ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

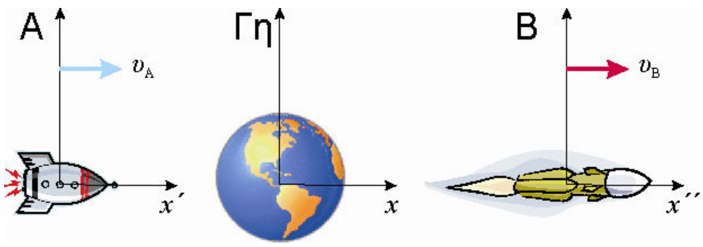
ΦΥΕ 34   2007-08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 11/3/08

Άσκηση 1

Θεωρούμε τα συστήματα αναφοράς όπως φαίνονται στο σχήμα με $\upsilon_A = 0.65c$ και $\upsilon_B = 0.25c$.



(α και β) Στο ΣΑ των καθηγητών (Β) η εξέταση διαρκεί $(\Delta t)_B = 45\min$. Όμως το σύστημα αυτό κινείται ως προς το διαστημόπλοιο Α στο οποίο λαμβάνει χώρα η εξέταση με ταχύτητα υ_{BA} (*σχετική ταχύτητα του Β ως προς το Α*) η οποία σύμφωνα με τη σχέση (1.18 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer) είναι

$$\upsilon = \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{1 - \frac{\upsilon_A \upsilon_B}{c^2}} = \frac{0.25 - 0.65}{1 - 0.25 \cdot 0.65} c = -0.478c$$

Η χρονική διάρκεια $(\Delta t)_A$ των εξετάσεων στο Α είναι ιδιοχρόνος του Α, αφού η έναρξη και η λήξη γίνονται στην ίδια χωρική συντεταγμένη, άρα συνδέεται με την $(\Delta t)_B$ στο Β, με τη σχέση διαστολής του χρόνου (1.7 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer)

$$(\Delta t)_B = \gamma_{AB} (\Delta t)_A \Rightarrow (\Delta t)_A = (\Delta t)_B \sqrt{1 - \frac{\upsilon_{AB}^{\ 2}}{c^2}} = 45.0\min\sqrt{1 - 0.478^2} \Rightarrow$$

$$(\Delta t)_A = 39.5\min$$

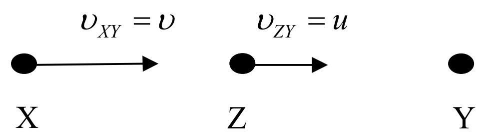
Γνωρίζοντας το $(\Delta t)_A$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάρκεια της εξέτασης στη Γη η οποία κινείται ως προς το Α με ταχύτητα $-\upsilon_A$

$$(\Delta t)_\Gamma = \gamma_A (\Delta t)_A = \frac{(\Delta t)_A}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_A^{\ 2}}{c^2}}} = \frac{39.5\min}{\sqrt{1 - 0.65^2}} = 52.0\min$$

Σημειώνεται ότι θα ήταν λάθος να χρησιμοποιήσουμε την $(\Delta t)_B = \gamma_B (\Delta t)_\Gamma$ για να βρούμε τη διάρκεια στη Γη με βάση τη διάρκεια στο Β, γιατί ούτε στο ΣΑ του Β ούτε σε αυτό της Γης τα δύο γεγονότα (η αρχή και το τέλος της εξέτασης) λαμβάνουν χώρα στο ίδιο σημείο του χώρου.

