ΦΥΕ34

Λύσεις 5ης Εργασίας

1) Έστω αρμονικό κύμα της (εκθετικής) μορφής: $F(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\varphi)}$.

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:
$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = -i\omega F(x,t)$$
$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \ \ ikF(x,t)$$

Παραγωγίζοντας αυτές τις δύο σχέσεις μία ακόμη φορά ως προς t και x αντίστοιχα

βρίσκουμε:
$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 F(x,t) = -\,\omega^2 F(x,t)\,,$$
$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 F(x,t)$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\omega^2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} = \frac{T_0}{\rho_0} k^2 e^{i(kx-\omega t+\varphi)} - i\omega R e^{i(kx-\omega t+\varphi)}, \text{ ή } [\omega^2 - \frac{T_0}{\rho_0} k^2] = -i\omega R\,,$$

ή, υψώνοντας στο τετράγωνο: $$-\omega^2 = \frac{1}{R^2} \cdot [\omega^2 - \frac{T_0}{\rho_0} k^2]^2\,.$$

Εφόσον όλες οι ποσότητες στην παραπάνω σχέση είναι (ή θεωρούνται) πραγματικοί αριθμοί, η παραπάνω συνθήκη είναι αδύνατον να εκπληρωθεί, αφού το αριστερό μέρος της είναι αρνητικός αριθμός, ενώ το δεξιό θετικός, εκτός εάν R=0.
Για $R \neq 0$ και πραγματικό, δεν υπάρχουν λύσεις που να αντιστοιχούν σε συνήθη αρμονικά κύματα. Αν όμως δεχθούμε ότι ο κυματαριθμός k μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός, τότε μπορούμε να γράψουμε $k = \kappa + i\lambda$ και να ικανοποιήσουμε την σχέση διασποράς.
Σ΄ αυτή την περίπτωση, αντί για επίπεδα κύματα θα έχουμε «***αποσβενύμενα κύματα***» της μορφής: $F(x,t) = Ce^{-\lambda x} e^{i(\kappa x-\omega t+\varphi)}$,

τα οποία μοιάζουν με επίπεδα κύματα, των οποίων το πλάτος μειώνεται (φθίνει) εκθετικά με την απόσταση. Σε τριγωνομετρική μορφή το αποσβενύμενο κύμα γράφεται:

$$F(x,t) = Ce^{-\lambda x}\sin(\kappa x - \omega t + \varphi)$$

2)Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $-\hbar^2 \dfrac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2 \dfrac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + m^2 c^4 \Psi(x,t)$,

λύσεις της μορφής $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, βρίσκουμε:

$\hbar^2 \omega^2 \Psi(x,t) = c^2\hbar^2 k^2 \Psi(x,t) + m^2 c^4 \Psi(x,t)$, ή: $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$.

Η τελευταία εξίσωση δίνει την σχετικιστική ενέργεια Ε, ενός σώματος μάζας ηρεμίας m και ορμής p.

3) Εφαρμόζουμε την συνθήκη για στάσιμα κύματα (με n=1) βρίσκουμε διαδοχικά την ταχύτητα υ και την τάση Τ:

$\lambda_1 = 2L = 2.80 \overset{n=1}{\Rightarrow} \upsilon = \lambda_1 \cdot \nu = (2.80)(131\sec^{-1}) = 367\, {}^{m}\!/_{\sec}$. Οπότε:

$$T = \rho \cdot \upsilon^2 = \frac{m}{L}\cdot \upsilon^2 = \frac{0.110Kg}{1.40m}(367^2\, {}^{m^2}\!/_{s^2}) = 1.1\times 10^4\, Nt$$

4)

Είναι $u_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ και $u = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow u_g = \dfrac{d(uk)}{dk} = u + k\dfrac{du}{dk} = u + k\dfrac{du}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{dk} =$

$$= u + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{du}{d\lambda}\cdot\left(-\frac{2\pi}{k^2}\right) = u - \lambda\frac{du}{d\lambda} \Rightarrow u_g = u - \lambda\frac{du}{d\lambda} \quad (1)$$

