

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΕΥ34 2004-05

1^η ΕΡΓΑΣΙΑ

Προθεσμία παράδοσης 15/11/2004

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Επιβάτης τραίνου, το οποίο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 0.6c$ στη διεύθυνση του άξονα x και βρίσκεται στη θέση $x' = -50\text{m}$ (δηλαδή πίσω από τον οδηγό που είναι στο $x' = 0$) αφήνει να πέσει (ως προς το τρένο) σώμα αμελητέου βάρους. Το σώμα αυτό τη στιγμή $t' = 0.1\text{s}$ φθάνει στο έδαφος (θεωρούμε τις τριβές αμελητέες). Αν τα ρολόγια ενός επιβάτη και ενός παρατηρητή από το έδαφος δείχνουν $t = t' = 0$, όταν $x = x' = 0$, ζητείται να βρεθεί πότε και πού (δηλαδή το t_0 και το x_0) – ως προς τη γη – φωτόνιο από συσκευή LASER, η οποία βρίσκεται στη γη και απέχει από το τρένο απόσταση 300m , θα πρέπει να ξεκινήσει (κάθετα ως προς το τρένο) ώστε να πετύχει το σώμα τη στιγμή t που αυτό φθάνει στο έδαφος. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

t_0 (s)	0.1	0.125	0.250	-0.1	-0.125	-0.250	τίποτα από αυτά
-----------	-----	-------	-------	------	--------	--------	-----------------

x_0 (m)	22.5	22500	$22.5 \cdot 10^6$	45	4500	$45 \cdot 10^6$	τίποτα από αυτά
-----------	------	-------	-------------------	----	------	-----------------	-----------------

2) Σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, αν έχουμε δυο ανεξάρτητα γεγονότα 1 και 2 και το 1 προηγείται χρονικά του 2 σε κάποιο σύστημα αναφοράς, σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε σύστημα τέτοιο στο οποίο το γεγονός 2 θα προηγείται του 1. Να αποδειχθεί ότι αν τα γεγονότα συνδέονται με τη σχέση αιτία (γεγονός 1) – αποτέλεσμα (γεγονός 2), αυτά για κανένα σύστημα δεν μπορούν να αλλάξουν χρονική σειρά.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων Lorentz και το γεγονός ότι η σχέση αιτίου – αποτελέσματος σημαίνει π.χ. ότι το γεγονός 2 συνέβη γιατί με το γεγονός 1 εστάλη νωρίτερα σήμα με ταχύτητα $v < c$, που προκάλεσε το γεγονός 2).

3) Ένα μόνιο που δημιουργήθηκε 20km πάνω από την επιφάνεια της γης (όπως μετρίεται από το σύστημα της γης) ταξιδεύει με ταχύτητα ως προς τη γη $0.9954c$. Η διάρκεια ζωής του μιονίου, μετρημένη στο δικό του σύστημα ηρεμίας, είναι $2.2 \cdot 10^{-6}s$. Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Σε πόσο ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης δημιουργήθηκε το σωματίδιο (ως προς το σύστημα του μιονίου);

(β) Κατά πόση απόσταση πλησιάζει η γη το σωματίδιο στη διάρκεια της ζωής του (ως προς το σύστημα του μιονίου); Τι κλάσμα του αρχικού ύψους του μιονίου είναι η απόσταση που βρήκατε, στο σύστημα αναφοράς του μιονίου;

(γ) Ποιος είναι ο χρόνος ζωής αυτού του σωματιδίου (ως προς το σύστημα της γης);

(δ) Στο σύστημα της γης, πόση απόσταση διανύει το μόνιο στη διάρκεια της ζωής του;

(στ) Τι κλάσμα του αρχικού ύψους του μιονίου είναι η απόσταση που βρήκατε, στο σύστημα αναφοράς της γης;

4) (α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt'} \frac{dt'}{dt}$ να δείξετε τις σχέσεις 4.4, 4.5, 4.9, 4.10.

