11/11/2007

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2007-08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 2ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 11/12/07

Άσκηση 1

Αντικαθιστούμε τις δοθείσες εκφράσεις στις εξισώσεις του Maxwell στο κενό. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{B}}=0$ ικανοποιούνται αυτόματα. Από τις άλλες δύο εξισώσεις έχουμε

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_o\sin(kx-\omega t) & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial t}B_0\cos\left(kx-\omega t+\varphi\right)\hat{z}\Rightarrow$$

$$E_o k\cos(kx-\omega t)\hat{z}=-B_0\omega\sin\left(kx-\omega t+\varphi\right)\hat{z}\Rightarrow$$

$$E_o k\cos(kx-\omega t)=-B_0\omega\sin\left(kx-\omega t+\varphi\right)\qquad(1)$$

και

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & B_o\cos(kx-\omega t+\varphi)\end{vmatrix}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_0\sin\left(kx-\omega t\right)\hat{y}\Rightarrow$$

$$\hat{y}\,k\,B_o\sin(kx-\omega t+\varphi)=-\omega\mu_0\varepsilon_0E_0\cos\left(kx-\omega t\right)\hat{y}\Rightarrow$$

$$\omega\,\mu_0\varepsilon_0E_0\cos\left(kx-\omega t\right)=-k\,B_o\sin(kx-\omega t+\varphi)\qquad(2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\frac{E_o k}{\omega\,\mu_0\varepsilon_0E_0}=\frac{B_0\omega}{k\,B_o}\Rightarrow k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$$

και χρησιμοποιώντας $k=2\pi/\lambda,\omega=2\pi c/\lambda\Rightarrow\omega/k=c$ βρίσκουμε

$$k^2=k^2c^2\mu_0\varepsilon_0\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

που δίνει τη γνωστή σχέση για την ταχύτητα του φωτός και συνεπώς οι εξισώσεις (1) και (2) είναι συμβατές. Από την (1) και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του ημιτόνου $\sin\left(kx-\omega t+\varphi\right)=\sin\left(kx-\omega t\right)\cos\phi+\cos\left(kx-\omega t\right)\sin\phi$ και $\omega/k=c$ βρίσκουμε

$$\left[E_o+B_0c\sin\varphi\right]\cos(kx-\omega t)+\left[B_0c\cos\phi\right]\sin\left(kx-\omega t\right)=0$$

Ο μόνος τρόπος να ικανοποιείται η παραπάνω εξίσωση για οποιαδήποτε τιμή των x,t είναι ο ταυτόχρονος μηδενισμός των συντελεστών του ημιτόνου και συνημίτονου δηλαδή

$$\cos\varphi=0\qquad(3)$$

$$E_o+B_0c\sin\varphi=0\qquad(4)$$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι $\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, συνεπώς $\sin\varphi = (-1)^n$

και $B_0 = -(-1)^n \frac{E_o}{c}$

Άσκηση 2

Α)Σύμφωνα με τις εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_o \cos(kz - \omega t) & E_o \sin(kz - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{x}\, k\, E_o \cos(kz - \omega t) + \hat{y}\, k\, E_o \sin(kz - \omega t) \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \hat{x}\, k\, E_o \int dt \cos(kz - \omega t) + \hat{y}\, k\, E_o \int dt \sin(kz - \omega t) + \vec{C} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{x} \frac{k\, E_o}{\omega} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \frac{k\, E_o}{\omega} \cos(kz - \omega t) + \vec{C}$$

Το $\vec{C}$ θα μπορούσε να ήταν γενικώς αυθαίρετη συνάρτηση των x,y,z αλλά εδώ μας δίνεται ότι $\vec{B}(kz - \omega t)$ συνεπώς μπορεί να είναι μόνο ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$. Μας δίνεται επίσης ($k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi c/\lambda \Rightarrow \omega/k = c$

$$\vec{B}(t=0, z=0) = \left(0, \frac{E_0}{c}, 0\right) \Rightarrow \left(C_1, \frac{k\, E_o}{\omega} + C_2, C_3\right) = \left(0, \frac{E_0}{c}, 0\right) \Rightarrow \vec{C} = 0$$

Συνεπώς

$$\vec{B} = -\hat{x} \frac{E_o}{c} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \frac{E_o}{c} \cos(kz - \omega t)$$

Β) Το διάνυσμα του Poynting δίνεται από

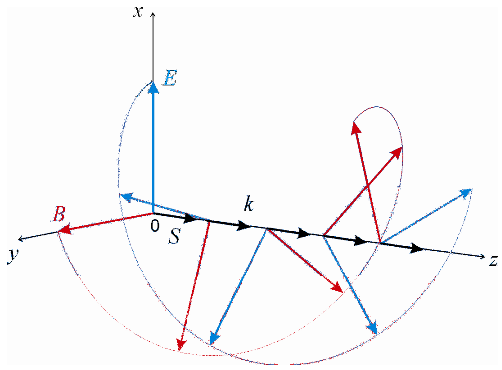
$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_o \cos(kz - \omega t) & E_o \sin(kz - \omega t) & 0 \\ -\frac{E_o}{c} \sin(kz - \omega t) & \frac{E_o}{c} \cos(kz - \omega t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{z} c^2 \varepsilon_0 \left(\frac{E_o{}^2}{c} \cos^2(kz - \omega t) + \frac{E_o{}^2}{c} \sin^2(kz - \omega t) \right) = \hat{z} c \varepsilon_0 E_o{}^2$$

Η ένταση της ακτινοβολίας δίνεται από το μέτρο του διανύσματος Poynting,

$$I = \left|\vec{S}\right| = c \varepsilon_0 E_o{}^2$$

Γ) Στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του Η/Μ κύματος για t=0, με τα ζητούμενα διανύσματα.