αλλά $n = \dfrac{c}{u}\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \simeq \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow u = \dfrac{c}{\varepsilon_r} \overset{(1)}{\Rightarrow} u_g = u - \lambda c\dfrac{d}{d\lambda}\varepsilon_r^{-1/2} =$

$$= u + \lambda c\frac{1}{2\varepsilon_r^{3/2}}\frac{d\varepsilon_r}{d\lambda} = u\left(1 + \frac{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}}{2\varepsilon_r\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{d\varepsilon_r}{d\lambda}\right)$$

5) Μετά την τοποθέτηση του πλακιδίου, θα υπάρχει επιπλέον μία διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων στο πίσω μέρος των οπών ίση προς $\underline{\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\times\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\pi}{2}}$,

η οποία οφείλεται στην διαφορά δρόμου* $\Delta x = \dfrac{\lambda}{4}$.

Έτσι σύμφωνα με την (7.34) η ολική ένταση θα είναι πλέον:

$$I(y') = 4I_0\cos^2\left(\frac{d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi + \frac{\delta_0}{2}\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

---

* Το μήκος κύματος λ μέσα σε υλικό με δείκτη διαθλάσεως n είναι $\lambda' = \dfrac{\lambda}{n}$. Κατά συνέπεια , η καθ΄ όλα ορθή λύση θα πρέπει να είναι με $\Delta x = \dfrac{\lambda'}{4}$. Η λύση με λ αντί λ' θεωρείται σωστή.

$$2I_0\left[1-\sin\left(\frac{2d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi\right)\right]=4I_0\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi\right)\right]. \qquad (1)$$

Συγκρίνοντας με την (7.27) που δίνει τη συνολική ένταση πριν την τοποθέτηση του πλακιδίου $I(y)=4I_0\cos^2\left(\frac{d}{\lambda}\frac{y}{L}\pi\right)$ (2) , βλέπουμε ότι η ένταση θα έχει την ίδια μέγιστη τιμή $I_{\max}=4I_0$, όταν

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2d}{\lambda}\frac{y'}{L}\pi\right)=1\Rightarrow\ldots\Rightarrow y'=\frac{n\lambda L}{d}+\frac{3}{4}\frac{\lambda L}{D}$ (3) μέγιστα

Πριν την τοποθέτηση του πλακιδίου είχαμε $I_{\max}=4I_0$ για:

$\cos^2\frac{dy\pi}{\lambda L}=1\Rightarrow\cos\left(\frac{dy\pi}{\lambda L}\right)=\pm1\Rightarrow\frac{dy\pi}{\lambda L}=n\pi,\quad n\in\mathbb{N}\Rightarrow y=n\frac{\lambda L}{D}$ (4)

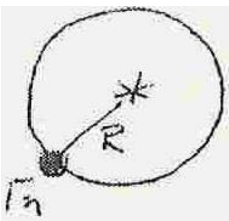
Από την (3) και (5) είναι φανερό ότι τα μέγιστα θα έχουν μετακινηθεί κατά $\Delta y=\frac{3}{4}\frac{\lambda L}{D}$. Έτσι ενώ το πρώτο μέγιστο ήταν πριν πάνω στη μεσοκάθετο του d, δεν υπάρχει πλέον ακρότατο πάνω στη μεσοκάθετο, αλλά το πρώτο μέγιστο εμφανίζεται μετατοπισμένο κατά $\frac{3}{4}\frac{\lambda L}{D}$ (ή, ορθότερα ,κατά $\frac{3}{4}\frac{\lambda' L}{D}$) από τη μεσοκάθετο.

6)

α) Η διαφορά δρόμου των δύο ακτίνων από το άστρο μέχρι τον αντίστοιχο δέκτη-κεραία είναι $d\sin\theta$. Για ενισχυτική συμβολή πρέπει $a\sin\theta=n\lambda,\ n=0,1,2,3,\ldots$

Είναι $P={dW}/{dt}$, ν ένταση $I=\frac{dW}{Adt}=\frac{P}{A}=S=\frac{1}{\mu_0}BE$.

