8/10/2007

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

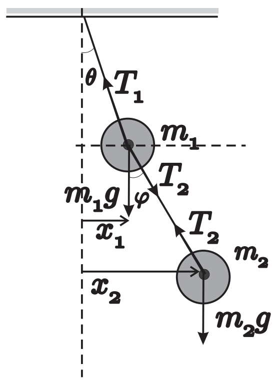
ΦΥΕ 34   2007-08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 6/11/07

Άσκηση 1

Α) Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε μάζα φαίνονται στο Σχήμα. Αναλύοντας σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (διακεκομμένες γραμμές) και για μικρές γωνίες θ,φ, οπότε $\cos\theta \approx 1, \cos\varphi \approx 1$, και η κατακόρυφη μετατόπιση των μαζών είναι αμελητέα, έχουμε για τη μάζα m_1



$$T_1 = m_1 g + T_2$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -T_1 \sin\theta + T_2 \sin\varphi$$

και για τη μάζα m_2

$$T_2 = m_2 g$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -T_2 \sin\varphi$$

όπου x_1 και x_2 οι αποστάσεις των μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα από τον άξονα των x.

Από το σχήμα έχουμε $\sin\theta = \frac{x_1}{\ell}, \sin\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\ell}$ και απαλείφοντας τις τάσεις παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\left(m_1 + m_2\right) g \frac{x_1}{\ell} + m_2 g \frac{x_2 - x_1}{\ell} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 g \frac{x_2 - x_1}{\ell} \quad (2)$$

Διαιρώντας με m_1 και m_2 αντίστοιχα το σύστημα γράφεται

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\left(1+2a\right) x_1 + \frac{g}{\ell} a\, x_2$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{g}{\ell} x_1 - \frac{g}{\ell} x_2$$

Β) Σε μορφή πίνακα οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{\ell}\left(1+2a\right) & \frac{g}{\ell} a \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \delta\right)$, $x_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \delta\right)$ καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} -\frac{g}{\ell}(1+2a)+\omega^2 & \frac{g}{\ell}a \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell}+\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο έχει μη τετριμμένες λύσεις όταν

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{g}{\ell}(1+2a)+\omega^2 & \frac{g}{\ell}a \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell}+\omega^2 \end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\left[-\frac{g}{\ell}(1+2a)+\omega^2\right]\left(-\frac{g}{\ell}+\omega^2\right)-\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 a=0\Rightarrow \omega^4-\frac{2g}{\ell}\omega^2(1+a)+\left(\frac{g}{\ell}\right)^2(1+a)=0$$

Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια ως προς ω^2 εξίσωση βρίσκουμε

$$\omega^2=\frac{g}{\ell}\left(1+a\pm\sqrt{a(1+a)}\right)\Rightarrow \omega_{\pm}=\sqrt{\left(1+a\pm\sqrt{a(1+a)}\right)}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

και συνεπώς οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$f_{\pm}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(1+a\pm\sqrt{a(1+a)}\right)}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Άσκηση 2

Α) Σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα σημεία της χορδής ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Η γενική έκφραση θα είναι λοιπόν της μορφής.

$$\xi(x,t)=A(x)\cos(\omega t+\phi) \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Rightarrow -\omega^2 A=\frac{T}{\mu}\frac{d^2A}{dx^2}\Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2}=-\frac{\mu\omega^2}{T}A\Rightarrow A(x)=C\cos(k\,x)+D\sin(k\,x) \quad (2)$$

με $k=\omega\sqrt{\frac{\mu}{T}}$.

Καθώς τα δύο άκρα είναι ελεύθερα σε αυτά πρέπει να μηδενίζεται η δύναμη $F=T\frac{\partial\xi}{\partial x}$ δηλαδή η παράγωγος του πλάτους. Εφαρμόζοντας στο πρόβλημά μας

$$A'(-L)=0\Rightarrow -k\,C\sin(-k\,L)+kD\cos(-k\,L)=0\Rightarrow$$

$$k\,C\sin(k\,L)+kD\cos(k\,L)=0 \qquad (3)$$

$$A'(L)=0\Rightarrow -k\,C\sin(k\,L)+kD\cos(k\,L)=0 \qquad (4)$$

Για να έχει λύση το παραπάνω ομογενές σύστημα ως προς C,D θα πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών

$$\det\begin{vmatrix} \sin(kL) & \cos(kL) \\ -\sin(kL) & \cos(kL) \end{vmatrix}=0\Rightarrow \sin(k\,L)\cos(kL)+\sin(kL)\cos(kL)=0\Rightarrow$$

$$2\sin(k\,L)\cos(kL)=0\Rightarrow \sin(2k\,L)=0\Rightarrow 2k_nL=n\pi, n=1,2\ldots \ (5)$$

