε μία γραμμική διάταξη, που δίνει ένα κύριο μέγιστο κατά μήκος της γραμμής των πηγών ($\theta = \pm\pi/2$), ισούται με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται. Ένας τέτοιος σχηματισμός καλείται end-fire. Να καθορίσετε τις θέσεις (τιμές του θ) των δευτερευόντων μεγίστων για $N = 4$ και να παραστήσετε γραφικά τη γωνιακή κατανομή της έντασης.

8) Ως γνωστόν, ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ενέργειας W έχει ορμή $p = W / c$. Στα πλαίσια μιας πρότασης για κατασκευή ηλιακού ιστιοφόρου προτείνεται αυτό να χρησιμοποιεί μεγάλο «πανί» μικρής μάζας και ως προωθητικό μέσο την ορμή της ηλιακής ακτινοβολίας. Η μέση ολική ηλεκτρομαγνητική ισχύς που εκπέμπεται από τον ήλιο είναι $P = 3.9 \times 10^{26}$ W. Αν το πανί είναι τελείως ανακλαστικό και προσανατολισμένο κάθετα στις ακτίνες του ήλιου, τι εμβαδόν πρέπει να έχει για να προωθεί διαστημόπλοιο μάζας $m = 2.0 \times 10^4$ Kg αντίθετα προς τη βαρυτική έλξη του ηλίου; Πώς εξαρτάται η απάντηση αυτή από την απόσταση R του διαστημοπλοίου από τον ήλιο; (Μάζα ήλιου = 1.99×10^{30} Kg, σταθερά παγκόσμιας έλξης = 6.68×10^{-11} Nm²/Kg²)

9) Σε χορδή που τείνεται με τάση T στη διεύθυνση xx' και έχει γραμμική πυκνότητα μ , διαδίδονται τα οδεύοντα κύματα: $y_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \delta_1)$ και $y_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \delta_2)$. Βρείτε την μέση διαδιδόμενη ισχύ.

10) Μια κυματομάδα αποτελείται από δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος A και μήκη κύματος λ και $\lambda + \Delta\lambda$, όπου το $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$. Δείξτε ότι ο αριθμός μηκών κύματος λ που περιέχονται μεταξύ διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας διαμόρφωσης είναι περίπου $\lambda/\Delta\lambda$.

Ερωτήσεις

1. Τι είδους είναι τα κύματα που σχηματίζονται στην επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης, όταν ρίξουμε μια πέτρα; Δώστε μια μαθηματική έκφραση για την ισοφασική επιφάνειά τους. Το πλάτος των κυμάτων

ελαττώνεται καθώς απομακρύνονται από την πηγή. Δώστε δύο τουλάχιστον λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό.

2. Εάν υποθεθεί ότι η ένταση των κυμάτων του προηγούμενου ερωτήματος, σε μια μεγάλη απόσταση από την πηγή $R=1\text{km}$ είναι 10^{-7} W/m^2 . Πόση περιμένετε να είναι η ένταση σε απόσταση 3km ;

3. Θεωρείστε ότι μια σημειακή πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εκπέμπει στο κενό ηλεκτρομαγνητικά κύματα, των οποίων η ένταση σε απόσταση $R=1\text{km}$ από την πηγή είναι 10^{-7} W/m^2 . Πόση περιμένετε να είναι η ένταση σε απόσταση 3km ;

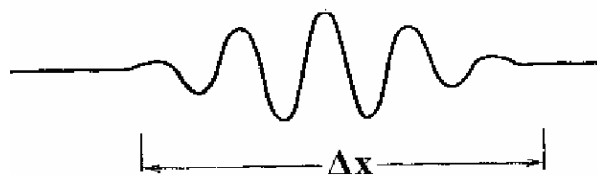
4. Κάτω από ποιές προϋποθέσεις η χαρακτηριστική κυματική εξίσωση (1.27) περιγράφει αρμονικά κύματα με (κυκλική) συχνότητα ω και κυματαριθμό k ; Δείξτε ότι με τις ίδιες προϋποθέσεις η χαρακτηριστική κυματική εξίσωση δέχεται αρμονικές λύσεις με συχνότητα $n\omega$ και κυματαριθμό nk , όπου n ακέραιος αριθμός.

5. Δείξτε ότι το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in(kx-\omega t)}$ εκφράζει μια γενική λύση της (1.27). Σχόλια;

6. Επαληθεύστε (γραφικά και αναλυτικά) ότι η συνάρτηση $f(x) = [8.5 + 2 \cos(2x)] \sin(x)$, μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα ημιτόνων της μορφής: $A_1 \sin(x) + A_2 \sin(2x) + A_3 \sin(3x) + A_4 \sin(4x) + \dots$, με $A_1 = 7.5$, $A_3 = 1$, ενώ $A_2 = A_4 = A_5 = \dots = 0$.