Το κυματάνυσμα $\boldsymbol{k}$ και το διάνυσμα του Poynting $\boldsymbol{S}$ παραμένουν σταθερά ενώ τα διανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου περιστρέφονται στο επίπεδο x-y (πρόκειται για κυκλικά πολωμένο Η/Μ κύμα) παραμένοντας κάθετα μεταξύ τους.

Άσκηση 3

Α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (19.58) του βιβλίου των Alonso&Finn και για μία συχνότητα συντονισμού ω_0 και $f_0 = 1$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{1}$$

όπου αφού μας δίνεται ότι το n είναι πολύ κοντά στη μονάδα συμπεραίνουμε

$$\left|\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right| \ll 1$$

Από την (1) και χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}} = 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} + \ldots \Rightarrow \delta n = n - 1 \approx \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2}$$

Β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (19.59) του βιβλίου των Alonso&Finn έχουμε

$$\upsilon_g = \frac{c}{n + \omega\left(dn/d\omega\right)} \tag{3}$$

όπου από την (2)

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{2\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} = \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$

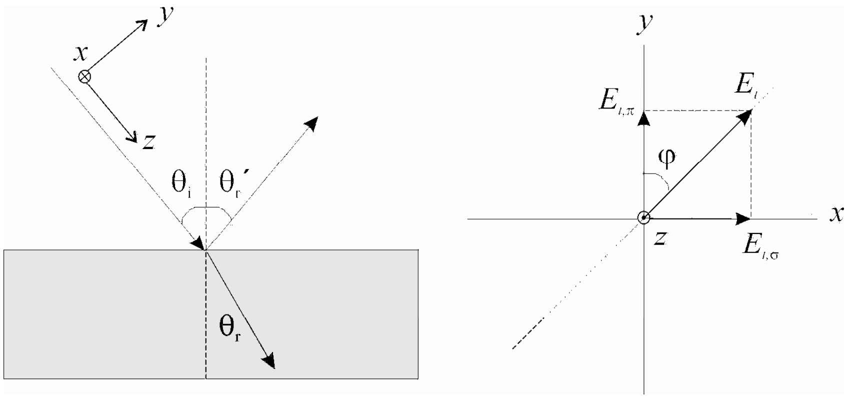
και αντικαθιστώντας στην (3) παίρνουμε

$$\upsilon_g = \frac{c}{1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}} = \frac{c}{1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(1 + \frac{2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right)}$$

$$= \frac{c}{1 + \frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}}$$

Καθώς ο δεύτερος όρος στον παρονομαστή είναι πάντα θετικός, ο παρονομαστής είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδος και έχουμε $\upsilon_g < c$.

Άσκηση 4



Το ζητούμενο της άσκησης είναι η ποσότητα

$$r = \frac{I_{r'}}{I_0} = \frac{|E_{r'}|^2}{|E_i|^2} = \frac{|E_{r',\pi}|^2 + |E_{r',\sigma}|^2}{|E_i|^2} = \frac{|E_{r',\pi}|^2}{|E_i|^2} + \frac{|E_{r',\sigma}|^2}{|E_i|^2} \qquad (1)$$

όπου $E_{r',\pi}$ και $E_{r',\sigma}$ η παράλληλη και κάθετη συνιστώσα του ανακλώμενου κύματος στο επίπεδο πρόσπτωσης (επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις *y* και *z*), αντίστοιχα. Από το σχήμα είναι προφανές ότι το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος E_i συνδέεται με τις δύο συνιστώσες $E_{i,\pi}$ και $E_{i,\sigma}$ μέσω των σχέσεων

$$|E_{i,\pi}| = |E_i|\cos\varphi, \quad |E_{i,\sigma}| = |E_i|\sin\varphi \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση των (2), η σχέση (1) γίνεται

$$r = \frac{|E_{r',\pi}|^2}{|E_{i,\pi}|^2}\cos^2\varphi + \frac{|E_{r',\sigma}|^2}{|E_{i,\sigma}|^2}\sin^2\varphi = R_\pi{}^2\cos^2\varphi + R_\sigma{}^2\sin^2\varphi \qquad (3)$$

όπου τα R_π και R_σ δίνονται από τις σχέσεις (20.25) για το ανακλώμενο κύμα:

$$\begin{aligned} R_\pi &= \frac{E_{r',\pi}}{E_{i,\pi}} = \frac{n_1\cos\theta_r - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_r + n_2\cos\theta_i} \\ R_\sigma &= \frac{E_{r',\sigma}}{E_{i,\sigma}} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_r}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_r} \end{aligned} \qquad (4)$$

Δίνεται ότι $\theta_i = 40^\circ$ ενώ η γωνία διάθλασης θ_r υπολογίζεται από το νόμο του Snell

$$n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_r \Rightarrow \theta_r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_i}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 40^\circ}{1.5}\right) = 25.37^\circ$$

όπου θεωρήσαμε για τον αέρα $n_1 = 1$. Θέτοντας τα δεδομένα στις σχέσεις (4) βρίσκουμε $R_\pi = -0.12$ και $R_\sigma = -0.28$. Τέλος, με βάση το δεδομένο $\varphi = 45^\circ$ η σχέση (3) δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα

$$r = \frac{1}{2}(R_\pi{}^2 + R_\sigma{}^2) = 0.046$$

Συνεπώς το ποσοστό της ανακλώμενης έντασης ισούται με 4.6 %.