όπου εισάγαμε το δείκτη n για να περιγράψουμε τις διακριτές τιμές. Συνεπώς

$$2\omega_n\sqrt{\frac{\mu}{T}}L=\pi\, n \Rightarrow \omega_n = n\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n=1,2\ldots \Rightarrow f_n = \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, n=1,2\ldots$$

Η λύση με $\omega=0$ δεν αντιστοιχεί σε ταλάντωση καθώς σε αυτήν την περίπτωση η γενική λύση της κυματικής δεν είναι η (1).

Β) Από τις (1) και (4) έχουμε

$$A_n(x)=C_n\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

όπου τα C_n, D_n συνδέονται με την (3)

$$C_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=D_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

η οποία δίνει $D_n=0$ για άρτια n (όπου μηδενίζεται το πρώτο μέλος) και $C_n=0$ για περιττά n (όπου μηδενίζεται το δεύτερο μέλος). Συνεπώς

$$A_n(x)=\begin{cases} C_n\cos\left(\dfrac{n\pi x}{2L}\right), n=\text{άρτιος} \\ D_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{2L}\right), n=\text{περιττός}\end{cases}$$

Όπου οι σταθερές C_n, D_n είναι αυθαίρετες σταθερές. Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφτεί ενοποιημένα χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

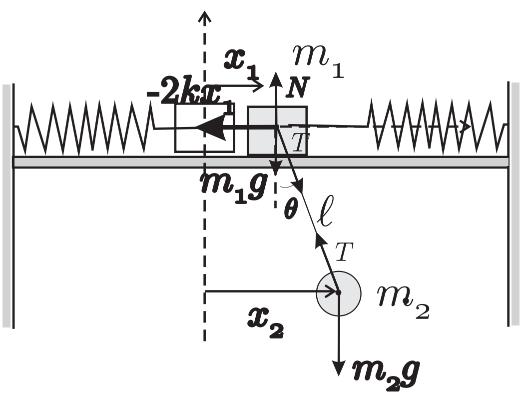
$$A_n=G_n\cos\left[\frac{n\pi x}{2L}+\left((-1)^n-1\right)\frac{\pi}{4}\right]$$

όπου G_n μια καινούργια αυθαίρετη σταθερά. Λαμβάνοντας υπόψιν και τη χρονική εξάρτηση η ζητούμενη συνάρτηση είναι

$$\xi_n(x,t)=G_n\cos\left[\frac{n\pi x}{2L}+\left((-1)^n-1\right)\frac{\pi}{4}\right]\cos(n\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t+\phi),\ n=1,2,3...$$

Άσκηση 3

Α) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με τον οριζόντιο άξονα παράλληλο με τον πάγκο και τον κάθετο άξονα να περνάει από το σημείο ισορροπίας της μάζας m_1 (διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα.) Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε σώμα φαίνονται στο Σχήμα. Αναλύοντας σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (διακεκομμένες γραμμές) και εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα βρίσκουμε για τη μάζα m_1



$$N=m_1g+T\cos\theta$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k\,x_1-k\,x_1+T\sin\theta$$

και για τη μάζα m_2 θεωρώντας μικρές γωνίες ταλάντωσης θ για τις οποίες η κατακόρυφη μετατόπιση του της μάζας είναι αμελητέα

$$T\cos\theta = m_2 g$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -T\sin\theta$$

όπου $\cos\theta \approx 1$ και $\sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell}$. Επομένως $T \approx m_2 g$ και οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -2k\,x_1 + m_2 g\frac{x_2 - x_1}{\ell} \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -m_2 g\frac{x_2 - x_1}{\ell} \end{aligned}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{2k}{m_1}x_1 + \frac{m_2 g}{m_1}\frac{x_2 - x_1}{\ell} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -g\frac{x_2 - x_1}{\ell} \end{aligned}\right]$$

και αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος $m_1 = m_2 = m$ και $k = \frac{2mg}{\ell}$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -5\frac{g}{\ell}x_1 + \frac{g}{\ell}x_2$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{g}{\ell}x_1 - \frac{g}{\ell}x_2$$

Β) Οι εξισώσεις γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5g}{\ell} & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

αντικαθιστώντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi)$, $x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi)$ καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} -\frac{5g}{\ell} + \omega^2 & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} + \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

