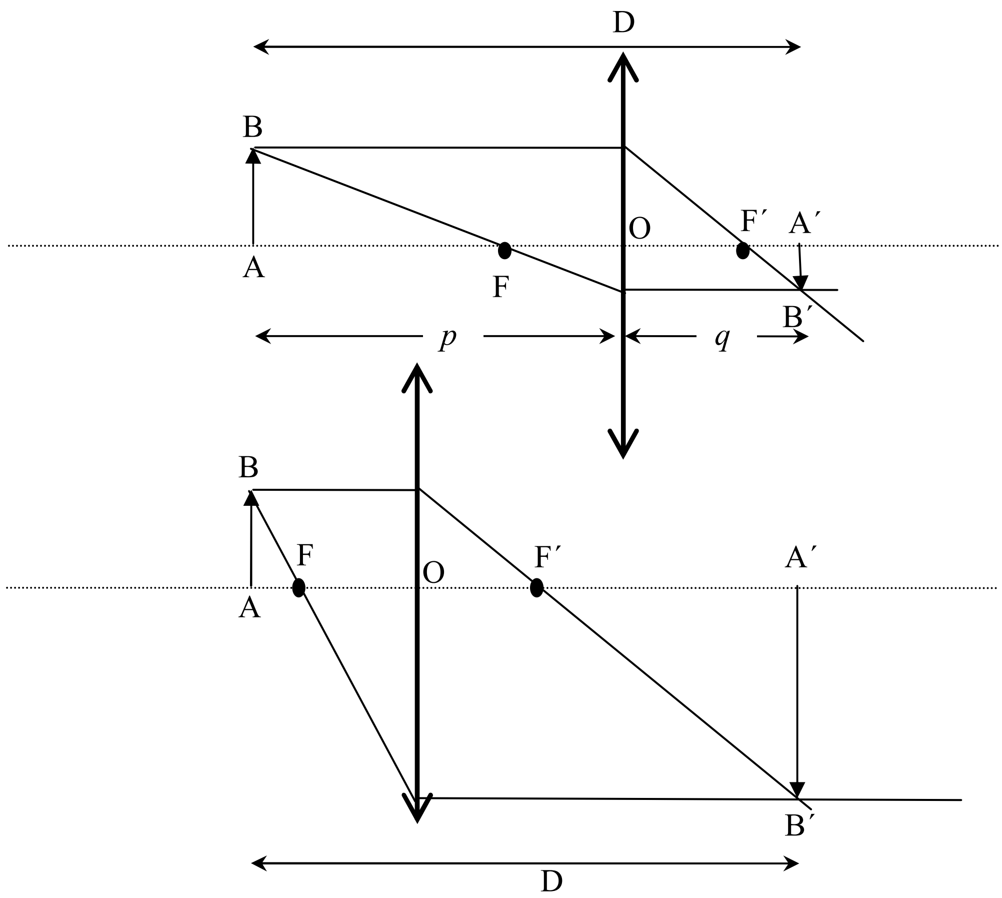
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2007-08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 5/2/08

Άσκηση 1



Από τη σχέση των απλών φακών έχουμε:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

όπου σύμφωνα με τη ενιαία σύμβαση* $p > 0$ και $f > 0$. Επειδή θέλουμε το είδωλο να σχηματιστεί στην οθόνη (δηλαδή να είναι πραγματικό) θα έχουμε επίσης $q > 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

* Χρησιμοποιούμε την ενιαία σύμβαση για κάτοπτρα και φακούς η οποία έχει ως εξής:

$$D = p + q \Rightarrow p = D - q$$

η σχέση των φακών γίνεται

$$\frac{1}{D-q} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q^2 - Dq + Df = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας ως προς q είναι:

$$q_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} = \frac{D}{2} + \frac{\sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

$$q_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} = \frac{D}{2} - \frac{\sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

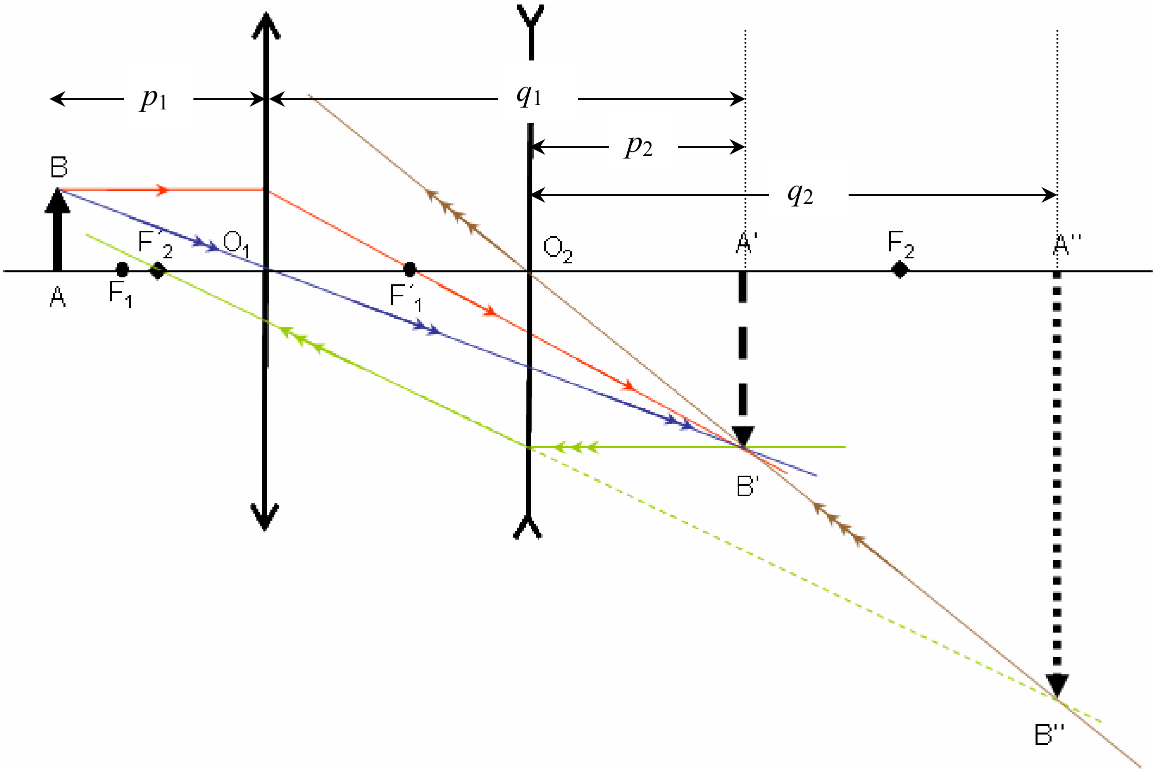
Παρατηρούμε ότι για $D > 4f$ υπάρχουν δύο θέσεις του φακού για τις οποίες θα έχουμε είδωλο του αντικειμένου πάνω στην οθόνη. Οι δύο αυτές θέσεις είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο της απόστασης μεταξύ αντικειμένου και οθόνης.