(β) Για τα τετρανύσματα u^μ , p^μ , a^μ , F^μ της σελ.52 να δείξετε ότι:

(β.1) μετασχηματίζονται κατά Lorentz όπως το τετράνυσμα $x^\mu = (t, x, y, z)$. Δηλαδή, για $A^\mu = (A^t, A^x, A^y, A^z)$ τότε $A'^t = \gamma(A^t - A^x v / c^2)$, $A'^x = \gamma(A^x - A^t v)$, $A'^y = A^y$, $A'^z = A^z$.

(β.2) το τετραδιάστατο εσωτερικό τους γινόμενο διατηρείται $\eta_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ (δίνεται ότι $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = c^2 A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = c^2 A^t B^t - A^x B^x - A^y B^y - A^z B^z$).

(β.3) Να αποδείξετε ότι το τετραδιάστατο μέτρο των τετρανυσμάτων u^μ , p^μ , a^μ , F^μ παραμένει σταθερό (δηλαδή ότι $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} u'^\mu u'^\nu$) και να βρείτε τις αντίστοιχες τιμές τους.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το $\Sigma' = \Sigma_0$ ως ιδιοσύστημα του σωματίου, όπου ισχύουν τα εξής: $t' = t_0$, $x' = x_0 = 0$, $y' = y_0 = 0$, $z' = z_0 = 0$, δηλαδή είναι σύστημα συντεταγμένων όπου το σωματίο είναι ακίνητο στο κέντρο των αξόνων του. Θεωρήστε ότι το σώμα κινείται κατά τον άξονα των x)

5) (α) Λύστε το Παράδειγμα 4.2 σελ. 55 εργαζόμενοι στο σύστημα κέντρου μάζας δηλαδή όπου τα συγκρούμενα πρωτόνια έχουν αντίθετες ταχύτητες \mathbf{u}' , $-\mathbf{u}'$, και αντίθετες ορμές \mathbf{p}' , $-\mathbf{p}'$. Αφού βρείτε την \mathbf{u}' , μετασχηματίστε στο σύστημα γης όπου το ένα πρωτόνιο έχει ταχύτητα u και το άλλο μηδενική.

(β) Λύστε το ίδιο Παράδειγμα αξιοποιώντας το αναλλοίωτο του $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, για οποίον συνδυασμό $p_\alpha p_\beta$ σας συμφέρει. Δηλαδή $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu|_{(\Gamma)} = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu|_{(KM)} = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu|_{(O)}$, όπου οι δεικτες Γ , KM και O δηλώνουν: ως προς τα συστήματα αναφοράς της γης, κέντρο μάζας και ιδιοσύστημα, αντιστοίχως: $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \Rightarrow \eta_{\mu\nu} (p_3 + p_4 + p_5)^\mu (p_3 + p_4 + p_5)^\nu|_{(O)} = \eta_{\mu\nu} (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)^\nu = (\text{με ανάπτυξη}) = \eta_{\mu\nu} p_1^\mu p_1^\nu|_{(O)} + \eta_{\mu\nu} p_2^\mu p_2^\nu|_{(O)} + 2\eta_{\mu\nu} p_1^\mu p_2^\nu|_{(\Sigma)}$. Στη σχέση αυτή βάλτε: **(I)** $(\Sigma) = (\Gamma H)$ και **(II)** $(\Sigma) = (KM)$.

(γ) Από όλους τους παραπάνω τρόπους (και του βιβλίου) ποιος ήταν ο απλούστερος;

6) Δοθέντος ότι η σχετικιστική μάζα $m(v) = \gamma m$ αυξάνει με την ταχύτητα, υπολογίζουμε την ενέργεια που δίνουμε σε σώμα με μάζα ηρεμίας m όταν, επιταχύνοντάς το με δύναμη \mathbf{F} , του προσδίδουμε ταχύτητα \mathbf{v} .

(α) Δείξτε ότι: το έργο που δαπανούμε $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = m d(\gamma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$, όπου $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$.