Άσκηση 5

Α) Αρχικά, από την πυκνότητα του σφαιριδίου θα υπολογίσουμε τη μάζα του,

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}\pi r^3 d$$

Θεωρούμε ότι η απόσταση Ήλιου – σωματιδίου είναι R. Η βαρυτική έλξη είναι ίση με
$$F = \frac{GM_H m}{R^2} = \frac{GM_H}{R^2}\frac{4}{3}\pi r^3 d$$

Η πίεση ακτινοβολίας στη θέση του σωματιδίου είναι $p = \frac{I}{c}$. Η ένταση ακτινοβολίας I στη θέση του σωματιδίου είναι $I = \frac{P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{4\pi R^2}$. Η δύναμη λόγω πίεσης ακτινοβολίας είναι ίση με $F_{\pi\iota\varepsilon\sigma\eta} = pA$ όπου από τον ορισμό της έντασης A είναι η κάθετη επιφάνεια (διατομή) που δέχεται την ακτινοβολία, η οποία στην περίπτωσή μας ισούται με $A = \pi r^2$. Συνεπώς

$$F_{\pi\iota\varepsilon\sigma\eta} = \frac{I}{c}\pi r^2 = \frac{P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{c4\pi R^2}\pi r^2 = \frac{P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{4cR^2}r^2$$

Η ολική απωστική δύναμη είναι

$$F_{o\lambda\iota\kappa o} = F_{\alpha\pi\omega\sigma} - F_{\varepsilon\lambda\xi\eta} \Rightarrow F_{o\lambda\iota\kappa o} = \frac{P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{4cR^2}r^2 - \frac{GM_H}{R^2}\frac{4}{3}\pi r^3 d$$

Για να απομακρυνθεί το σωματίδιο θα πρέπει $\frac{P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{4cR^2}r^2 \geq \frac{GM_H}{R^2}\frac{4}{3}\pi r^3 d$, άρα

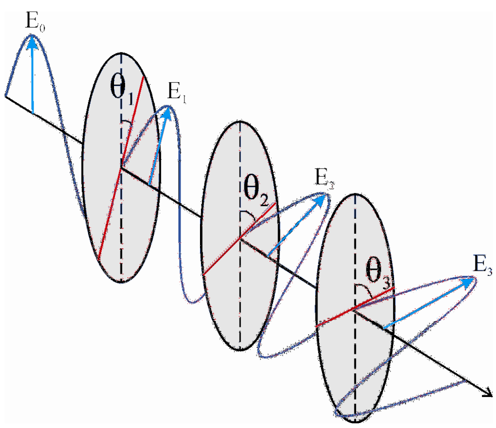
$$r \leq \frac{3P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{16\pi c G M_H d}.$$

Β) Η κρίσιμη ακτίνα είναι $r_o = \frac{3P_{\text{ΗΛΙΟΥ}}}{16\pi c G M_H d}$.

Γ) Όπως διαπιστώνουμε κρίσιμη ακτίνα είναι ανεξάρτητη της απόστασης R του ήλιου από το σωματίδιο

Άσκηση 6

Γενικά, όταν γραμμικά πολωμένο φως διαπερνά γραμμικό πολωτή του οποίου ο άξονας διάδοσης σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, τότε εξέρχεται πολωμένο κατά τη διεύθυνση του άξονα διάδοσης του πολωτή και η ένταση του είναι $I_{out} = I_{in}\cos^2\theta$, όπου I_{in} η ένταση της προσπίπτουσας δέσμης. Συνεπώς μετά την έξοδο από τον πρώτο πολωτή, το φως θα είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση θ_1 και η έντασή του θα είναι $I_1 = I_0\cos^2\theta_1$.



Όμοια, από τον δεύτερο πολωτή θα εξέλθει πολωμένο κατά τη διεύθυνση θ_2 με ένταση ανάλογη του $\cos^2$(της γωνίας μεταξύ του εξερχομένου $\vec{E}_2$ και του προσπίπτοντος $\vec{E}_1$), δηλαδή $I_2 = I_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)$.
Τέλος από τον τρίτο πολωτή η δέσμη θα εξέλθει πολωμένη κατά τη διεύθυνση θ_3 με ένταση $I_3 = I_2\cos^2(\theta_3-\theta_2)$.
Δηλαδή το τελικό φως θα είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση θ_3 με ένταση:

$$I_{\tau\varepsilon\lambda} = I_3 = I_2\cos^2(\theta_3-\theta_2) = I_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)\cos^2(\theta_3-\theta_2) = I_0\cos^2\theta_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)\cos^2(\theta_3-\theta_2)$$

<u>Εφαρμογή</u>:
Α) Αν θ_1= 10^o, θ_2= 40^o, θ_3= 60^o, τότε $I_{\tau\varepsilon\lambda} = I_0\cos^2 10^o\cos^2 30^o\cos^2 20^o = 0.64 I_0$
Β) Αν θ_1= 0^o, θ_2= 30^o, θ_3= 50^o, τότε $I_{\tau\varepsilon\lambda} = I_0\cos^2 0^o\cos^2 30^o\cos^2 20^o = 0.66 I_0$

Άσκηση 7

Α) Ο βρόχος δρα ως μαγνητικό δίπολο μαγνητικής ροπής $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_o\sin(\omega t)$ όπου $\mathfrak{M}_o = I_0\pi\alpha^2$. Αρκετά μακριά από το βρόχο, r>>α, οι όροι ~ $1/r^3$ (και ανώτεροι) έχουν εξασθενήσει και παραμένουν μόνο οι όροι των πεδίων ~ $1/r$. Σε αυτήν την προσέγγιση το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν μέτρα

$$\mathbb{E} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t),\quad \mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t) \tag{1}$$