Άσκηση 2

Α) Έστω u η ζητούμενη ταχύτητα του Ζ στο ΣΑ του Υ. Η ταχύτητα του Χ ως προς το Υ μπορεί να εκφραστεί σαν σύνθεση της ταχύτητας του Χ ως προς Ζ (υ_{XZ}) και της ταχύτητας του Υ ως προς Ζ (υ_{YZ}) μέσω της σχέσης



$\upsilon_{XY} = \dfrac{\upsilon_{XZ} - \upsilon_{YZ}}{1 - \dfrac{\upsilon_{XZ}\upsilon_{YZ}}{c^2}}$ (1). Ισχύει $\upsilon_{YZ} = -\upsilon_{ZY} = -u$ ενώ σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θέλουμε να ισχύει $\upsilon_{XZ} = u$ (τα Χ και Υ πλησιάζουν μεταξύ τους με ίσες ταχύτητες ως προς το Ζ). Θέτοντας αυτές τις τιμές στη σχέση (1),

$$\upsilon = \frac{u-(-u)}{1+\dfrac{u^2}{c^2}} \Rightarrow \upsilon\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right) = 2u \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} - 2\frac{c}{\upsilon}\frac{u}{c} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{u}{c} = \frac{1}{2}\left(2\frac{c}{\upsilon} \pm \sqrt{4\frac{c^2}{\upsilon^2} - 4}\right) \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{c}{\upsilon} - \sqrt{\frac{c^2}{\upsilon^2} - 1} = \frac{c}{\upsilon}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\right) \Rightarrow$$

$$u = \frac{c^2}{\upsilon}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)$$

Η λύση με το + απορρίπτεται γιατί οδηγεί σε $\upsilon > c$

Β)Στο ΣΑ του Υ

$$\frac{\Delta(XZ)}{\Delta(ZY)} = \frac{(u-\upsilon)t}{-ut} = \frac{\dfrac{c^2}{\upsilon}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\right) - \upsilon}{-\dfrac{c^2}{\upsilon}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\right)} = -\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2} - \sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\right)}{1-\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$$

Γ) Στο όριο $\upsilon \ll c$ η (Α) δίνει

$$u = \frac{c^2}{\upsilon}\left(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right) = \frac{c^2}{\upsilon}\left(1-1+\frac{\upsilon^2}{2c^2}+\ldots\right) = \frac{\upsilon}{2}+\ldots$$

που είναι το αποτέλεσμα της Νευτώνιας Μηχανικής.

Άσκηση 3

Α) Στο ΣΑ του ποζιτρόνιουμ (Σ′) τα δύο φωτόνια θα πρέπει να έχουν ίσες και αντίθετες ορμές για να διατηρείται η ορμή. Έστω p' η ορμή του ενός και E' η ενέργειά του τότε από τη διατήρηση της ενέργειας

$$2m_e c^2 + E_b = 2E' \Rightarrow E' = m_e c^2 + \frac{E_b}{2}$$

Για την ορμή

$$p'_{\pm} = \pm\frac{E'}{c} = \pm\left(m_e c + \frac{E_b}{2c}\right)$$

Η συχνότητα των φωτονίων θα είναι

$$f' \equiv f_+{}' = f_-{}' = \frac{E'}{h} = \frac{m_e c^2}{h} + \frac{E_b}{2h}$$

και η ταχύτητά τους θα είναι φυσικά $\pm c$

Β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα, θεωρώντας ότι οι υπολογισμοί του Α) ισχύουν στο ιδιοσύστημα του σωματιδίου (Σ′) το οποίο κινείται με ταχύτητα υ ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (Σ). Το τετράνυσμα της ορμής είναι το $P = \left(E/c, p\right)$ και μετασχηματίζεται κατά Lorentz όπως και το τετράνυσμα της θέσης. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ p' \end{pmatrix}$$

με $\beta = \upsilon / c$. Για το φωτόνιο με ορμή $p'_- = -\left(m_e c + \dfrac{E_b}{2c}\right)$ και ενέργεια $E' = m_e c^2 + \dfrac{E_b}{2}$

επομένως

$$E_- = \gamma\left(E' + \beta c p'_-\right) = \gamma\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) - \gamma\upsilon\left(m_e c + \frac{E_b}{2c}\right) = \gamma\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right)\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\upsilon}{c}}{1 + \dfrac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)$$

και

$$f_- = \frac{E_-}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1 - \dfrac{\upsilon}{c}}{1 + \dfrac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)$$