Η κρίσιμη απόσταση D προκύπτει από τον μηδενισμό της ποσότητας $D^2 - 4fD$ και είναι: $D = 4f$

Άσκηση 2

Α) Ο συγκλίνων φακός θα δημιουργήσει είδωλο Α΄Β΄ το οποίο θα χρησιμοποιηθεί σαν αντικείμενο από τον αποκλίνοντα φακό για τον σχηματισμό του τελικού ειδώλου Α΄΄Β΄΄. Το τελικό είδωλο μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των κυρίων ακτίνων όπως στο παρακάτω σχήμα:

Πλευρά Α: Η πλευρά από την οποία ξεκινάνε οι ακτίνες φωτός
Πλευρά Β: Η πλευρά στην οποία καταλήγουν οι ακτίνες φωτός
Προφανώς για κάτοπτρα οι πλευρές Α και Β συμπίπτουν, ενώ για φακούς και διαθλαστικές επιφάνειες είναι αντίθετες. Η σχέση που χρησιμοποιούμε είναι η $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ όπου τα πρόσημα προσδιορίζονται
Πλευρά Α: Προσδιορισμός πρόσημου απόστασης αντικειμένου (p) :Θετική αν βρίσκεται στην Α (πραγματικό αντικείμενο) και αρνητική αν βρίσκεται στην αντίθετη (φανταστικό αντικείμενο)
Πλευρά Β: Προσδιορισμός πρόσημου απόστασης ειδώλου (q) , εστιακής απόστασης (f) και ακτίνας καμπυλότητας (R): Θετική αν βρίσκεται στην Β και αρνητική αν βρίσκεται στην αντίθετη. Το είδωλο είναι φανταστικό όταν βρίσκεται στην αντίθετη από τη Β



Β) Για να προσδιορίσουμε ποσοτικά τη θέση του ειδώλου και τη μεγέθυνση θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους των λεπτών φακών θεωρώντας ότι η πλευρά Α είναι αριστερά των φακών και η πλευρά Β στα δεξιά τους. Σύμφωνα με τη σύμβαση έχουμε p_1 = +32 cm και f_1 = +22 cm, άρα η θέση του ειδώλου από τον πρώτο φακό βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}=\frac{1}{(+22\text{cm})}-\frac{1}{32\text{cm}}\Rightarrow q_1=+70.4\,\text{cm}$$

Παρατηρούμε ότι το q_1 είναι θετικό, άρα το είδωλο Α΄Β΄ βρίσκεται 70.4 cm δεξιά του πρώτου φακού και επομένως είναι πραγματικό. Επίσης επειδή το q_1 είναι μεγαλύτερο από την απόσταση των δύο φακών (41 cm), το είδωλο Α΄Β΄ βρίσκεται δεξιά του δεύτερου φακού και άρα θα αποτελέσει φανταστικό αντικείμενο γι’αυτόν (σύμφωνα με την σύμβαση πρέπει να θέσουμε p_2 <0). Από τις αποστάσεις βρίσκουμε

$$p_2 = 41\text{ cm} - q_1 = -29.4\text{ cm}$$

Η θέση του ειδώλου από τον δεύτερο φακό βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{p_2}=\frac{1}{(-57\text{cm})}-\frac{1}{(-29.4\text{cm})}\Rightarrow q_2=+60.72\,\text{cm}$$

στην οποία θέσαμε αρνητικό f_2 διότι ο φακός είναι αποκλίνων. Παρατηρούμε ότι το q_2 είναι θετικό, άρα το είδωλο Α″Β″ βρίσκεται 60.72 cm δεξιά του δεύτερου φακού και επομένως είναι πραγματικό. Η μεγέθυνση κάθε φακού μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις:

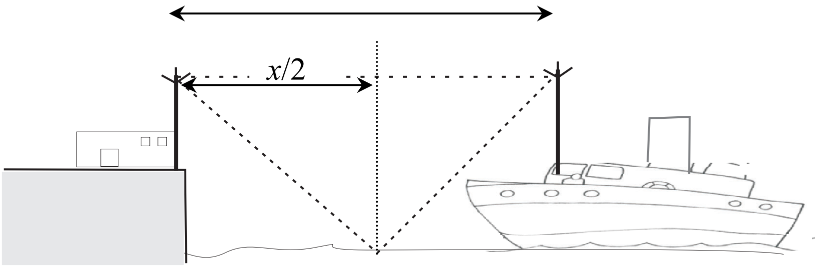
$$M'=-\frac{q_1}{p_1}=-\frac{70.4\text{cm}}{32\text{cm}}=-2.2$$

$$M''=-\frac{q_2}{p_2}=-\frac{60.72\text{cm}}{(-29.4\text{cm})}=+2.07$$

Συνεπώς η τελική μεγέθυνση θα είναι $M=\frac{A''B''}{AB}=M'M''=-2.2\cdot 2.07=-4.554$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το τελικό είδωλο Α΄΄Β΄΄ θα είναι ανεστραμμένο σε σχέση με το αντικείμενο ΑΒ.