το οποίο έχει μη τετριμμένες λύσεις όταν

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{5g}{\ell} + \omega^2 & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} + \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{5g}{\ell} + \omega^2\right]\left(-\frac{g}{\ell} + \omega^2\right) - \left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega^4 - \frac{6g}{\ell}\omega^2 + 4\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια ως προς ω^2 εξίσωση βρίσκουμε

$$\omega_{\pm}^{\;2} = \frac{g}{\ell}\left(3 \pm \sqrt{5}\right) \Rightarrow \omega_{\pm} = \sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (2)$$

και συνεπώς οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$f_{\pm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Γ)Αντικαθιστώντας την τιμή του ω^2 για τον πρώτο αρμονικό τρόπο ταλάντωσης από την (2) στην (1) βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} -\frac{5g}{\ell}+\frac{g}{\ell}\left(3+\sqrt{5}\right) & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell}+\frac{g}{\ell}\left(3+\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{\ell}\left(-2+\sqrt{5}\right) & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell}\left(2+\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \frac{g}{\ell}\left(-2+\sqrt{5}\right)A_1^+ +\frac{g}{\ell}A_2^+ =0\Rightarrow \frac{A_2^+}{A_1^+}=\left(2-\sqrt{5}\right)$$

και αντίστοιχα για το δεύτερο

$$\begin{pmatrix} -\frac{5g}{\ell}+\frac{g}{\ell}\left(3-\sqrt{5}\right) & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell}+\frac{g}{\ell}\left(3-\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^- \\ A_2^- \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

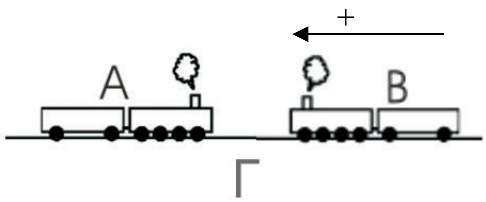
$$\begin{pmatrix} \frac{g}{\ell}\left(-2-\sqrt{5}\right) & \frac{g}{\ell} \\ \frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell}\left(2-\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^- \\ A_2^- \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \frac{g}{\ell}\left(-2-\sqrt{5}\right)A_1^- +\frac{g}{\ell}A_2^- =0\Rightarrow \frac{A_2^-}{A_1^-}=\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Άσκηση 4

Για το φαινόμενο Doppler, ο γενικός τύπος που δίνει την συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής f' συναρτήσει της συχνότητας της πηγής f είναι σύμφωνα με τη σχέση (18.60) του βιβλίου των Alonso και Finn

$$f' = f\left(\frac{\upsilon - \upsilon_{\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\eta\tau\eta}}{\upsilon - \upsilon_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}}\right)$$

όπου υ η ταχύτητα του ήχου και θετική φορά θεωρούμε τη φορά από την πηγή προς τον παρατηρητή (σημειώνεται με βέλος στο Σχήμα). Οι ταχύτητες της πηγής και του



παρατηρητή λαμβάνονται ως προς τον ακίνητο αέρα.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος πηγή είναι ο Β ο οποίος εκπέμπει συχνότητα $f = 440\text{Hz}$ ενώ παρατηρητές είναι στην μία περίπτωση (α) ο Γ ο οποίος ακούει συχνότητα $f_\Gamma = \sqrt[12]{2}\, f$ και στην άλλη (β) ο Α ο οποίος ακούει συχνότητα $f_A = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 f$.

Εφαρμόζουμε τα δεδομένα:

(α) Ο ακίνητος Γ ακούει f_Γ

$$f_\Gamma = f_B \frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_B} \Rightarrow \sqrt[12]{2}\, f = f\frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_B} \Rightarrow \sqrt[12]{2}\left(\upsilon-\upsilon_B\right)=\upsilon$$

$$\Rightarrow \upsilon_B = \left(1-\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)\upsilon \Rightarrow \upsilon_B = 19.1\text{m/s} = 68.7\text{km/h}$$

(β) Ο κινούμενος αντίθετα με τη θετική φορά Α με ταχύτητα μέτρου υ_A ακούει συχνότητα $f_A = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 f$, συνεπώς

$$f_A = f_B \frac{\upsilon-\left(-\upsilon_A\right)}{\upsilon-\upsilon_B} \Rightarrow \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 f = f\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_B} \Rightarrow \sqrt[6]{2}\left(\upsilon-\upsilon_B\right)=\upsilon+\upsilon_A$$

$$\Rightarrow \upsilon_A = \sqrt[6]{2}\left(\upsilon-\upsilon_B\right)-\upsilon \Rightarrow \upsilon_A = 20.2\text{m/s} = 72.8\text{km/h}$$