Στιγμιαίο διάνυσμα Poynting $S=I=c\varepsilon_0E^2$. $\overline{S}=c\varepsilon_0<E_0^2\cos^2(\omega t-kr)>_t=\frac{1}{2}\varepsilon_0cE_0^2$

β) 

Μέση εκπεμπόμενη ισχύς $\overline{P}=4\pi R^2\overline{S}=\frac{10^7}{2c}R^2E_0^2\simeq1.5\cdot10^{24}\,watt$.

7) Έστω μια γραμμική διάταξη πανομοιότυπων σημειακών πηγών ακτινοβολίας με σταθερή απόσταση μεταξύ διαδοχικών πηγών d. Τα σήματα που παράγει θα είναι όλα σε φάση. Σε κάθε σημείο του χώρου θα έχουμε μια υπέρθεση των συνεισφορών από κάθε πηγή και η διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών συνεισφορών θα είναι:

$$\delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

όπου θ η κατεύθυνση του σημείου που εξετάζουμε. Αν όλες οι συνεισφορές είναι συμφασικές, τότε θα έχουμε την μέγιστη ένταση και έτσι εμφανίζεται κύριο μέγιστο. Αυτό συμβαίνει όταν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\delta\phi = 0, \pm 2\pi, ..., \pm n\pi \Rightarrow d \sin\theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, ..., \pm n\lambda$$

Επομένως γενικά κύριο μέγιστο εμφανίζεται όταν

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Η υπό εξέταση διάταξη δίνει ένα κύριο μέγιστο μόνο κατά μήκος της γραμμής των πηγών, δηλαδή για $\theta = \pm\pi/2$. Επομένως η παραπάνω συνθήκη δεν επαληθεύεται για n=0. Για n=1 και $\theta = \pm\pi/2$ παίρνουμε:

d=λ

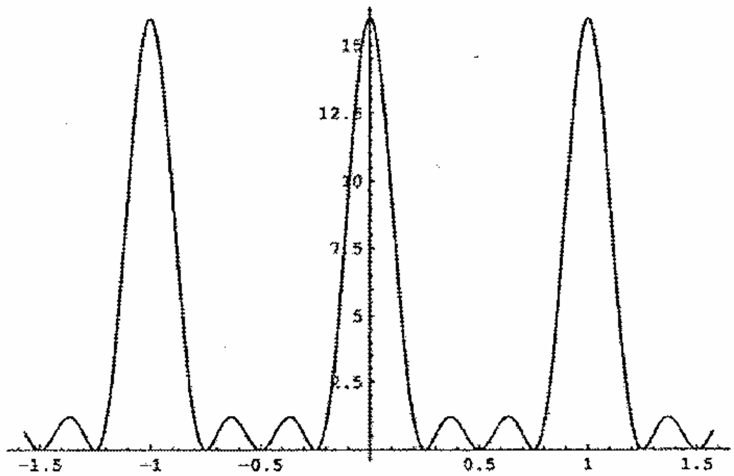
Στη διεύθυνση θ=0 , καθώς και στην διεύθυνση θ=π, ως προς την μεσοκάθετο, έχουμε πάντα ένα κύριο μέγιστο αφού αυτή η διεύθυνση είναι συμμετρική ως προς τη διάταξη.

Αν n=2 προκύπτει d=2λ, όμως στην περίπτωση αυτή θα εμφανίζονται κύρια μέγιστα όταν $\theta = n/2$, δηλαδή και για γωνίες διάφορες του $\pm\pi/2$, π.χ. n=1, $\theta = \pi/6$, που είναι άτοπο, αφού οι κεραίες απέχουν διαδοχικά κατά λ.. Το ίδιο θα συμβαίνει και για n>2, που είναι όμως άτοπο, αφού θα έπρεπε το ημίτονο θ να είναι μεγαλύτερο από την μονάδα. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή του n είναι το n=1, που δίνει d=λ.