Άσκηση 3



Α) Καθώς η γωνία πρόσπτωσης του κύματος στην επιφάνεια της θάλασσας ισούται με τη γωνία ανάκλασης το τρίγωνο του σχήματος είναι ισοσκελές. Έστω x η οριζόντια απόσταση ανάμεσα στις δύο κεραίες, το άμεσο κύμα θα διανύει δρόμο $r_1 = x$. Από τη γεωμετρία του σχήματος το ανακλώμενο κύμα διανύει (μετράμε όλα τα μεγέθη σε μέτρα)

$$r_2 = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 25^2}$$

Το ανακλώμενο στο νερό κύμα αποκτάει μια πρόσθετη διαφορά φάσης π από την ανάκλαση στο νερό η οποία αντιστοιχεί σε διαφορά δρόμου $\frac{\lambda}{2}$. Συνεπώς

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 25^2} + \frac{\lambda}{2} - x$$

Τα ελάχιστα θα παρατηρούνται σε

$$\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 25^2} - x + \frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 25^2} = x + n\lambda$$

$$\Rightarrow x^2 + 2500 = x^2 + n^2\lambda^2 + 2n\lambda x \Rightarrow x = \frac{2500 - n^2\lambda^2}{2n\lambda}$$

Το μήκος κύματος του σήματος είναι

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} = 1.67m$$

Το πρώτο ελάχιστο θα συμβεί στο $n = 1$ (για n=0 δεν υπάρχει λύση) και σε απόσταση

$$x_1 = \frac{2500 - \lambda^2}{2\lambda} = 749.2\,\text{m}$$

Β) Το δεύτερο ελάχιστο θα συμβεί στο

$$x_2 = \frac{2500 - 4\lambda^2}{4\lambda}$$

και

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2500 - \lambda^2}{2\lambda} - \frac{2500 - 4\lambda^2}{4\lambda} = \frac{2500 + 2\lambda^2}{4\lambda}$$

Συνεπώς

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2500 + 2\lambda^2}{4\lambda \cdot 140} = 2.7\,\text{m/s=9.7}\,\text{km/h}$$

Άσκηση 4

Α) Σύμφωνα με τη σχέση (22.17) του βιβλίου των Alonso και Finn σε ανάκλαση από λεπτό υμένιο η συνθήκη για ενισχυτική συμβολή είναι

$$2d\,n\cos\theta_r = \frac{2m-1}{2}\lambda \Rightarrow d = \frac{2m-1}{4n\cos\theta_r}\lambda\ ,m = 0,1,2,\ldots\ (1)$$

όπου d το πάχος του υμενίου και από το νόμο του Snell

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_r \Rightarrow n\cos\theta_r = n\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}} = \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i} = \sqrt{1.5^2 - \frac{1}{4}} = 1.41421$$

όπου θεωρήσαμε το δείκτη διάθλασης του αέρα μονάδα. Αντικαθιστώντας την ποσότητα $n\cos\theta_r$ στην (1) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ελάχιστο d αντιστοιχεί σε $m=1$ έχουμε

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{1.5 - \frac{1}{4}}} = 100.0\text{nm}$$

Β) Αν το υμένιο είχε πάχος $d = 1500nm$, τότε

$2d\,n\cos\theta_r = 2\times 1500 \times \sqrt{1.5^2 - \frac{1}{4}} = 4242.64\,\text{nm}$, το οποίο αν το διαιρέσουμε με λ/2 = 282.84 nm βρίσκουμε περιττό ακέραιο

$$\frac{2d\,n\cos\theta_r}{\lambda/2} = \frac{4242.64}{282.84} \approx 15 = 2\times 8 - 1$$

δηλαδή η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής ικανοποιείται. Συνεπώς έχουμε πάλι μέγιστο που αντιστοιχεί σε $m = 8$.

Άσκηση 5

Α) Σύμφωνα με την εξίσωση (23.8) του βιβλίου των Alonso και Finn, η κατανομή της έντασης σε οθόνη που βρίσκεται αρκετά μακριά από την σχισμή δίνεται από την εξίσωση:

$$I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

όπου $u = \frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}$ και I_0 η ένταση σε γωνία $\theta=0^o$. Τα ακρότατα θα δίνονται από τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου του $I(\theta)$. Καθώς τα κύματα περιθλώνται από τη σχισμή στην περιοχή $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ στην οποία η παράμετρος u είναι μονότονη συνάρτηση της γωνίας θ, μπορούμε να θεωρήσουμε την παραγώγιση ως προς u.

$$\frac{dI}{du} = 2I_0\frac{(u\cos u - \sin u)\sin u}{u^3} = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) μπορεί να μηδενίζεται σε δύο περιπτώσεις

$$\text{(i)}\ \sin u = 0 \Rightarrow u = n\pi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$
$$\text{(ii)}\ u\cos u - \sin u = 0 \Rightarrow u = \tan u$$
Για να εξετάσουμε αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα θα χρειαστούμε και τη δεύτερη παράγωγο
$$I'' = \frac{d^2 I}{du^2} = 2I_0 \frac{u^2\cos^2 u - u^2\sin^2 u - 4u\cos u\sin u + 3\sin^2 u}{u^4} \qquad (2)$$
Στην περίπτωση (i) και για $u = n\pi$ με $n \neq 0$ έχουμε $\sin u = 0$, $\cos^2 u = 1$ και $I'' = \dfrac{2I_0}{u^2} > 0$.Συνεπώς πρόκειται για ελάχιστα της έντασης. Τα τρία πρώτα θα βρίσκονται στα σημεία που προσδιορίζονται από τις γωνίες $u = n\pi \ \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{n\lambda}{b}, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Από τα δεδομένα του προβλήματος $\lambda \leq b/4$ συνεπώς $\dfrac{n\lambda}{b} < 1$ για $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ και τα τρία πρώτα ελάχιστα υπάρχουν.