Άσκηση 5

Α) Εφόσον η γραμμική πυκνότητα αυξάνεται γραμμικά η έκφραση $\mu(x)$ πρέπει να γράφεται ως $\mu(x) = a + bx$ με $\mu(0)=\mu_1, \mu(L)=\mu_2$. Συνεπώς $a=\mu_1$, $b=\dfrac{\mu_2-\mu_1}{L}$ και

$$\mu(x) = \mu_1 + \frac{\mu_2-\mu_1}{L}x$$

Β) Από τον ορισμό της ταχύτητας και τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα διάδοσης με τη γραμμική πυκνότητα και την τάση

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{T}{\mu(x)}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x}} \Rightarrow dx\sqrt{\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x} = \sqrt{T}\,dt$$

Ο παλμός ξεκινάει από το σημείο $x=0$ τη στιγμή $t=0$ και φτάνει στο σημείο $x=L$ τη στιγμή $t=\tau$. Ολοκληρώνοντας κατάλληλα

$$\int_{x=0}^{x=L} dx\sqrt{\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x} = \int_{t=0}^{t=\tau} dt\sqrt{T} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{\mu_2-\mu_1}\int_{x=0}^{x=L}\sqrt{\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x}\; d\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x\right) = \sqrt{T}\,\tau \Rightarrow$$

$$\frac{2L}{3\left(\mu_2-\mu_1\right)}\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=0}^{x=L} = \sqrt{T}\,\tau \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{2L}{3\sqrt{T}\left(\mu_2-\mu_1\right)}\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{L}L\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\mu_1\right)^{\frac{3}{2}}\right] \Rightarrow$$

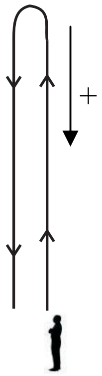
$$\tau = \frac{2L}{3\sqrt{T}\left(\mu_2-\mu_1\right)}\left(\mu_2^{\frac{3}{2}} - \mu_1^{\frac{3}{2}}\right)$$

Άσκηση 6

Α,Β) Όταν η σφυρίχτρα ανεβαίνει η ταχύτητά της θα δίνεται από

$$\upsilon_{s\alpha} = \upsilon_0 - g\,t$$

και έχει διεύθυνση αντίθετη με τη διεύθυνση πηγής $\rightarrow$ παρατηρητή (την οποία θεωρούμε ως θετική, βλ. Σχήμα). Η συχνότητα που θα ακούει ο παρατηρητής θα δίνεται λοιπόν από



$$f_\alpha = f_0 \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{s\alpha}} = f_0 \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{s\alpha}} = 300 \frac{340}{340 + 20 - 10t} = \frac{10200}{36 - t} \quad (1)$$

Όταν η σφυρίχτρα φτάσει στο μέγιστο ύψος $\upsilon_s = 0 \Rightarrow \upsilon_0 = g\,t_1 \Rightarrow t_1 = 2\,\text{s}$.

Συνεπώς η σχέση (1) ισχύει για 0<t<2s.

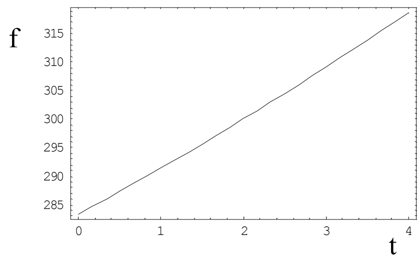
Μετά η σφυρίχτρα θα αρχίσει να πέφτει εκτελώντας επιταχυνόμενη κίνηση συνεπώς η ταχύτητά της θα ισούται με

$$\upsilon_{s\kappa} = g\,(t - t_1)$$

και καθώς η φορά κίνησης της πηγής συμπίπτει με τη φορά πηγής$\rightarrow$παρατηρητή θα έχουμε

$$f_\kappa = f_0 \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{s\kappa}} = f_0 \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{s\kappa}} = 300 \frac{340}{340 - 10t + 20} = \frac{10200}{36 - t} \quad (2)$$

Η οποία ισχύει από το μέγιστο ύψος μέχρι να φτάσει η σφυρίχτρα στο έδαφος, δηλαδή για 2s<t<4s. Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ο τύπος που δίνει τη συχνότητα είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις και υπολογίζοντας τις τιμές για ενδιάμεσα σημεία καταλήγουμε στη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος. Ας σημειωθεί ότι επειδή η ταχύτητα του ήχου είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα της σφυρίχτρας μπορούμε να αγνοήσουμε την καθυστέρηση που υπάρχει λόγω της απόστασης που διανύει ο ήχος από τη σφυρίχτρα μέχρι το αυτί του παρατηρητή.