Για $p'_+ = \left(m_e c + \dfrac{E_b}{2c}\right)$ και ενέργεια $E' = m_e c^2 + \dfrac{E_b}{2}$ έχουμε

$$E_+ = \gamma\left(E' + \beta c p'_+\right) = \gamma\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) + \gamma\upsilon\left(m_e c + \frac{E_b}{2c}\right) = \gamma\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right)\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{\upsilon}{c}}{1 - \dfrac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)$$

και

$$f_+ = \frac{E_+}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right)$$

Σημειώνεται ότι το ερώτημα Β) μπορεί να λυθεί χωρίς τη χρήση του μετασχηματισμού Lorentz του τετρανύσματος της ορμής θεωρώντας τη μάζα του ποζιτρόνιουμ $m_\Pi c^2 = 2m_e c^2 + E_b$ (εδώ θεωρούμε το E_b αρνητικό) . Στο ΣΑ του εργαστηρίου η διατήρηση ενέργειας γράφεται $\gamma m_\Pi c^2 = h\left(f_+ + f_-\right)$ και η διατήρηση της ορμής $\gamma m_\Pi \upsilon = h\left(f_+ - f_-\right)/c$. Επιλύοντας το σύστημα προσδιορίζουμε τα f_+, f_-.

Γ) Οι συχνότητες των δύο φωτονίων δίνονται από

$$f_+ = \frac{E_+}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) \Rightarrow \frac{f'}{f_+} = \sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}} = \sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$$

$$f_- = \frac{E_-}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}}\left(m_e c^2 + \frac{E_b}{2}\right) \Rightarrow \frac{f'}{f_-} = \sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}} = \sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}}$$

Άσκηση 4

Α) Έστω ότι το τρίτο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα υ και σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση του άξονα των x. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$(x): \gamma\, m\upsilon\cos\theta = \gamma_1\, m\upsilon_1 \Rightarrow \gamma\ \upsilon\cos\theta = \gamma_1\,\upsilon_1 \quad (1)$$

$$(y): \gamma\, m\upsilon\sin\theta = \gamma_2\, m\upsilon_2 \Rightarrow \gamma\,\upsilon\sin\theta = \gamma_2\,\upsilon_2 \quad (2)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις (1) και (2) και αθροίζοντας έχουμε

$$\gamma^2\upsilon^2 = \gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \left(\gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2\right)\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \Rightarrow \upsilon^2\left(1+\frac{\gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2}{c^2}\right) = \gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{\gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2}{c^2 + \gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2}c^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{\gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2}{c^2 + \gamma_1^2\upsilon_1^2 + \gamma_2^2\upsilon_2^2}}\,c \Rightarrow \upsilon = 0.84c$$

Β) Από τα δεδομένα του προβλήματος και το αποτέλεσμα του (Α) έχουμε $\gamma = 1.828, \gamma_1 = 1.667, \gamma_2 = 1.250$. Διαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (1) βρίσκουμε

$$\tan\theta = \frac{\gamma_2\upsilon_2}{\gamma_1\upsilon_1} = 0.562 \Rightarrow \theta = 29.4^\circ$$

Γ) Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$Mc^2 = \gamma_1 mc^2 + \gamma_2 mc^2 + \gamma mc^2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma} = 0.21$$

Άσκηση 5

Α) Ξεκινώντας από την υπόδειξη $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \gamma^{-3}\alpha_p$, έχουμε

$$\gamma^3 d\upsilon = a_p dt \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int \alpha_p dt \Rightarrow c\int \frac{d\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)}{\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \alpha_p \int dt .$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της υπόδειξης βρίσκουμε $\dfrac{\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = a_p t + \upsilon_0$ και

επειδή δίνεται ότι $\upsilon(t=0)=0 \Rightarrow \upsilon_0 = 0$ και $\dfrac{\upsilon^2}{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} = \alpha_p{}^2 t^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \alpha_p{}^2 t^2\left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right) \Rightarrow$

$$\upsilon^2\left(1+\frac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}\right) = \alpha_p{}^2 t^2 \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{\alpha_p t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}}} .$$