(β) Δείξτε ότι $dE = mc^2 d\gamma$ και εξ αυτού ότι: $E_{\text{κιν}} = mc^2 \gamma + \text{σταθ}_{\text{κιν}}$ και $E_{\text{ολ}} = mc^2 \gamma + \text{σταθ}_{\text{ολ}}$.

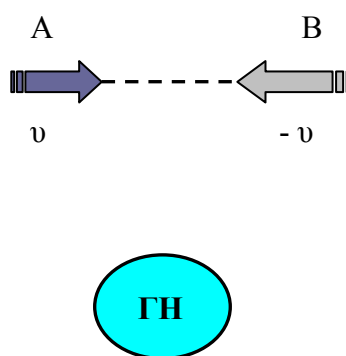
(γ) Δείξτε ότι: αν η σχέση $E_{\text{ολ}} = mc^2 \gamma + \text{σταθ}_{\text{ολ}}$ ισχύει για σώματα που υπεισέρχονται σε οποιοδήποτε φαινόμενο, ακόμη και **εξαύλωση** (δηλ. δημιουργία δυο φωτονίων από σύγκρουση δυο σωματίων ύλης και αντιύλης) ή **δίδυμη γένεση**, τότε $\text{σταθ}_{\text{ολ}} = 0$ και $E_{\text{ολ}}(v) = mc^2 \gamma = mc^2 = E_{\text{κιν}} + E_0$, όπου $E_0 = E_{\text{ολ}}(v = 0)$. (Βέβαια εκ των υστέρων όλοι είμαστε σοφότεροι! Η μεγαλοφυΐα του Einstein έγκειται στην υπόθεση που έκανε ότι $E_0 = mc^2$, δηλαδή $\text{σταθ}_{\text{ολ}} = 0$, που επέτρεψε τη σωστή πρόβλεψη της εξαύλωσης και της δίδυμης γένεσης.)

(Υπόδειξη: Θεωρήστε μια δίδυμη γένεση και γράψτε το τετράνυσμα $\Delta p^\mu \equiv p_{\text{ολ}}^\mu - p_{\text{πριν}}^\mu - p_{\text{ολ}}^\mu$ μετα. Επειδή η χωρική συνιστώσα αυτού μηδενίζεται σε οποιοδήποτε αδρανειακό

σύστημα αναφοράς, από τους μετασχηματισμούς Lorentz πρέπει να μηδενίζεται και η χρονική συνιστώσα.)

(δ) Αποδείξτε τη σχέση 4.24.

7) Στον πόλεμο των άστρων επικρατεί η εξής διαστημική συνθήκη. Ένα όχημα B θεωρείται φιλικό από ένα άλλο A, αν το A βλέπει τα φωτεινά σήματα που εκπέμπει ο B να έχουν πράσινο χρώμα ($\lambda = 5000\text{\AA}$). Θεωρήστε τα οχήματα A και B του σχήματος με $v = c/11$ ως προς τη γη. Με τι ταχύτητα αντιλαμβάνεται ο A τον B και ο B τον A; Τι χρώματος σήμα (σε \AA) θα πρέπει να εκπέμπει ο B προς τον A, για να θεωρηθεί ο B φιλικός από τον A;