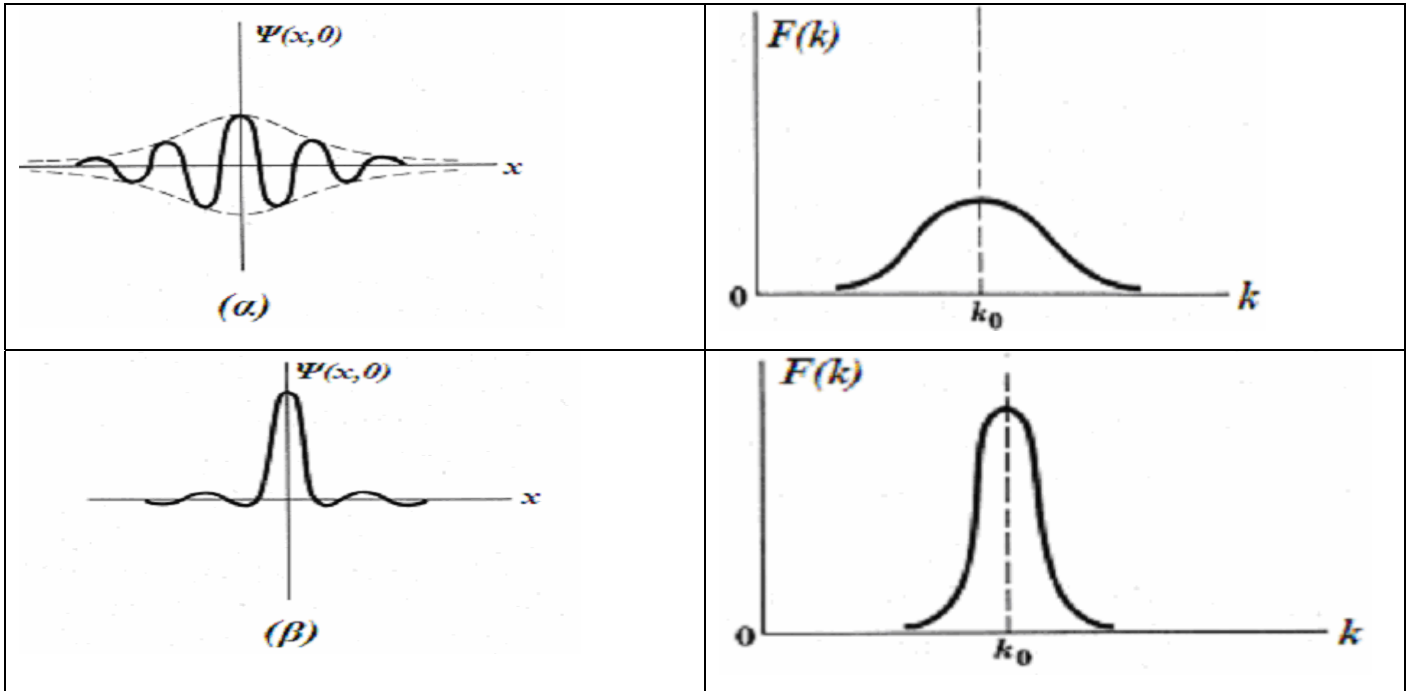
7. Σχεδιάστε πρόχειρα αλλά καθαρά το «φάσμα Fourier» της $f(x)$. Μπορεί η συνάρτηση $f(x)$ να γραφεί σαν ένα άθροισμα συνημιτόνων;

8. Ο κυματοπαλμός του σχήματος έχει εύρος Δx και αποτελείται από (συνεχές) άθροισμα αρμονικών κυμάτων με κυματαριθμούς μεταξύ k_0 και $k_0 + \Delta k$. Εάν περιορίσουμε τους κυματαριθμούς των αρμονικών κυμάτων, τα οποία συνθέτουν τον κυματοπαλμό στην περιοχή μεταξύ k_0 και $k_0 + \Delta k/2$, πως θα αλλάξει



(αν αλλάξει) η μορφή του κυματοπαλμού;

9. Τα δύο κυματοπακέτα στην αριστερή πλευρά του σχήματος αποτελούνται από ένα (συνεχές) άθροισμα αρμονικών κυμάτων με διαφορετικούς κυματάρηθμους k , κατανεμημένους συμμετρικά γύρω από κάποιο κεντρικό κυματάρηθμο k_0 και με διαφορετικά πλάτη $F(k)$, όπως φαίνεται στο δεξιό μέρος του σχήματος. Αντιστοιχίστε της κατανομές πλάτους δεξιά, με τα κυματοπακέτα αριστερά και επεξηγήστε.



10. Αφού κατά την συμβολή δύο κυμάτων, σε άλλα σημεία έχουμε ενέργεια μεγαλύτερη και σε άλλα σημεία ενέργεια μικρότερη από το άθροισμα των δύο κυμάτων, τι συμβαίνει με την διατήρηση της ενέργειας;