Β) Από τον ορισμό της ταχύτητας $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$ και την προηγούμενη σχέση,

$$\upsilon = \frac{\alpha_p t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_p t}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}}} \Rightarrow dx = \frac{\alpha_p t\, dt}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}}}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής και θέτουμε $y = 1+\dfrac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2} \Rightarrow dy = \dfrac{2\alpha_p{}^2 t dt}{c^2}$. Άρα,

$$dx = \frac{c^2}{2\alpha_p}\frac{dy}{\sqrt{y}} \Rightarrow x = \frac{c^2}{2\alpha_p}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} + x_0 \Rightarrow x = \frac{c^2}{\alpha_p}\sqrt{y} + x_0 \Rightarrow x = \frac{c^2}{\alpha_p}\sqrt{1+\frac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}} + x_0$$

Από τις αρχικές συνθήκες $x(0)=0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{c^2}{\alpha_p}$ και

$$x(t) = \frac{c^2}{\alpha_p}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}} - 1\right)$$

Γ) Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\upsilon) = m\frac{d(\gamma\upsilon)}{dt} \Rightarrow F = m\left(\gamma\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{d\gamma}{dt}\right) = m\left(\gamma\alpha + \upsilon\frac{d\gamma}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt}\right) \Rightarrow$$

$F = m\alpha\left(\gamma + \upsilon\dfrac{d\gamma}{d\upsilon}\right)$ (1). Επίσης έχουμε $\gamma = \left(1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \dfrac{d\gamma}{d\upsilon} = \dfrac{\upsilon}{c^2}\gamma^3$ (2). Με αντικατάσταση της (2) στην (1) βρίσκουμε

$$F = m\alpha\left(\gamma + \frac{\upsilon^2}{c^2}\gamma^3\right) = \gamma^3 m\alpha\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \gamma^3 m\alpha\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \Rightarrow F = \gamma^3 m\alpha \quad (3)$$

Η σχέση (3) δίνει τη σχετικιστική δύναμη που ασκείται σε σωματίδιο όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του είναι συγγραμμικά διανύσματα. Χρησιμοποιώντας την πρώτη υπόδειξη $\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \gamma^{-3}\alpha_p$, βρίσκουμε ότι η δύναμη που θα πρέπει να ασκείται στο σωματίδιο στο ΣΑ του εργαστηρίου είναι $F = \gamma^3 m\alpha = m\gamma^3\gamma^{-3}\alpha_p = m\alpha_p$ ίδια δηλαδή με τη δύναμη στο κινούμενο ΣΑ.

β τρόπος

Αντικαθιστώντας στο $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ το $\upsilon = \frac{\alpha_p t}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_p{}^2 t^2}{c^2}}}$ βρίσκουμε αμέσως ότι

$\gamma\upsilon = a_p t$. Άρα $F = m\frac{d(\gamma\upsilon)}{dt} = ma_p$

Άσκηση 6

Α) Έστω λ_0= 126nm το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής στο σύστημα αναφοράς της πηγής (γαλαξίας), λ=270nm το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή (Γη), και υ η ταχύτητα της πηγής ως προς τον παρατηρητή (δηλαδή του γαλαξία ως προς τη γη), η οποία λόγω των δεδομένων της άσκησης υποθέτουμε ότι είναι πάνω στον άξονα διάδοσης του κύματος, δηλαδή έχει μόνο ακτινική συνιστώσα.

Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (3.21) σελ. 43 του βιβλίου του Σ. Περσίδη:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \gamma(1 + \frac{\upsilon}{c})$$

όπου $\gamma = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Τονίζεται ότι στη σχέση σε αυτή η ταχύτητα υ λαμβάνεται ως θετική όταν η απόσταση παρατηρητή - πηγής μεγαλώνει. Θέτοντας $\beta = \upsilon / c$, προκύπτει $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

Λύνοντας την τελευταία ως προς β παίρνουμε ότι:

$$\beta = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} = \frac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} = 0.64\text{ . Δηλαδή } \upsilon = 0.64c = 1.92 \times 10^8 \ \frac{m}{\sec}.$$

Δηλαδή ο γαλαξίας απομακρύνεται από τη γη με ταχύτητα $\upsilon = 0.64c$, κάτι που δικαιολογεί και την ερυθρή μετατόπιση του φάσματος.