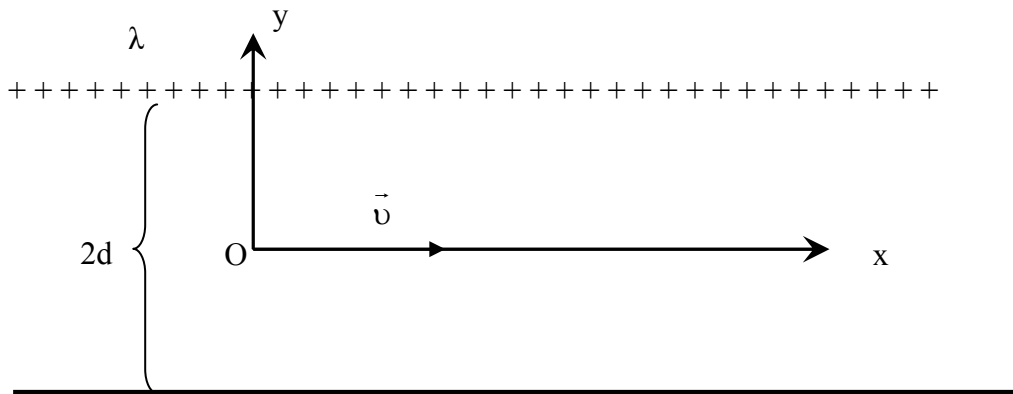
Σχήμα άσκησης 7

8) Ένα ακίνητο μεσόνιο μάζας ηρεμίας m διασπάται σε ένα νέο μεσόνιο μάζας ηρεμίας m' και ένα νεutrino μηδενικής μάζας ηρεμίας. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}}$ του νέου μεσονίου συναρτήσει των m και m' και συγκεκριμένα δείξτε ότι $E_{\text{κιν}} = (m - m')^2 c^2 / 2m$.

9) (α) Δείξτε ότι οι ποσότητες $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ και $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2$ παραμένουν αναλλοίωτες δηλαδή ότι έχουν σταθερή τιμή η καθεμία, σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

(β) Θεωρήστε στο εργαστήριο ένα μακρύ ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I και μια γραμμική κατανομή ακίνητου θετικού φορτίου με γραμμική πυκνότητα λ . Τα δυο συστήματα βρίσκονται στο επίπεδο xy και είναι παράλληλα προς τον άξονα Ox του συστήματος αναφοράς xOy του εργαστηρίου και

σε ίση απόσταση d από αυτόν. Ένας παρατηρητής κινείται κατά μήκος του άξονα Ox με ταχύτητα $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$ ως προς το εργαστήριο. Υπολογίστε τα πεδία που βλέπει αυτός ο παρατηρητής.



Σχήμα άσκησης 9

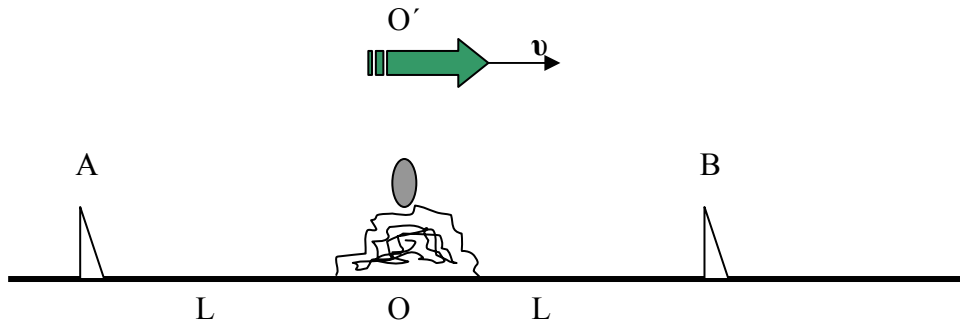
10) Έστω ότι έχετε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο E_y κατά τη διεύθυνση y και ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B_z κατά τη διεύθυνση z

(α) Υποθέστε ότι $E_y < cB_z$. Βρείτε ένα σύστημα αναφοράς Lorentz, όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Υπολογίστε την τιμή του B σε αυτό το σύστημα.

(β) Υποθέστε ότι $E_y > cB_z$. Σε αυτή την περίπτωση μπορείτε να βρείτε ένα σύστημα αναφοράς, όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν; Μπορείτε να βρείτε ένα σύστημα, όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) (α) Οι αρχές των αξόνων των O και O' συμπίπτουν τις χρονικές στιγμές $t=t'=0$. Την ίδια χρονική στιγμή ο O' στέλνει σήμα προς τους A, B . Κατά την άποψη των O, O' θα λάβουν το σήμα οι A, B ταυτόχρονα; Αν ναι, εξηγήστε, αν όχι ποιος θα το λάβει πρώτος και πόσο νωρίτερα από τον άλλο;



Σχήμα ερώτησης 1

(β) Αν το σήμα ανακλαστεί στους A, B και επιστέψει στον O , πόσο θα διαρκέσει το πήγαινε – έλα του σήματος, κατά τον O και O' ;