και συνεπώς η ένταση ισούται με

$$I = \left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle = \left\langle\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|\right\rangle = \left\langle\mathbb{E}\mathbb{B}\right\rangle = \frac{\mu_0^2 c}{16\pi^2}\frac{\mathfrak{M}_0^2\sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\left\langle\sin^2(kr-\omega t)\right\rangle =$$

$$= \frac{\mu_0^2 c}{32\pi^2}\frac{\mathfrak{M}_0^2\sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\left\langle\sin^2(kr-\omega t)\right\rangle = 1/2$. Η μεταλλική επιφάνεια σε απόσταση r από το δίπολο είναι τέλειος ανακλαστής και δέχεται πίεση ακτινοβολίας $P = \frac{2I}{c}$ η οποία ασκεί μέση δύναμη

$$F = PA = A\frac{\mu_0^2}{16\pi^2}\frac{\mathfrak{M}_0^2\sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \tag{2}$$

και καθώς $\theta = \pi/2$,

$$F = A\frac{\mu_0}{16}\frac{I_0^2\alpha^4}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \tag{3}$$

Η ενεργός ένταση ισούται με $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$ και αντικαθιστώντας στην (3)

$$F = A\frac{\mu_0}{16}\frac{2I_{rms}^2\alpha^4}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \Rightarrow I_{rms} = \frac{c^2 r}{\alpha^2\omega^2}\sqrt{\frac{8F}{\mu_0 A}}$$

Β) Η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς δίνεται από την σχέση (19.36) του βιβλίου των Alonso και Finn

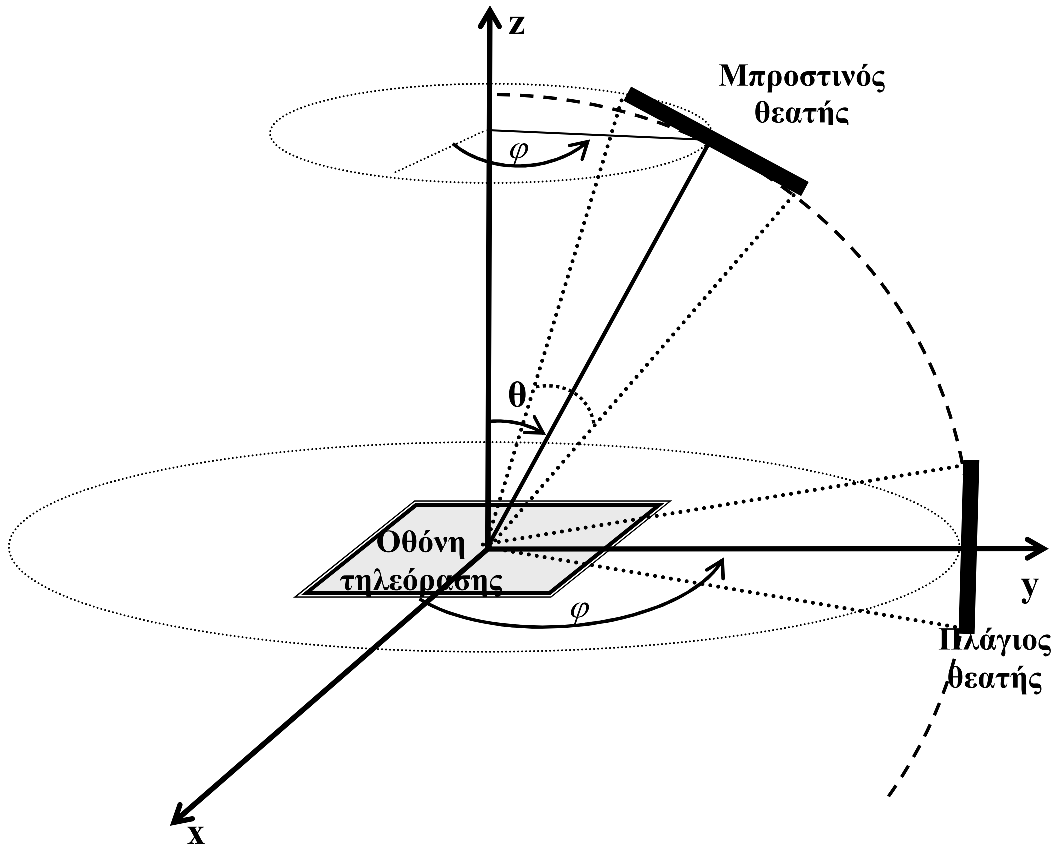
$$\frac{dE}{dt}=\frac{I_0{}^2A^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^5}=\frac{I_0{}^2(\pi\alpha^2)^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^5}=\frac{I_0{}^2\pi\,\alpha^4\,\omega^4}{12\varepsilon_0c^5}=\frac{I_{rms}^2\pi\,\alpha^4\,\omega^4}{6\varepsilon_0c^5}$$

ενώ η ισχύς που καταναλώνεται στο σύρμα (λόγω της αντίστασης $R=\rho(2\pi\alpha)$) είναι $I_{rms}^2\,R$. Η ισχύς τροφοδοσίας πρέπει να καλύπτει και τις δύο, άρα

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{o\lambda}=I_{rms}{}^2\left(R+\frac{\pi\alpha^4\omega^4}{6\varepsilon_0c^5}\right)\Rightarrow\left(\frac{dE}{dt}\right)_{o\lambda}=\frac{8Fr^2}{A\mu_0\alpha^4}\left(\frac{c}{\omega}\right)^4\left(R+\frac{\pi\alpha^4\omega^4}{6\varepsilon_0c^5}\right)\qquad(4)$$

Άσκηση 8

Η διάταξη της οθόνης και των θεατών παρουσιάζεται στο σχήμα με την οθόνη στο επίπεδο x-y



Η ένταση της ακτινοβολίας Χ από το ηλεκτρόνιο που σταματάει στην οθόνη είναι

$$I(\theta)=\frac{q^2a^2}{16\pi^2\varepsilon_oc^3r^2}\sin^2\theta\equiv I_a\sin^2\theta$$