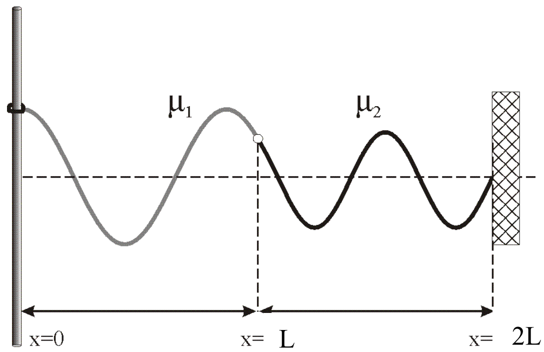


Άσκηση 7

Για κάθε χορδή η διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu_2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

όπου η τάση T είναι κοινή και για τις δύο χορδές. Εφόσον αναζητούμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, οι δύο χορδές θα έχουν την ίδια συχνότητα, άρα ψάχνουμε λύσεις της μορφής



$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= (A\cos k_1 x + B\sin k_1 x)\sin(\omega t) \\ y_2(x,t) &= (C\cos k_2 x + D\sin k_2 x)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

. Θέτοντας τις λύσεις αυτές στις διαφορικές εξισώσεις, καταλήγουμε στη γνωστή σχέση $\omega^2 = \frac{T}{\mu_1}k_1^2 = \frac{T}{\mu_2}k_2^2 \Rightarrow \frac{k_1^2}{\mu_1} = \frac{k_2^2}{\mu_2}$ (1)

Το άκρο $x = 2L$ είναι ακίνητο, συνεπώς

$$y_2(2L,t) = 0 \Rightarrow (C\cos 2k_2L + D\sin 2k_2L)\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow C\cos 2k_2L + D\sin 2k_2L = 0 \quad (2)$$

Επίσης, στο σημείο ένωσης των δύο χορδών θα πρέπει να έχουμε
$y_1(L,t) = y_2(L,t) \Rightarrow A\cos k_1 L + B\sin k_1 \mathrm{L} = C\cos k_2 L + D\sin k_2 L$ (3)
και
$y_1^{'}(L,t) = y_2^{'}(L,t) \Rightarrow -k_1(A\sin k_1 L - B\cos k_1 \mathrm{L}) = -k_2(C\sin k_2 L - D\cos k_2 \mathrm{L})$ (4)

Τέλος, στο ελεύθερο άκρο η εγκάρσια δύναμη πρέπει να είναι μηδέν, άρα
$y_1^{'}(0,t) = 0 \Rightarrow -k_1(A\sin k_1 0 - B\cos k_1 0) = 0 \Rightarrow B = 0$ (5)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1)-(5) παίρνουμε το σύστημα με αγνώστους τα A, C και D.

$$\begin{aligned}
&A\cdot 0 + C\cos 2u\,k_1 L + D\sin 2uk_1 L = 0 \\
&A\cos k_1 L - C\cos uk_1 L - D\sin u\,k_1 L = 0 \qquad \text{όπου } u = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \\
&A(-k_1 \sin k_1 \mathrm{L}) + C(\mathrm{u}k_1 \sin uk_1 \mathrm{L}) + D(u\,k_1 \cos uk_1 \mathrm{L}) = 0
\end{aligned}$$

Για να έχει το σύστημα αυτό μη μηδενικές λύσεις, πρέπει η ορίζουσα των συνελεστών A, C και D να είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos 2uk_1 L & \sin 2uk_1 L \\ \cos k_1 L & -\cos uk_1 L & -\sin uk_1 L \\ -k_1 \sin k_1 L & u\,k_1 \sin u\,k_1 L & u\,k_1 \cos u\,k_1 L \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως το k_1, που είναι και ο μοναδικός άγνωστος στην ορίζουσα, μπορεί να υπολογιστεί από τις λύσεις της εξίσωσης. Αντικαθιστώντας τις τιμές του k_1 στη σχέση $\omega^2 = \frac{T}{\mu_1}k_1^2 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}k_1$ βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες.