2) Όπως είναι γνωστό, τα παράλληλα ρεύματα έλκονται. Δηλαδή ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα v παράλληλα προς τα κινούμενα ηλεκτρόνια ενός ρευματοφόρου σύρματος, έλκεται προς το σύρμα με δύναμη $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ λόγω του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} που αναπτύσσεται γύρω από το σύρμα. Όμως, στο δικό του σύστημα αναφοράς (ως προς τον εαυτό του) έχει ταχύτητα $v=0$ άρα δεν επηρεάζεται από κανένα μαγνητικό πεδίο. Τότε τίθεται το ερώτημα “πώς έλκεται;”. Η θεωρία της σχετικότητας ερμηνεύει αυτή την έλξη με τη συστολή του μήκους.

Πιο συγκεκριμένα θεωρήστε σύρμα σταθερής πυκνότητας αποτελούμενο από άτομα που συνεισφέρουν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο (αγωγιμότητας). Όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα, τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση ταχύτητα v_d . Έστω ότι τη στιγμή της παρατήρησης, ένα άλλο ηλεκτρόνιο, έξω από το σύρμα, κινείται παράλληλα προς το σώμα με την ίδια ταχύτητα $v=v_d$. Για την ερμηνεία των ερωτημάτων που ακολουθούν, απαντήστε περιγραφικά, χωρίς υπολογισμούς.

- (α) Πώς το ελεύθερο ηλεκτρόνιο, θεωρώντας τον εαυτό του ακίνητο, θα βλέπει τα ηλεκτρόνια του σύρματος και πώς θα βλέπει να κινούνται τα θετικά ιόντα;
- (β) Αν σε ένα μήκος Δx , απέναντί του, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο βλέπει να υπάρχουν N ηλεκτρόνια στο σύρμα, σε πόσο μήκος θα βλέπει να υπάρχουν N θετικά ιόντα;
- (γ) Στο ίδιο μήκος Δx θα βλέπει να υπάρχουν περισσότερα θετικά ιόντα από ηλεκτρόνια ή λιγότερα;
- (δ) Βάσει των ανωτέρω εξηγήστε γιατί το (ακίνητο ως προς τον εαυτό του) ηλεκτρόνιο υφίσταται ολική ελκτική δύναμη με φορά προς το σύρμα.
- (ε) Πως ερμηνεύεται αυτή η ελκτική δύναμη από το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου (όπου τα θετικά ιόντα είναι ακίνητα και τα ηλεκτρόνια κινούνται);

3) Δύο παρατηρητές O, O' , που έχουν σταθερή σχετική ταχύτητα $0.8c$, παρατηρούν δυο λάμπες A και B . Σε μονάδες όπου $c=1$, ως προς τον O οι συντεταγμένες του A είναι $\{x=3, y=3, z=3, t=3\}$ και του B είναι : $\{x=5, y=3, z=1, t=5\}$. Πόσο είναι το μήκος του χωροχρονικού διαστήματος μεταξύ των λάμπων A, B , μετρούμενο από τον O' ;

Απαντ. α) 1 β) $2^{1/2}$ γ) 2 δ) 3 ε) $2(3^{1/2})$ στ) τίποτα από αυτά

- 4) (α) Τι εννοούμε με αδρανειακό σύστημα αναφοράς;
- (β) Ένα τραίνο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη γη και ένα πουλί κινείται σε οριζόντιο επίπεδο κάθετα προς το τραίνο με σταθερή ταχύτητα ως προς τη γη. Τι είδους τροχιά διαγράφει το πουλί ως προς το σύστημα ηρεμίας του τραίνου; Το σύστημα ηρεμίας του πουλιού είναι αδρανειακό;
- (γ) Τι εννοούμε με τους μετασχηματισμούς Lorentz;

5) Ένα ηλεκτρόνιο ηρεμεί ως προς τη γη μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Τι τροχιά διαγράφει ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα \mathbf{v} ως προς τη γη; Εξηγήστε.