Για το σημείο με $n = 0 \Rightarrow u = 0$ πρέπει να εξετάσουμε το όριο $u \to 0$ καθώς με απλή αντικατάσταση καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε $\sin u = u - \dfrac{u^3}{6} + \ldots$, $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^4}{24}\ldots$
$$I'' \xrightarrow{u \to 0} = 2I_0 \frac{-u^4/3}{u^4} = -\frac{2I_0}{3} < 0$$
Πρόκειται λοιπόν για μέγιστο της έντασης με $I = 2I_0$ καθώς $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.

Στην περίπτωση (ii) έχουμε $u = \tan u$ και αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε $I'' = -2I_0 \cos^2 u < 0$ και συνεπώς πρόκειται επίσης για μέγιστα. Σύμφωνα με την υπόδειξη για τα τρία πρώτα μέγιστα
$$\sin\theta = \pm 1.430\frac{\lambda}{b}, \pm 2.459\frac{\lambda}{b}, \pm 3.471\frac{\lambda}{b}$$
Ομοίως ο περιορισμός $\lambda \leq b/4$ εξασφαλίζει την ύπαρξη των τριών πρώτων δευτερευόντων μεγίστων.

Β) Σύμφωνα με το ερώτημα (Α), τα δευτερεύοντα μέγιστα βρίσκονται στα σημεία με $u = \tan u$, δηλαδή $\sin u = u\cos u$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στην ένταση προκύπτει:
$$I = I_0 \cos^2 u \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \cos^2 u$$
Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη για τα τρία πρώτα δευτερεύοντα μέγιστα έχουμε
$$\frac{I_1}{I_0} = 4.72 \times 10^{-2}, \frac{I_2}{I_0} = 1.65 \times 10^{-2}, \frac{I_3}{I_0} = 8.34 \times 10^{-3}$$

Άσκηση 6

Α) Οι μηδενισμοί της έντασης μπορούν να συμβούν στα σημεία (παράγοντας περίθλασης)
$$\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \sin\theta = \frac{n\lambda}{b},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$
καθώς επίσης και στα σημεία (παράγοντας συμβολής)

$$\frac{\pi\alpha\sin\theta}{\lambda}=\frac{2m+1}{2}\pi\Rightarrow\sin\theta=\frac{(2m+1)\lambda}{2\alpha},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{2}$$

όπου α η απόσταση των δύο σχισμών. Προφανώς ο πρώτος μηδενισμός θα οφείλεται στον δεύτερο παράγοντα και άρα

$$\frac{\lambda}{2\alpha}=\frac{1}{3}\frac{\lambda}{b}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}b$$

τιμή η οποία αναπαράγει τους παραπάνω μηδενισμούς καθώς έχουμε

$$\sin\theta=\frac{(2m+1)\lambda}{3b},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\Rightarrow$$

$$\sin\theta=\pm\frac{1}{3}\frac{\lambda}{b},\pm\frac{\lambda}{b},\pm\frac{5}{3}\frac{\lambda}{b},\pm\frac{7}{3}\frac{\lambda}{b},\pm3\frac{\lambda}{b},\pm\frac{11}{3}\frac{\lambda}{b}$$

ενώ οι μηδενισμοί από τον παράγοντα (1) συμβαίνουν για

$$\sin\theta=\frac{n\lambda}{b},\ n=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\lambda}{b},\pm2\frac{\lambda}{b},\pm3\frac{\lambda}{b},\pm4\frac{\lambda}{b}$$

B) Η μέγιστη γωνία στην οποία εμφανίζεται μηδενισμός της έντασης δίνεται από την σχέση $\sin\theta=4\frac{\lambda}{b}$ και επειδή $\sin\theta\le1\Rightarrow4\frac{\lambda}{b}\le1\Rightarrow\frac{\lambda}{b}\le\frac{1}{4}$. Ο περιορισμός αυτός εξασφαλίζει ότι το ελάχιστο του όρου περίθλασης με $n = 4$ θα εμφανιστεί έστω και ασυμπτωτικά (οριακή περίπτωση $b = 4\lambda$). Όμως ο λόγος $\frac{\lambda}{b}$ έχει και κάτω όριο γιατί οι αμέσως επόμενοι μηδενισμοί στο $\sin\theta=\frac{13}{3}\frac{\lambda}{b}$ (λόγω περίθλασης) και $\sin\theta=5\frac{\lambda}{b}$ (λόγω συμβολής) δεν παρατηρούνται. Άρα πρέπει $\sin\frac{\pi}{2}<\min\left\{\frac{13}{3}\frac{\lambda}{b},5\frac{\lambda}{b}\right\}$, δηλαδή $1<\frac{13}{3}\frac{\lambda}{b}\Rightarrow\frac{3}{13}<\frac{\lambda}{b}$. Συνοψίζοντας, οι περιορισμοί για το μήκος κύματος είναι