όπου α η επιβράδυνση και $I_a=\dfrac{q^2a^2}{16\pi^2\varepsilon_oc^3r^2}$

Α) Η επιφάνεια στην οποία διαχέεται η ακτινοβολούμενη ισχύς, στην απόσταση του θεατή, αντιστοιχεί στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας $r=2.5\text{m}$, έχει δηλαδή εμβαδόν $4\pi r^2=78.5\text{m}^2$ ενώ η επιφάνεια του θεατή ισούται με $0.6^2\text{m}^2=0.36\text{m}^2$, είναι δηλαδή πολύ μικρότερη. Κάνοντας την εύλογη υπόθεση, ότι η ισχύς σε όλη την επιφάνεια Α είναι περίπου ίση με την ισχύ στο κέντρο της επιφάνειας, ο μπροστινός (στις 30^o) θεατής, ενεργού επιφανείας A, δέχεται ισχύ

$$I(30^o)\,A = I_\alpha\,(1/2)^2\,A = I_\alpha\,A/4\,,$$

ενώ ο πλάγιος (στις 90^o) θεατής, ενεργού επιφανείας A, δέχεται ισχύ

$$I(90^o)\,A = I_\alpha\,(1)^2\,A = I_\alpha\,A\,,$$

Συνεπώς $I(90^0)/I(30^0)=4$ δηλαδή ο θεατής στα πλάγια δέχεται 4 φορές περισσότερη ένταση από τον μπροστινό θεατή.

Β) Παρατηρούμε ότι η εκπεμπόμενη ισχύς δεν εξαρτάται από τη γωνία φ. Επομένως η ισχύς που δέχεται ένας θεατής μπορεί να υπολογιστεί αν διαιρέσουμε την ισχύ που δέχονται οι θεατές σε έναν κύκλο $\left(0\le\varphi<2\pi\right)$ με τον αριθμό των θεατών. Για δεδομένη γωνία θ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι θεατές τοποθετούνται σε κύκλο ακτίνας $r_\theta = 2.5\sin\theta$ και ο καθένας καλύπτει γωνία $\Delta\phi = 0.6/r_\theta = 0.24/\sin\theta$ και $\Delta\theta = 0.6/2.5 = 0.24$ (βρίσκεται δηλαδή στο διάστημα $\left(\theta-0.12,\theta+0.12\right)$)

Για τον μπροστινό θεατή $\theta = 30^0 = \dfrac{\pi}{6}$ και $\Delta\phi = 0.24/0.5 = 0.48$ και ο κύκλος καλύπτεται με $2\pi/0.48 \approx 13$ θεατές. Όλοι μαζί δέχονται ισχύ

$$I_\mu = \int I(\theta)dA = I_a\, r^2 \int_{\pi/6-0.12}^{\pi/6+0.12} d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi I_a 2.5^2 \int_{\pi/6-0.12}^{\pi/6+0.12} d(\cos\theta)\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$= 2\pi I_a 2.5^2 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/6-0.12}^{\pi/6+0.12} = 1.22 I_a$$

Ο κάθε θεατής λοιπόν δέχεται ισχύ $I(30^0) = I_\pi/13 = 1.22 I_a/13 = 0.094 I_a$

Για τον πλάγιο θεατή $\theta = 90^0 = \dfrac{\pi}{2}$ και $\Delta\phi = 0.24/1 = 0.24$ και ο κύκλος καλύπτεται με $2\pi/0.24 \approx 26$ θεατές. Όλοι μαζί δέχονται ισχύ

$$I_\pi = \int I(\theta)dA = I_a\, r^2 \int_{\pi/2-0.12}^{\pi/2+0.12} d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi I_a 2.5^2 \int_{\pi/2-0.12}^{\pi/2+0.12} d(\cos\theta)\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$= 2\pi I_a 2.5^2 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/2-0.12}^{\pi/2+0.12} = 9.36 I_a$$

Επομένως ο κάθε θεατής στο πλάι δέχεται ισχύ
$I(90^0) = I_\pi/26 = 9.36 I_a/26 = 0.360 I_a$
Ο ζητούμενος λόγος με αυτή τη μέθοδο υπολογισμού ισούται με $I(90^0)/I(30^0) \approx 3.8$

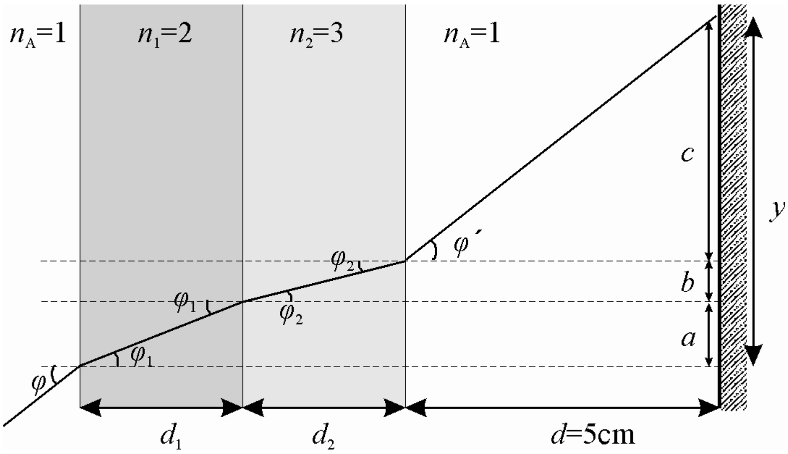
Άσκηση 9

Α) Θεωρώντας ότι $n_A = 1$ (δείκτης διάθλασης του αέρα) και εφαρμόζοντας τον νόμο του Snell έχουμε

$$n_A \sin\varphi = n_1 \sin\varphi_1 \Rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi}{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = 20.7^{\circ}$$