Στην περίπτωση τεσσάρων σημειακών πηγών (N=4) με d=λ, θα έχουμε μεταξύ δύο κυρίων μεγίστων, δύο δευτερεύοντα μέγιστα και τρία ελάχιστα (σημεία μηδενικής έντασης). Η ένταση σε κάθε σημείο δίνεται από την σχέση

$$I = I_s \frac{\sin^2 4\beta}{\sin^2 \beta}$$

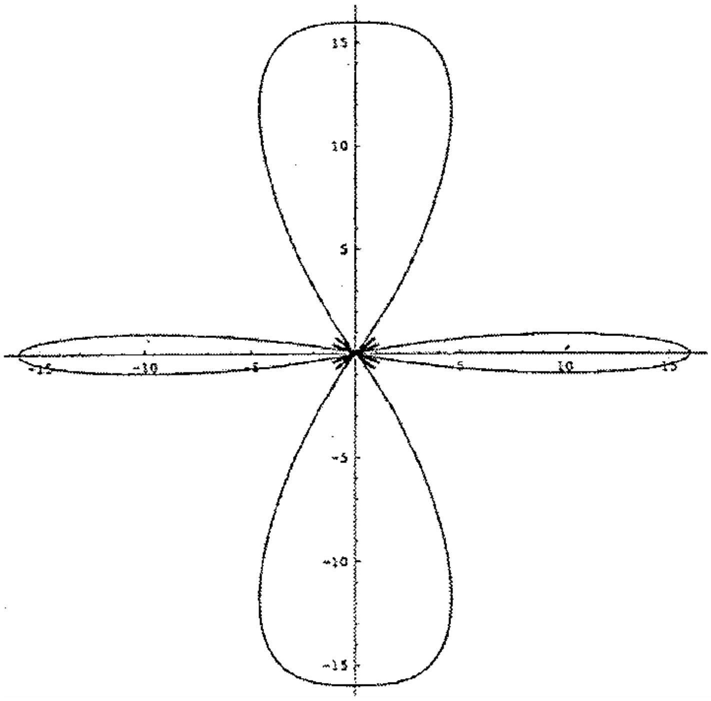
με $\beta = \dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \pi \sin\theta$ και I_s η ένταση από κάθε πηγή. Τα σημεία μηδενικής έντασης είναι εκείνα για τα οποία $\sin^2 4\beta = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sin^2\beta \neq 0$, ή αλλιώς τα σημεία εκείνα για τα οποία: $d\sin\theta = \dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{2\lambda}{4}, \dfrac{3\lambda}{4} \Rightarrow \sin\theta = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{4} \Rightarrow \theta = 14.478^o \\ \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^o \\ \dfrac{3}{4} \Rightarrow \theta = 48.59^o \end{array} \right\}$



Ακόμα, όπως παρατηρούμε και από την γραφική παράσταση της έντασης σε συνάρτηση με το sinθ, τα δευτερεύοντα μέγιστα θα βρίσκονται μεταξύ των σημείων μηδενικής έντασης, στις προσεγγιστικές θέσεις όπου:

$$\sin\theta = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3}{8} \Rightarrow \theta = 22.024^o \\ \dfrac{5}{8} \Rightarrow \theta = 38.682^o \end{array} \right\}$$

Με βάση τα παραπάνω, το διάγραμμα γωνιακής κατανομής της έντασης θα έχει την ακόλουθη μορφή:



8) Αν A το εμβαδόν του πανιού και P η ολική ηλεκτρομαγνητική ισχύς που εκπέμπει ο ήλιος, τότε η ένταση της ακτινοβολίας στη θέση του πανιού θα είναι

$I = \dfrac{P}{4\pi R^2}$ (1) και $I = \dfrac{1}{A}\dfrac{dW}{dt}$ (2),

όπου $\dfrac{dW}{dt}$ η ισχύς που πέφτει στο πανί. Αλλά για την ακτινοβολία, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{2}{c}\dfrac{du}{dt}$ (3), όπου το 2 οφείλεται στην τέλεια ανακλαστικότητα του πανιού. Είναι επίσης $F_a = \dfrac{dP}{dt}$ οπότε από (1) – (3),

$$F_a = \frac{2}{c}\frac{dW}{dt} = \frac{2}{c} I \cdot A = \frac{P}{4\pi c R^2}$$

Αλλά $F_\beta = G\dfrac{M_H m}{R^2}$, οπότε $A > \dfrac{2\pi \cdot c \cdot G \cdot M_H \cdot m}{P} = ... \simeq 13Km^2$, ανεξάρτητο του R.