$$\frac{3}{13}<\frac{\lambda}{b}\le\frac{1}{4}$$

Άσκηση 7

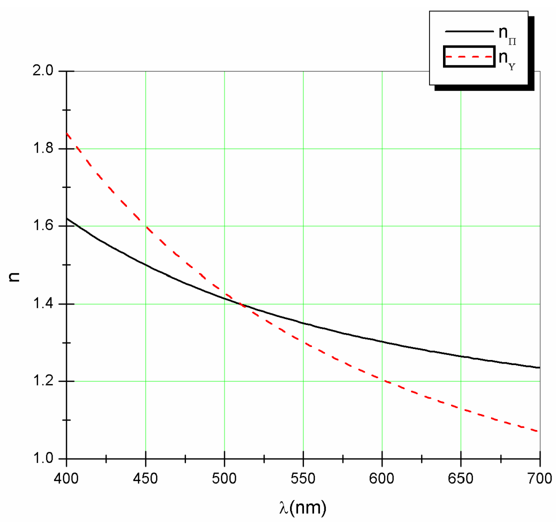
A) Από τη σχέση του Cauchy, $n=C+\frac{D}{\lambda^2}$, για τα ζεύγη (n_1,λ_1) και (n_2,λ_2) λύνουμε ως πρός *C, D:* $C=\frac{n_1\lambda_1^2-n_2\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}$ και $D=(n_1-n_2)\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των δεικτών διάθλασης για τα δεδομένα μήκη κύματος έχουμε για το πρίσμα:

C_Π=1.04844 και D_Π= 91441.4 nm^2

και για το υγρό:

C_Y=0.696875και D_Y=182883 nm^2



Με τα δεδομένα αυτά, βρίσκουμε για το κόκκινο φως $n_{\Upsilon}^{\kappa}=1.13$ και $n_{\Pi}^{\kappa}=1.26$.

Β) Η γωνία προσπτώσεως είναι Α, οπότε $n_Y \sin A = n_{\Pi}\sin\phi \Rightarrow \sin\phi = \frac{n_Y}{n_{\Pi}}\sin A$.

Το πράσινο θα περάσει αδιάθλαστο διότι $n_Y^{\pi}=1.4=n_{\Pi}^{\pi}$.

Το μπλέ ενδέχεται να υποστεί ολική ανάκλαση στην πρόσπτωση αν $A>A_{o\rho}$ (δηλ. $\phi_{o\rho}=90^{\circ}$) που προσδιορίζεται από $\sin A_{o\rho}=\frac{n_{\Pi}^{\mu}}{n_{\Upsilon}^{\mu}}$. Αν η γωνία κορυφής είναι μικρότερη, το μπλε θα εισέλθει και θα προσπέσει στην απέναντι πλευρά υπό γωνία x: $90^{\circ}-\phi+2A+90^{\circ}-x=180^{\circ}\Rightarrow x=2A-\phi$. Στην έξοδο θα ισχύει $\sin\theta=\frac{n_{\Pi}^{\mu}}{n_{\Upsilon}^{\mu}}\sin x\le 1$, οπότε θα εξέλθει εξάπαντος με τελική γωνία εκτροπής *ε=Α-θ*.

Το κόκκινο, προσπίπτον από μεγαλύτερο σε μικρότερο δείκτη διάθλασης, θα εισέλθει εξάπαντος και θα προσπέσει απέναντι υπό γωνίαν $x=2\mathrm{A}-\phi=2\mathrm{A}-\arcsin\left(\frac{n_{\Upsilon}^{\kappa}}{n_{\Pi}^{\kappa}}\sin A\right)$. Στην έξοδο θα ανακλασθεί ολικώς αν

$$\sin\theta=\frac{n_{\Pi}^{\kappa}}{n_{\Upsilon}^{\kappa}}\sin x\ge 1\Rightarrow \sin x=\sin\left(2\mathrm{A}-\arcsin\left(\frac{n_{\Upsilon}^{\kappa}}{n_{\Pi}^{\kappa}}\sin A\right)\right)\ge\frac{n_{\Upsilon}^{\kappa}}{n_{\Pi}^{\kappa}}\ .$$

Άσκηση 8

Αν τα παράλληλα επίπεδα του κυματοδηγού βρίσκονται στο $y=0$ και στο $y=a$ και το κύμα διαδίδεται στη διεύθυνση x, τότε στη λύση TE είναι:

$$\begin{aligned}
&E_x=0 && B_x=-\left(n\pi/(a\omega)\right)E_0\cos\left(n\pi y/a\right)\sin\left(\omega t-k_1x\right)\\
&E_y=0 && B_y=-\left(k_1/\omega\right)E_0\sin\left(n\pi y/a\right)\cos\left(\omega t-k_1x\right)\\
&E_z=E_0\sin\left(n\pi y/a\right)\cos\left(\omega t-k_1x\right) && B_z=0
\end{aligned}$$

όπου n ακέραιος. Θέλουμε $\vec{B}=0$ και $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\neq 0$ => $\sin\left(n\pi y/a\right)\sin\left(\omega t-k_1x\right)\neq 0$. Άρα πρέπει $\cos\left(n\pi y/a\right)=0$ και $\cos\left(\omega t-k_1x\right)=0$.

Η πρώτη σχέση δίνει: $\frac{n\pi y}{a}=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ όπου κ ακέραιος από την οποία προκύπτει ότι $y=\frac{2\kappa+1}{2n}a$. Επειδή πρέπει $0\le y\le a$, συμπεραίνουμε ότι το κ μπορεί να πάρει τις τιμές: 0, 1, 2, ...n-1

Από τη δεύτερη σχέση έχουμε: $k_1x-\omega t=\frac{\pi}{2}+\nu\pi\Rightarrow x=\frac{2\nu+1}{2k_1}\pi+\frac{\omega}{k_1}t$ με ν=0,1,2.....

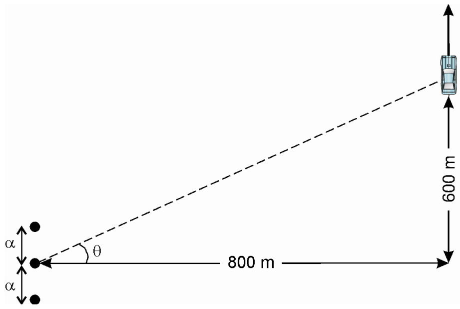
Οι θέσεις αυτές μετακινούνται με ταχύτητα $\frac{\omega}{k_1}$.