$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \Rightarrow \sin\varphi_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi_2 = 13.6^{\circ}$$

$$n_2 \sin\varphi_2 = n_A \sin\varphi' \Rightarrow \sin\varphi' = \frac{n_2}{n_A}\sin\varphi_2 = \frac{3}{1}\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi' = 45^{\circ}$$



Από τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις *a*, *b*, και *c*:

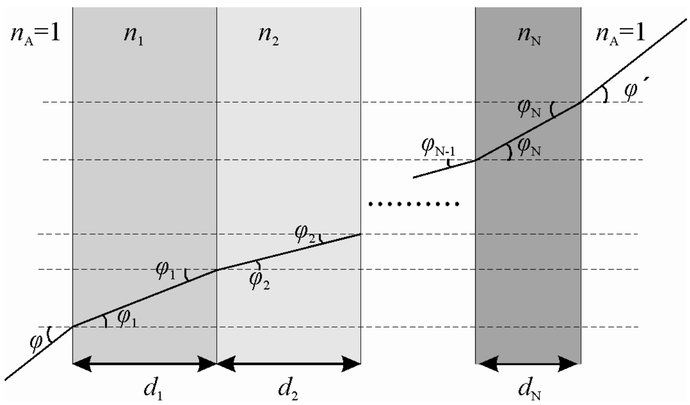
$$\tan\varphi_1 = \frac{a}{d_1} \Rightarrow a = d_1 \tan\varphi_1 = \sqrt{7}\tan 20.7^{\circ}\mathrm{cm} \Rightarrow a = 1\mathrm{cm}$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{b}{d_2} \Rightarrow b = d_2 \tan\varphi_2 = \frac{\sqrt{17}}{2}\tan 13.6^{\circ}\mathrm{cm} \Rightarrow b = 0.5\mathrm{cm}$$

$$\tan\varphi' = \frac{c}{d} \Rightarrow c = d\tan\varphi' = 5\tan 45^{\circ}\mathrm{cm} \Rightarrow c = 5\mathrm{cm}$$

Άρα η ζητούμενη απόσταση είναι $y = a + b + c = 6.5\mathrm{cm}$ και επομένως η δέσμη θα χτυπήσει πάνω στην οθόνη 6.5 cm πάνω από το σημείο που εισήλθε στο πρώτο πλακίδιο.

Β) Έστω ότι έχουμε Ν πλήθος πλακιδίων με διαφορετικά πάχη και δείκτες διάθλασης. Υποθέτουμε ότι οι δείκτες διάθλασης των πλακιδίων είναι n_1, n_2, …, n_N και οι γωνίες εισόδου και εξόδου φ και φ', αντίστοιχα.

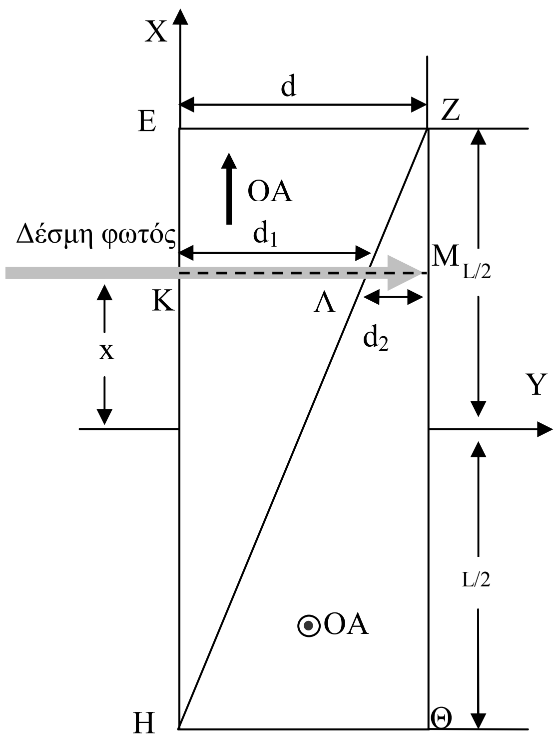


Εφαρμόζοντας διαδοχικά το νόμο του Snell βρίσκουμε:

$$n_A \sin\varphi = n_1 \sin\varphi_1$$
$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2$$
$$............................$$
$$n_{N-1} \sin\varphi_{N-1} = n_N \sin\varphi_N$$
$$n_N \sin\varphi_N = n_A \sin\varphi'$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:
$n_A \sin\varphi = n_A \sin\varphi' \Rightarrow \varphi = \varphi'$. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γωνία εισόδου της δέσμης είναι ίση με τη γωνία εξόδου ανεξάρτητα του αριθμού και του είδους των πλακιδίων που διαπερνά.

Άσκηση 10



Α)Από τα δεδομένα της άσκησης και όσον αφορά το αριστερό πλακίδιο έχουμε πρόσπτωση κάθετα στον οπτικό άξονα με:

$$E_x = E_z = E/\sqrt{2}$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του παραδείγματος 20.4 των σελ. 162-163 του βιβλίου των Alonso και Finn, η διαφορά φάσης μεταξύ τακτικής και έκτακτης ακτίνας της δέσμης στο αριστερό πρίσμα είναι

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi d_1 \frac{(n_1 - n_2)}{\lambda} \quad (1)$$