Άσκηση 8
Για να επαληθεύσουμε ότι το στάσιμο κύμα που μας δίνεται ικανοποιεί την κυματική εξίσωση αρκεί εφαρμόζοντας τις παραγωγήσεις και αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση να καταλήξουμε σε μία εξίσωση διασποράς.

$$z(x,y,t) = A\sin\left(p\,x\right)\sin\left(q\,y\right)\cos\left(\omega\,t\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Ap\cos(px)\sin(qy)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -Ap^2\sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t) \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Aq\sin(px)\cos(qy)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -Aq^2\sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t) \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -A\omega \sin(px)\sin(qy)\sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t) \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \underset{(III)}{\overset{(I)-(II)}{\Rightarrow}}$$

$$-Ap^2 \sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t) - Aq^2 \sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t) = -A\omega^2 \sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t)$$

$$A\sin(px)\sin(qy)\cos(\omega t)\left(\frac{\omega^2}{\upsilon^2} - p^2 - q^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\upsilon^2} - p^2 - q^2\right) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \upsilon^2(p^2 + q^2)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια σχέση διασποράς, το στάσιμο κύμα $z(x,y,t) = A\sin(p\,x)\sin(q\,y)\cos(\omega\,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση κύματος.

Για $x = L \Leftarrow z(L,y,t) = 0 \Rightarrow A\sin(p\,L)\sin(q\,y)\cos(\omega\,t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(p\,L) = 0 \Rightarrow \sin(p\,L) = \sin(n\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

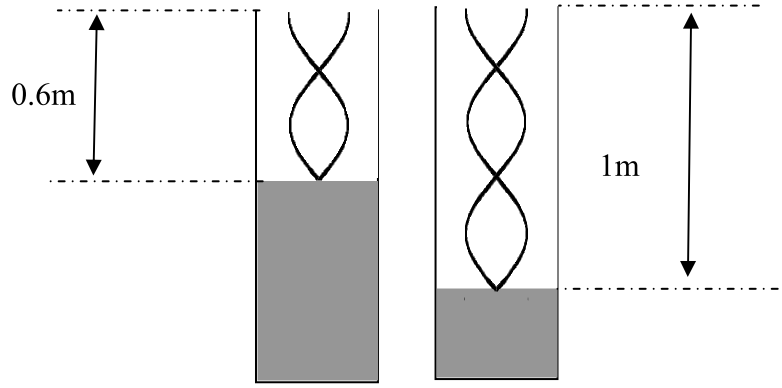
Για $y = L \Leftarrow z(x,L,t) = 0 \Rightarrow A\sin(p\,x)\sin(q\,L)\cos(\omega\,t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(q\,L) = 0 \Rightarrow \sin(q\,L) = \sin(m\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{m\pi}{L} \qquad (m = 1,2,3,...)$$

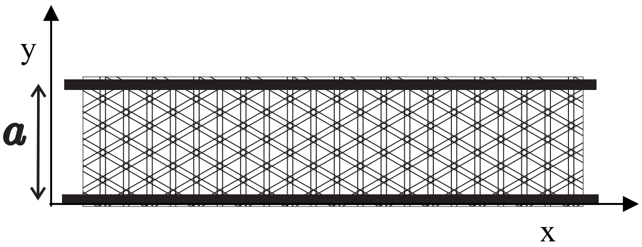
Άσκηση 9

Η ένταση του ήχου θα είναι μέγιστη όταν το μήκος της κολόνας του αέρα είναι τέτοιο ώστε να σχηματίζεται στάσιμο κύμα μεταξύ του στομίου του δοχείου και της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού (συντονισμός). Το



στάσιμο κύμα θα έχει δεσμό στην επιφάνεια του υγρού και κοιλία στο στόμιο του δοχείου (βλ. σχήμα). Η διαφορά ύψους *d* της κολόνας αέρα ανάμεσα στις 2 θέσεις συντονισμού αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ 2 διαδοχικών θέσεων συντονισμού, δηλ. στην απόσταση μεταξύ 2 διαδοχικών δεσμών, η οποία ως γνωστό ισούται με *λ/2*, όπου λ το μήκος κύματος με *λ=υ/ν*. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει *υ=2 d ν=2 0.4 440 m/sec =352 m/sec*

Άσκηση 10



Η γενική μορφή ενός κύματος στις δύο διαστάσεις μπορεί να γραφτεί ως $\xi(x,y,t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$ όπου $\vec{r} = \left(x,y\right)$ και $\vec{k} = \left(k_x,k_y\right)$, συνεπώς $\xi(x,y,t) = A\sin\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)$.