Β) Σύμφωνα με τη Νευτώνεια θεωρία, η συχνότητα f που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση (18.60), του βιβλίου των Alonso & Finn:

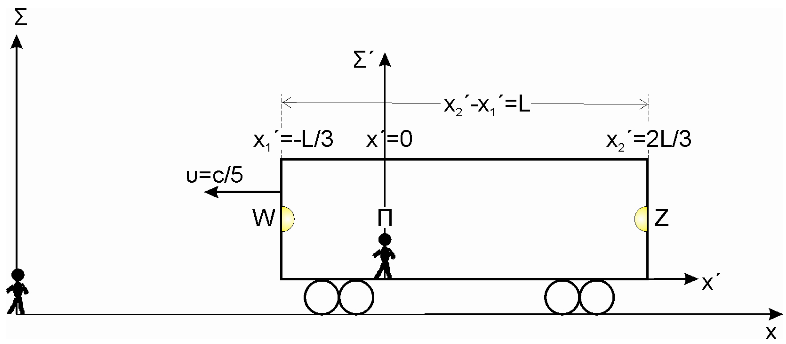
$f = f_o \frac{\upsilon_{κύματος} - \upsilon_{παρατηρητή}}{\upsilon_{κύματος} - \upsilon_{πηγής}}$ όπου f_o είναι η συχνότητα εκπομπής της πηγής και η θετική φορά λαμβάνεται από την πηγή προς τον παρατηρητή. Από τα δεδομένα του προβλήματός μας προκύπτει:

$$f = f_o \frac{c}{c-\upsilon} \Rightarrow \lambda = \lambda_o (1 - \frac{\upsilon}{c}) \Rightarrow \upsilon = -1.14c$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι ο γαλαξίας απομακρύνεται από τη γη, ωστόσο η μη εφαρμογή των σχετικιστικών θεωρήσεων οδηγεί στο εσφαλμένο αποτέλεσμα ότι ο γαλαξίας κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός.

Άσκηση 7

Α) Μελετάμε τα δύο χωροχρονικά γεγονότα στο ΣΑ του βαγονιού Σ′: 1) εκπομπή φωτονίου από το W ($x_1' = -\frac{L}{3}, t_1'$) προς τα δεξιά και 2) εκπομπή φωτονίου από το Z ($x_2' = \frac{2L}{3}, t_2'$) προς τα αριστερά. Εδώ ως αρχή του Σ′, $x' = 0$, ορίζουμε αυθαίρετα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) την θέση του παρατηρητή στον οποίο – σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης – φτάνουν ταυτόχρονα τα δύο φωτόνια. Επίσης διαλέγουμε αυθαίρετα αυτό να συμβαίνει την χρονική στιγμή $t' = 0$.



Με βάση αυτά τα δεδομένα, ο χρόνος που κάνει το φως για να διανύσει την απόσταση WΠ (στο Σ′) είναι

$$\Delta t_1' = 0 - t_1' = \frac{0 - x_1'}{c} = \frac{0-(-L/3)}{c} \Rightarrow \Delta t_1' = -t_1' = \frac{L}{3c},$$

ενώ ο χρόνος που κάνει το φως για να διανύσει την απόσταση ΖΠ (στο Σ′) είναι

$$\Delta t_2' = 0 - t_2' = \frac{0 - x_2'}{(-c)} = -\frac{0-2L/3}{c} \Rightarrow \Delta t_2' = -t_2' = \frac{2L}{3c}$$