Αντικαθιστώντας στην τελευταία $\omega=\upsilon\sqrt{k_1^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$ προκύπτει ότι

$$x=\frac{2v+1}{2k_1}\pi+\frac{\upsilon\sqrt{k_1^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}{k_1}t\,.$$

Άσκηση 9

Α) Εφόσον οι πηγές είναι σύγχρονες και ισαπέχουν απόσταση *α*, η συνολική ένταση δίνεται από την σχέση 22.14 του βιβλίου των Alonso-Finn



$$I(\theta)=I_0\left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\alpha\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\alpha\sin\theta\right)}\right]^2 \tag{1}$$

όπου *N* το πλήθος των πομπών, *λ* το μήκος κύματος και I_0 η ένταση του ενός πομπού. Τα κύρια μέγιστα δίνονται από τη σχέση

$$\alpha\sin\theta=n\lambda,\quad n=0,1,2,... \tag{2}$$

Από την δεδομένη θέση του αυτοκινήτου έχουμε

$$\tan\theta=\frac{600}{800}=0.75\Rightarrow\theta=36.9^{\circ}\Rightarrow\sin\theta=0.6 \tag{3}$$

Θέτοντας την (3) στην (2) και για *n* = 1 βρίσκουμε $\lambda=0.6\alpha=3\,\mathrm{m}$. Θεωρώντας ότι $c=3\cdot10^8$ m/s, η συχνότητα του εκπεμπόμενου Η/Μ κύματος είναι *f* = 100 MHz.

Β) Για να υπολογίσουμε την θέση του επόμενου ελάχιστου, χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\alpha\sin\theta=\frac{n'}{N}\lambda,\quad \begin{matrix} n'=1,...,N-1\\ n'=N+1,...,2N-1\\ n'=2N+1,...,3N-1\end{matrix} \tag{4}$$

Εφόσον το αυτοκίνητο έχει περάσει το δεύτερο κύριο μέγιστο, το επόμενο ελάχιστο είναι για $n'=N+1=4$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (4) βρίσκουμε

$$\alpha\sin\theta=\frac{4}{3}\lambda\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{3}\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{4}{3}\frac{3}{5}=\frac{4}{5}=0.8\Rightarrow\theta=53.1^{\circ}$$

Η νέα θέση του αυτοκινήτου είναι $y=\tan\theta\cdot800\,\mathrm{m}=1.33\cdot800\,\mathrm{m}=1067\,\mathrm{m}$, δηλαδή η απόσταση που πρέπει να διανύσει είναι 1067- 600 m = 467 m.

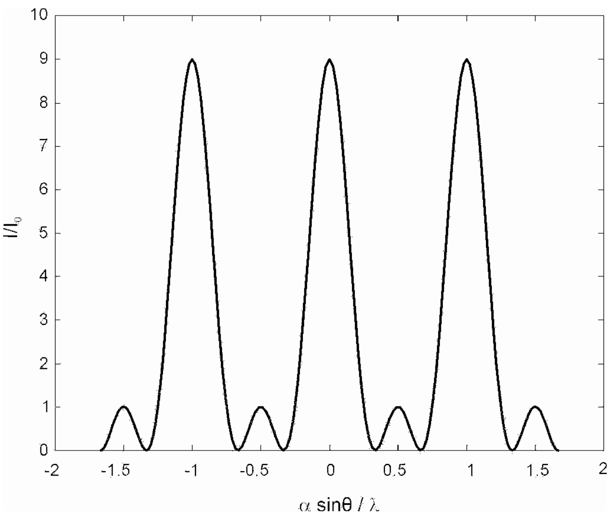
Γ) Ο αριθμός των κύριων μεγίστων (εκτός του πρώτου για *n* = 0) δίνεται από τον μέγιστο ακέραιο *n* της σχέσης (2).

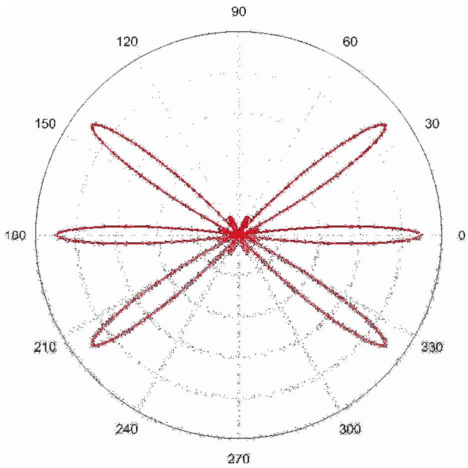
$n=\frac{\alpha}{\lambda}\sin\theta\Rightarrow n_{\max}=\frac{\alpha}{\lambda}$. Εφόσον έχουμε *α* = 5 m, *λ* = 3 m συμπεραίνουμε ότι $n_{\max}$ = 1, οπότε οι δυνατές τιμές του *n* είναι $n=0,1$. (Δύο κύρια μέγιστα).

Μεταξύ δύο κύριων μεγίστων υπάρχουν N-1 ελάχιστα τα οποία δίνονται από τη σχέση (4). Για N =3, ο δείκτης n' μπορεί να πάρει τις τιμές $n' = 1,2,4,5,7,8,...$ αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή του καθορίζεται από

$n' = N\dfrac{\alpha}{\lambda}\sin\theta \Rightarrow n_{\max} = N\dfrac{\alpha}{\lambda}$. Εφόσον έχουμε α = 5 m και λ = 3 m συμπεραίνουμε ότι $n_{\max}'$ = 5, οπότε οι δυνατές τιμές του n' είναι $n' = 1,2,4,5$. (Τέσσερα ελάχιστα εκ των οποίων το τελευταίο (n' = 5) θα συναντηθεί ασυμπτωτικά ($\theta = 90^{o}$)).