Στο δεξί πρίσμα και καθώς $d << L$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πρόσπτωση είναι επίσης κάθετη στην επιφάνεια και εφαρμόζοντας τον ίδιο τύπο η διαφορά φάσης ισούται με

$$\Delta\varphi_2 = 2\pi d_2 \frac{(n_2 - n_1)}{\lambda} \quad (2)$$

όπου d_1, d_2 οι αποστάσεις που διανύει το φως μέσα στο αριστερό και το δεξί πρίσμα αντίστοιχα.
Η συνολική διαφορά φάσης στην έξοδο της δέσμης είναι:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi(d_1 - d_2)\frac{(n_1 - n_2)}{\lambda} \quad (3)$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΚΛΗ και ΕΖΗ έχουμε :

$$\frac{d_1}{d} = \frac{L/2 + x}{L} \quad (4)$$

και από τα ΛΜΖ και ΗΖΘ έχουμε

$$\frac{d_2}{d} = \frac{L/2 - x}{L} \quad (5)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5) προκύπτει:

$$d_1 - d_2 = d\,\frac{2x}{L}$$

Τότε αντικαθιστώντας στην (3) παίρνουμε

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(n_1 - n_2)\frac{xd}{L}$$

Β) Το φως θα βγει:

α) Γραμμικά πολωμένο όταν ισχύει: $\Delta\varphi = N\pi \Rightarrow x = \dfrac{N\lambda L}{4(n_1 - n_2)d}$ όπου Ν ακέραιος

β) Κυκλικά πολωμένο όταν ισχύει: $\Delta\varphi = (2N+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2N+1}{8}\dfrac{\lambda L}{(n_1 - n_2)d}$ όπου Ν ακέραιος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης *n* ισούται με *υ=c/n*. Αν *υ=0.9c*, τότε *n=1/0.9=1.11*.

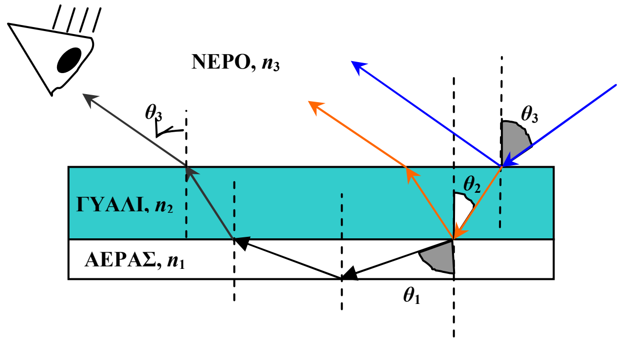
2)

Θεωρούμε την διάταξη του σχήματος με $n_3<n_2$, $n_1<n_2$ και $n_3>n_1$ η οποία απεικονίζει μια προσπίπτουσα (με γωνία θ_3) ακτίνα φωτός στην επιφάνεια του ρολογιού. Στο δύτη θα φτάσουν ακτίνες προερχόμενες στη γενική περίπτωση από 3 διαφορετικές διαδρομές:

α) ανάκλαση στη διεπιφάνεια νερού - γυαλιού (η μπλε ακτίνα στο σχήμα)

β) ανάκλαση στη διεπιφάνεια γυαλιού – αέρα (η κόκκινη ακτίνα στο σχήμα)

γ) ανάκλαση στην πλάκα του ρολογιού (η μαύρη ακτίνα), η οποία φέρει την πληροφορία της ώρας



Όλες οι ακτίνες εξέρχονται με γωνία ίση με τη γωνία πρόσπτωσης δηλαδή ίση με θ_3 η οποία είναι η γωνία παρατήρησης. Δηλαδή με άλλα λόγια, όταν ο δύτης παρατηρεί το ρολόι του υπό γωνία θ_3, παρατηρεί τις ακτίνες οι οποίες προέρχονται από την προσπίπτουσα στο ρολόι του με γωνία θ_3 ίση με τη γωνία παρατήρησης.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Snell στη διεπιφάνεια νερού - γυαλιού (για την προσπίπτουσα ακτίνα), παίρνουμε $n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$ (1). Παρατηρούμε ότι αφού $n_3<n_2$, θα έχουμε και $\theta_3 > \theta_2$, δηλαδή η διαχωριστική επιφάνεια νερού-γυαλιού δεν μπορεί να αποτελέσει επιφάνεια ολικής ανάκλασης.

Στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-αέρα ισχύει:

$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$ (2).

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) προκύπτει:

$n_3 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_1$ (3)

Η σχέση (3) δείχνει ότι όταν η γωνία θ_3 αυξηθεί τόσο ώστε $\theta_1=\pi/2$, τότε θα έχουμε ολική ανάκλαση στην διεπιφάνεια γυαλιού-αέρα (δεν υπάρχει η ακτίνα της διαδρομής (γ)) με αποτέλεσμα να το ρολόι να συμπεριφέρεται σαν τέλειο κάτοπτρο.

Θέτοντας $\sin\theta_1=1$, βρίσκουμε

$\sin\theta_3 = \frac{n_1}{n_3}$. Θέτοντας για τον αέρα $n_1 = 1$ και $\theta_3 = 49°$ υπολογίζουμε για τον συντελεστή διάθλασης του θαλασσινού νερού $n_3 = 1.325$.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διάθλασης του γυαλιού δεν υπεισέρχεται στους υπολογισμούς, επομένως η οριακή γωνία ολικής ανάκλασης δεν εξαρτάται από το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένη η πρόσοψη του ρολογιού.

Στα παραπάνω έχουμε κάνει την εύλογη υπόθεση ότι ο δείκτης διάθλασης του καλύμματος του ρολογιού (συνήθως γυαλί) είναι μεγαλύτερος από αυτόν του θαλασσινού νερού. Σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να έχουμε ολική ανάκλαση στην διεπιφάνεια νερού-καλύμματος και μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο το σχετικό δείκτη διάθλασης ο οποίος θα εξαρτάται από το υλικό του καλύμματος.