Στο πρόβλημα έχουμε ανάκλαση στον άξονα y συνεπώς η γενική μορφή του κύματος θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός ενός κύματος με κυματάνυσμα $\vec{k} = \left(k_x,k_y\right)$ και ενός με $\vec{k} = \left(k_x,-k_y\right)$ δηλαδή $\xi(x,y,t) = A_1\sin\left(\omega t - k_x x - k_y y\right) + A_2\sin\left(\omega t - k_x x + k_y y\right)$ όπου μπορούμε να δούμε εύκολα (εφαρμόζοντας πχ την οριακή συνθήκη $\xi(x,0,0)=0$) ότι $A_1 = -A_2$ και συνεπώς

$$\xi(x,y,t) = A_1\left[\sin\left(\omega t - k_x x - k_y y\right) - \sin\left(\omega t - k_x x + k_y y\right)\right]$$

$$= 2A_1\sin\left[\frac{\left(\omega t - k_x x - k_y y\right) - \left(\omega t - k_x x + k_y y\right)}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(\omega t - k_x x - k_y y\right) + \left(\omega t - k_x x + k_y y\right)}{2}\right]$$

$$= -2A_1\sin\left(k_y y\right)\cos\left(\omega t - k_x x\right) = B\sin\left(k_y y\right)\cos\left(\omega t - k_x x\right)$$

όπου $B = -2A_1$.

Συνεπώς κατά μήκος του x-άξονα (απείρου μήκους) αναπτύσσεται τρέχον κύμα $\cos(\omega t - k_x x)$ και κατά τον y-άξονα όπου τα άκρα, y=0 και y=α, είναι πακτωμένα, άρα αναπτύσσεται στάσιμο κύμα $\sin(k_y y)$.

Από τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε ακόμη

$$\xi(x,a,t) = 0 \Rightarrow \sin(k_y a) = 0 \Rightarrow k_y a = n\pi, \quad n = 1,2,3..$$

(n = 0 σημαίνει ακινησία). Τελικά το κύμα γράφεται

$$\xi(x,y,t) = B\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\omega t - k_x x\right)$$

Β) Από τον ορισμό του $\vec{k}$ έχουμε

$$k = \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{k_x^{\,2} + k_y^{\,2}} = \sqrt{k_x^{\,2} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^{\,2} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}$$

Στην τελευταία σχέση το k_x παίρνει συνεχείς τιμές και συνεπώς $k_x^{\,2} \geq 0$. Η ελάχιστη τιμή του λ είναι το μηδέν που αντιστοιχεί σε άπειρο k_x. Η μέγιστη τιμή του

λ αντιστοιχεί σε $k_x = 0$ και $n = 1$. Συνεπώς οι περιορισμοί στο μήκος κύματος είναι $0 \le \lambda \le 2a$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τα κύματα μπορούν να εκφραστούν ως εξής

$\xi_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$\xi_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{4})$

Η επαλληλία τους θα δώσει:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{4}) =$$

$$2A\cos\left(\frac{(kx - \omega t) - (kx - \omega t - \frac{\pi}{4})}{2}\right)\sin\left(\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t - \frac{\pi}{4})}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\xi(x,t) = 2A\cos\frac{\pi}{8}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{8}\right) = A\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{8}\right)$$

Η τελευταία δείχνει αρμονικό κύμα με *πλάτος* $2A\cos\frac{\pi}{8} = A\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1.85A$, κυκλική συχνότητα *ω*, και καθυστέρηση φάσης *π/8* σε σχέση με το πρώτο κύμα.

2) Η ένταση σφαιρικού κύματος της μορφής $p - p_0 = \frac{P_0}{r}\sin(kr - \omega t)$ δίνεται από την σχέση

$$I = \frac{P_0^2}{2\upsilon\rho_0}\frac{1}{r^2}. \quad (1)$$

Από την δεδομένη εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι τα χαρακτηριστικά του κύματος πίεσης είναι

$P_0 = 0.2$ N/m

$\omega = 2\pi\nu = \pi\cdot 300\ \mathrm{s^{-1}} \Rightarrow \nu = 150$ Hz

$\upsilon = \omega/k = 300/0.909 = 330$ m/s

Θεωρώντας ότι η πυκνότητα του αέρα είναι $\rho_0 = 1.168\ \mathrm{Kg/m^3}$, η αντικατάσταση των παραπάνω τιμών στην (1) δίνει

$$I = \frac{0.2^2}{2\cdot 330\cdot 1.168}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mathrm{N^2}}{\mathrm{m^2}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{Kg}}\frac{1}{\mathrm{m^2}}\right] = 5.19\times 10^{-5}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right], \ r \text{ σε μέτρα.} \quad (2)$$

Από το διάγραμμα ακουστότητας (βλ. σελίδα 34 Alonso & Finn) βρίσκουμε ότι το όριο ακουστότητας για τη συχνότητα $\nu = 150$ Hz είναι περίπου $I = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στην (2) υπολογίζουμε $r = 720$ m.