Μεταξύ των κύριων μεγίστων υπάρχουν N-2 πρόσθετα μέγιστα. Για N = 3 έχουμε ένα πρόσθετο μέγιστο μεταξύ των ελαχίστων $n' = 1$ και $n' = 2$, και άλλο ένα μεταξύ των ελαχίστων $n' = 4$ και $n' = 5$. Οι θέσεις τους δίνονται από την σχέση (4) με $n' = \dfrac{3}{2}$ και $n' = \dfrac{9}{2}$ (Δύο πρόσθετα μέγιστα).

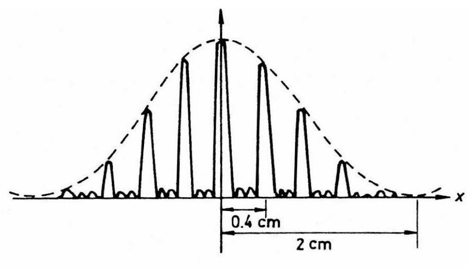




Άσκηση 10

A) Η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της έντασης λόγω του φράγματος περίθλασης είναι η:

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi\alpha}{\lambda}\sin\theta}\right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}\right]^2$$



από την οποία προκύπτει ότι υπάρχουν N-2 δευτερεύοντα μέγιστα μεταξύ δύο γειτονικών κύριων μεγίστων. Από το σχήμα βλέπουμε ότι έχουμε δύο δευτερεύοντα μέγιστα, άρα $N - 2 = 2 \Rightarrow N = 4$.

Ο πρώτος σκοτεινός κροσσός περίθλασης βρίσκεται στο $\dfrac{\pi\alpha}{\lambda}\sin\theta = \pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\lambda}{\sin\theta}$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η απόσταση από το κεντρικό μέγιστο είναι 20 cm, άρα $\tan\theta = \dfrac{2\,\text{cm}}{2000\,\text{cm}} \Rightarrow \tan\theta = 10^{-3} \Rightarrow \sin\theta \approx 10^{-3}$ και με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{6000 \times 10^{-10}\ \text{m}}{10^{-3}} = 6 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

Το πρώτο μέγιστο συμβολής εμφανίζεται όταν $\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = \pi \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin\theta}$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η απόσταση από το κεντρικό μέγιστο είναι 0.4 cm, άρα $\tan\theta = \frac{0.4\,\text{cm}}{2000\,\text{cm}} \Rightarrow \tan\theta = 2\times10^{-4} \Rightarrow \sin\theta \approx 2\times10^{-4}$ και με αντικατάσταση βρίσκουμε $d = \frac{6000\times10^{-10}\,\text{m}}{2\times10^{-4}} = 3\times10^{-3}\,\text{m}$.

Β) Η διακεκομμένη καμπύλη παριστάνει από τον όρο περίθλασης μίας σχισμής

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi\alpha}{\lambda}\sin\theta}\right]^2$$

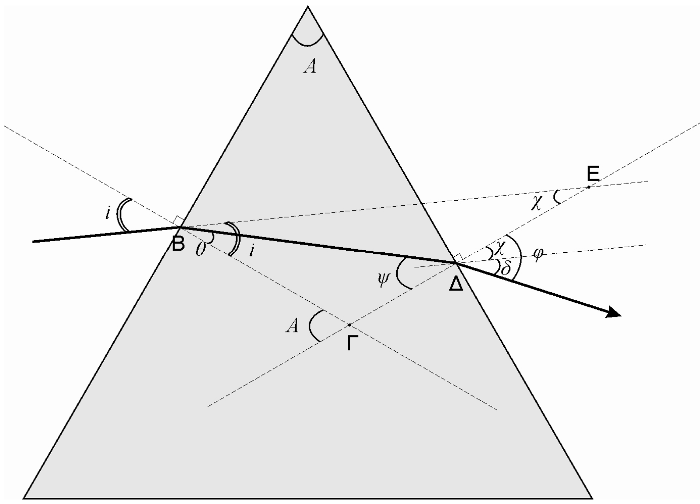
και αντιπροσωπεύει την κατανομή της έντασης του φωτός που περιθλάται από κάθε σχισμή. Η κατανομή της έντασης για συμβολή από N σχισμές, όπως δίνεται από τον παράγοντα

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}\right]^2$$

διαμορφώνεται από την περιβάλλουσα καμπύλη που περιγράφει την κατανομή του φωτός που προέρχεται από περίθλαση μίας σχισμής.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)



Θεωρώντας ότι η γωνία πρόσπτωσης από την αριστερή πλευρά του πρίσματος είναι i, και η γωνία διάθλασης από την δεξιά πλευρά είναι φ, η γωνία εκτροπής δ δίνεται από την σχέση

$\delta = \varphi - \chi$ (1)

Από το νόμο του Snell έχουμε $\sin i = n\sin\theta$, και $n\sin\psi = \sin\varphi$, οι οποίες για μικρές γωνίες γίνονται

$i = n\theta$ (2), και $n\psi = \varphi$ (3). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2),(3) έχουμε $\varphi + i = n(\psi+\theta)$ (4).