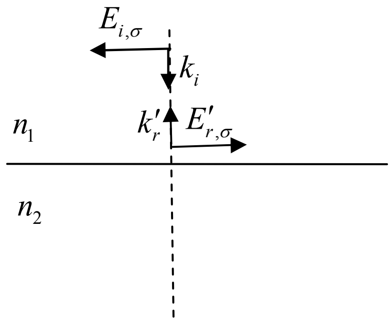
3)

Για κάθετη πρόσπτωση $\theta_i = \theta_r = 0$ συνεπώς οι σχέσεις (20.25) του βιβλίου των Alonso και Finn γράφονται

$$R_\pi = \frac{E'_{r,\pi}}{E_{i,\pi}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\ ,\ T_\pi = \frac{E_{r,\pi}}{E_{i,\pi}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

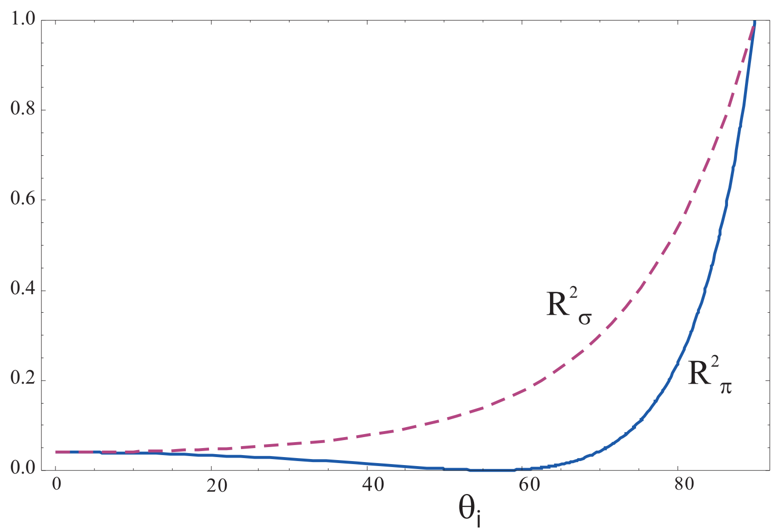
$$R_\sigma = \frac{E'_{r,\sigma}}{E_{i,\sigma}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\ ,\ T_\sigma = \frac{E_{r,\sigma}}{E_{i,\sigma}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Το επίπεδο πρόσπτωσης δεν ορίζεται μονοσήμαντα σε αυτήν την περίπτωση (οποιοδήποτε κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια επίπεδο που περιέχει την προσπίπτουσα ακτίνα μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο πρόσπτωσης) και θα πρέπει οι δύο συντελεστές να είναι ίσοι (καθώς μπορούν να εναλλαγούν οι ρόλοι της κάθετης και παράλληλης συνιστώσας). Μας δίνεται $n_1 < n_2$ και συνεπώς έχουμε $R_\pi < 0, R_\sigma < 0$. Ακολουθώντας τις συμβάσεις των σχημάτων 20-17 και 20-18 με βάση τις οποίες έχουν προκύψει οι σχέσεις (20.25) του βιβλίου των Alonso και Finn έχουμε για κάθετη πρόσπτωση και για την κάθετη συνιστώσα τα διανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου όπως στο παραπάνω Σχήμα. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για την παράλληλη συνιστώσα. Συνεπώς η διαφορά φάσης είναι και στις δύο περιπτώσεις ίση με π.



4)

Το ηλιακό φως (πριν μπει στην ατμόσφαιρα) είναι τυχαία πολωμένο. Όταν όμως προσπέσει σε κάποια επιφάνεια και ανακλαστεί, τότε πολώνεται μερικά, επειδή η ένταση της κάθετης στο επίπεδο πρόσπτωσης συνιστώσα (συνιστώσα «σ») είναι μεγαλύτερη από την ένταση της παράλληλης (συνιστώσα «π»). Δηλαδή το ανακλώμενο φως περιέχει περισσότερο ποσοστό από την κάθετη συνιστώσα, είναι δηλαδή μερικά πολωμένο. Το παραπάνω φαινόμενο φαίνεται και ποσοτικά στο σχήμα όπου απεικονίζονται τα τετράγωνα των συντελεστών ανάκλασης της παράλληλης και κάθετης συνιστώσας συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_i (εδώ θεωρήσαμε



$n_1 = 1, n_2 = 1.5$). Παρατηρούμε ότι για όλες τις γωνίες $R_\sigma^2 \geq R_\pi^2$. Στην περίπτωση ανάκλασης στους τοίχους ενός κτιρίου, η «σ» συνιστώσα είναι οριζόντια (παράλληλη με το έδαφος). Συνεπώς, οι φωτογράφοι χρησιμοποιούν μπροστά από το φακό της μηχανής τους ένα πολωτή με τον άξονα διάδοσης κατακόρυφο, ώστε να πετύχουν μέγιστη εξασθένιση του ανακλώμενου φωτός το οποίο δημιουργεί ανεπιθύμητες αντανακλάσεις με συνέπεια τη μείωση της αντίθεσης στις φωτογραφίες.

5)

Η ένταση I του κύματος θα δίνεται από τη μέση τιμή του μέτρου του ανύσματος Poynting:

$$I = \left\langle \left| \frac{1}{\mu} E(x,t) \times B(x,t) \right| \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu} E_0 e^{-\alpha x} \sin(kx - \omega t) B_0 e^{-\alpha x} \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{4}) \left| \vec{u}_x \times \vec{u}_y \right| \right\rangle =$$

$$\left\langle \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}} E_0^2 e^{-2\alpha x} \sin(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{4}) \left| \vec{u}_y \right| \right\rangle =$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} E_0^2 e^{-2\alpha x} \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos(2kx - 2\omega t - \frac{\pi}{4}) \right) \right\rangle =>$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} E_0^2 e^{-2\alpha x} \cos\frac{\pi}{4} = I_0 e^{-2\alpha x}$$

Η ένταση θα μειωθεί στο μισό όταν $e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} => z = \frac{\ln 2}{2\alpha}$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό σε διαφορική μορφή είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}, \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}}$$