Η ένταση του ήχου σε dB δίνεται από την σχέση

$$B = 10\log\frac{I}{I_0} \quad (3)$$

όπου $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ η ένταση αναφοράς. Θέτοντας $I = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$, βρίσκουμε ότι $B = 20$ dB.

3) Α. Το πλάτος του στάσιμου κύματος είναι $A(x) = y_0\cos(2\pi x/\mathrm{L})$ και εύκολα βλέπουμε ότι γίνεται μέγιστο στα άκρα του σωλήνα, $A(x = 0) = A(x = L) = y_0$. Επειδή ο σωλήνας είναι ανοιχτός, ένα στάσιμο κύμα που περιγράφει μετατόπιση ξ θα παρουσιάζει στα άκρα του κοιλίες ($A = y_0$) ενώ αντίθετα ένα κύμα που περιγράφει μεταβολή πίεσης ή πυκνότητας θα παρουσιάζει δεσμούς ($A = 0$) γιατί $p - p_0 = -\kappa\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ και $\rho - \rho_0 = -\rho_0\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$. Συνεπώς, το φυσικό μέγεθος που περιγράφει η δεδομένη εξίσωση είναι μετατόπιση.

Η συχνότητα του συγκεκριμένου στάσιμου κύματος είναι $\nu = \upsilon k/2\pi = \upsilon/L$.

Για τον ανοιχτό σωλήνα οι αρμονικές είναι $\nu_{\mathrm{n}} = \mathrm{n}\upsilon/2L$, όπου n = 1, 2, 3, ...

Από την σύγκριση προκύπτει n = 2, και άρα έχουμε την δεύτερη αρμονική.

Β. Για σωλήνα με ένα άκρο κλειστό, οι αρμονικές δίνονται από την ν'_m = $(2\mathrm{m}+1)\upsilon/4L$, όπου m = 0, 1, 2, … Εδώ η τρίτη αρμονική αντιστοιχεί σε $m = 2$. Για να έχουμε $\nu_2 = \nu_2' \Rightarrow \upsilon/L = 5\,\upsilon/4L' \Rightarrow L' = 5L/4$.

4)) Η διαφορά των ακουστοτήτων δίνεται από

$$B - B' = 10(\log\frac{I}{I_0} - \log\frac{I'}{I_0}) = 10\log(I/I') \Rightarrow I/I' = 10^2 = 100$$

$$B - B' = 20\mathrm{dB}$$

$$\frac{I}{I'} = \frac{P_0^2}{P_0'^2} = 100 \Rightarrow \frac{P_0}{P_0'} = 10$$

5) Η συνάρτηση περιγράφει κύμα που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά. Η ισχύς που μεταφέρεται σε ένα σημείο x της χορδής είναι $P = \mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}_{\kappa\alpha\theta}$, όπου $\boldsymbol{\upsilon}_{\kappa\alpha\theta}$ είναι η κάθετη ταχύτητα του τμήματος της χορδής και **F** είναι η δύναμη που ασκείται σ’αυτό το τμήμα της χορδής από τα αριστερά. Η δύναμη αυτή είναι αντίθετη στη φορά της ταχύτητας και έχει μέτρο $F_{\kappa\alpha\theta} = T\sin\alpha \simeq T\tan\alpha = T\dfrac{\partial y}{\partial x}$ (δες και Alonso-Finn, σελ. 23). Άρα η ισχύς δίνεται από την $P = \mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}_{\kappa\alpha\theta} = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t}$, οπότε παραγωγίζοντας βρίσκουμε $P = -TA^2k(-\omega)\cos^2(kx - \omega t) = A^2T\omega k\cos^2(kx - \omega t)$.

Κάνοντας χρήση της σχέσης $\upsilon = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, η ισχύς γράφεται $P = A^2\mu\upsilon\omega^2\cos^2(kx - \omega t)$, όπου υ είναι η *ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή* (να μην συγχέεται με την $\boldsymbol{\upsilon}_{\kappa\alpha\theta}$). Η μέση ισχύς δίνεται από

$$\langle P\rangle = A^2\mu\upsilon\omega^2\langle\cos^2(kx - \omega t)\rangle = \frac{1}{2}A^2\mu\upsilon\omega^2 .$$