Επίσης από το τρίγωνο (ΒΓΔ) έχουμε $\psi + \theta = A$ (5), ενώ από το τρίγωνο (ΒΓΕ) έχουμε $\chi + i = A$ (6). Με αντικατάσταση της γωνίας χ από την (6), η (1) γίνεται

$$\delta = \varphi + i - A \xrightarrow{(4)} \delta = n(\psi+\theta) - A \xrightarrow{(5)} \delta = nA - A \Rightarrow \delta = (n-1)A$$

2)

Υποθέτοντας ότι το υλικό του φακού έχει δείκτη διάθλασης n_2 και το περιβάλλον μέσο n_1, μπορούμε εύκολα να δείξουμε (εφαρμόζοντας 2 φορές τη σχέση (21.10) του βιβλίου των Alonso & Finn και προσθέτοντας κατά μέλη όπως ακριβώς στη σελίδα 202 του βιβλίου), ότι ο τύπος του Descartes για τους λεπτούς φακούς γράφεται: $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=(n_{21}-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$, όπου $n_{21}=\frac{n_2}{n_1}$ είναι ο σχετικός δείκτης διάθλασης του φακού ως προς το περιβάλλον μέσο.

Βάζοντας στην τελευταία p=f και q=∞ προκύπτει ότι $\frac{1}{f}=(n_{21}-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$. Αν $n_2=n$ και $n_1=1$ η τελευταία δίνει την σχέση 21.18 του βιβλίου των Alonso & Finn $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι όταν ο φακός βυθιστεί σε νερό η εστιακή του απόσταση θα αλλάξει διότι .αλλάζει ο σχετικός δείκτης διάθλασης $n_{21}=\frac{n_2}{n_1}$

3)
Οι ήχοι στην περιοχή ακουστότητας έχουν μήκη κύματος της τάξης μερικών μέτρων ή εκατοστών, ενώ το ορατό φως έχει μήκος κύματος της τάξης του μισού μm. Για αντικείμενα της καθημερινής ζωής που έχουν μέγεθος α συγκρίσιμο με τις ανθρώπινες διαστάσεις (π.χ. η πόρτα μιας τάξης) ο λόγος $\frac{\lambda}{\alpha}$ είναι μεγάλος για τον ήχο και άρα τα ηχητικά κύματα περιθλώνται πίσω από τοίχους που έχουν πόρτες. Αντίθετα, ο λόγος $\frac{\lambda}{\alpha}$ είναι πολύ μικρός για το ορατό φως όταν αυτό προσπίπτει σε αντίστοιχα αντικείμενα, και άρα το φως αλλάζει την διεύθυνσή του κατά πολύ μικρές γωνίες όταν περιθλάται.

4)
Το πεδίο στο σημείο συμβολής είναι $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$ και η ένταση του είναι

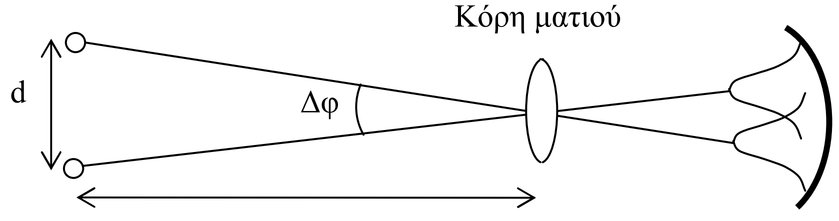
$$I=\left\langle c\varepsilon_0\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2\right)^2\right\rangle=c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_1^{\,2}\right\rangle+c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_2^{\,2}\right\rangle+2c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_1\bullet\vec{E}_2\right\rangle=$$

$$=c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_1^{\,2}\right\rangle+c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_2^{\,2}\right\rangle+2c\varepsilon_0\cos\frac{\pi}{6}E_{10}E_{20}\left\langle\cos\left(k\,r_1-\omega t\right)\cos\left(k\,r_2-\omega t\right)\right\rangle$$

$$=c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_1^{\,2}\right\rangle+c\varepsilon_0\left\langle\vec{E}_2^{\,2}\right\rangle+c\varepsilon_0\sqrt{3}E_{10}E_{20}\frac{1}{2}\left\langle\cos\left(k\,r_1-k\,r_2\right)+\cos\left(k\,r_1+k\,r_2-2\omega t\right)\right\rangle$$

$$=c\varepsilon_0\frac{E_{10}^{\ 2}}{2}+c\varepsilon_0\frac{E_{20}^{\ 2}}{2}+c\varepsilon_0\sqrt{3}E_{10}E_{20}\frac{1}{2}\cos\left[k\left(\,r_1-r_2\right)\right]$$

5)
Το φως από κάθε φανάρι παθαίνει περίθλαση από τη κόρη του ματιού καθώς μπαίνει στο μάτι του παρατηρητή. Για να διακρίνει ο παρατηρητής δύο φωτεινά σημεία πού σχηματίζουν γωνία Δφ στο μάτι του θα πρέπει τα δύο κεντρικά μέγιστα περιθλάσεως



πάνω στον αμφιβληστροειδή του ματιού του να είναι χωρισμένα τουλάχιστο κατά τη γωνία Δθ που καθορίζει το γωνιακό εύρος του ενός κεντρικού μέγιστου. Δηλαδή θα πρέπει

$\Delta\varphi \geq \Delta\theta$ (1)

Το γωνιακό εύρος του κεντρικού μεγίστου είναι:

$\Delta\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ (σχέση 23.12 Anonso-Finn), όπου D=2mm, ή διάμετρος της κόρης του ματιού. Αλλά

$\tan\dfrac{\Delta\varphi}{2} = \dfrac{d/2}{L} \simeq \dfrac{\Delta\varphi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{d}{L}$ (3), επειδή d<<L.

Αρα ο παρατηρητής θα αρχίσει να διακρίνει τα δύο φανάρια όταν ικανοποιείται η (1), δηλαδή

$$\frac{d}{L} \geq 1.22\frac{\lambda}{D} \Rightarrow L \leq \frac{1}{1.22}\frac{d}{\lambda}D = \frac{1}{1.22}\frac{1.3}{5.9\times10^{-7}}2\times10^{-3}\,\mathrm{m} \Rightarrow L \leq 3612\,\mathrm{m}$$