Η διαφορά χρόνου ανάμεσα στο άναμμα των δύο φώτων W και Z για τον παρατηρητή που βρίσκεται στο βαγόνι είναι λοιπόν

$$\Delta t' = \Delta t_2' - \Delta t_1' = t_1' - t_2' = \frac{L}{3c}$$

Β) Για να βρούμε την αντίστοιχη χρονική διαφορά $\Delta t = t_1 - t_2$ στο σύστημα Σ κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Lorentz:

$$t_1 - t_2 = \gamma\left[(t_1' - t_2') - \frac{\upsilon}{c^2}(x_1' - x_2')\right] = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left[\frac{L}{3c} - \frac{c}{5c^2}(-\frac{L}{3} - \frac{2L}{3})\right] = \frac{5}{2\sqrt{6}}\frac{L}{c}\frac{8}{15},$$

οπότε βρίσκουμε $\Delta t = \frac{4}{3\sqrt{6}}\frac{L}{c} = 0.544\frac{L}{c}$

Γ) Μελετάμε πρώτα την εκπομπή φωτός από το W (γεγονός 1: $x_1' = -\frac{L}{3}, t_1' = 0$) και την ανίχνευσή του στο Z (γεγονός 2: $x_2' = \frac{2L}{3}, t_2'$). Η χρονική διαφορά στο Σ′ είναι

$$t_{WZ}' = t_2' - t_1' \Rightarrow \frac{x_2' - x_1'}{c} = t_2' - 0 \Rightarrow t_{WZ}' = t_2' = \frac{L}{c} \qquad (1)$$

Από τον μετασχηματισμό Lorentz βρίσκουμε τη χρονική διαφορά στο Σ,

$$t_{WZ} = t_2 - t_1 = \gamma\left[(t_2' - t_1') - \frac{\upsilon}{c^2}(x_2' - x_1')\right] = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left[\frac{L}{c} - \frac{c}{5c^2}\left(\frac{2L}{3} - \left(-\frac{L}{3}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow t_{WZ} = \frac{5}{2\sqrt{6}}\frac{4}{5}\frac{L}{c} = \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{L}{c} = 0.816\frac{L}{c} \quad (2)$$

Με παρόμοιο τρόπο μελετάμε την εκπομπή φωτός από το Z (γεγονός 1: $x_1' = \frac{2L}{3}, t_1' = 0$) και την ανίχνευσή του στο W (γεγονός 2: $x_2' = -\frac{L}{3}, t_2'$). Η χρονική διαφορά στο Σ′ είναι

$$t_{ZW}' = t_2' - t_1' \Rightarrow \frac{x_2' - x_1'}{(-c)} = t_2' - 0 \Rightarrow t_{ZW}' = t_2' = \frac{L}{c} \qquad (3)$$

Από τον μετασχηματισμό Lorentz βρίσκουμε τη χρονική διαφορά στο Σ,

$$t_{ZW} = t_2 - t_1 = \gamma\left[(t_2' - t_1') - \frac{\upsilon}{c^2}(x_2' - x_1')\right] = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left[\frac{L}{c} - \frac{c}{5c^2}\left(-\frac{L}{3} - \frac{2L}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow t_{ZW} = \frac{5}{2\sqrt{6}}\frac{6}{5}\frac{L}{c} = \frac{3}{\sqrt{6}}\frac{L}{c} = 1.22\frac{L}{c} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) βρίσκουμε $t_{WZ}' = t_{ZW}'$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι προφανές αφού ο παρατηρητής του τρένου είναι ακίνητος στο Σ′ και το φως διανύει ίσες αποστάσεις W→Z και Z→W με την ίδια (κατά μέτρο) ταχύτητα. Επίσης από τις σχέσεις (2) και (4) βρίσκουμε τη σχεση των χρόνων στο σύστημα Σ, $t_{ZW} = \frac{3}{2}t_{WZ}$.

Άσκηση 8

Από την εκφώνηση εργαζόμαστε έχοντας θέσει για ευκολία $c = 1$, μπορούμε να αποκαταστήσουμε τις διαστάσεις στο τέλος. Με αυτή τη σύμβαση το τετράνυσμα της ορμής ορίζεται ως $p^\mu = \left(E, \vec{p}\right)$ και μετασχηματίζεται κατά Lorentz, σε σύστημα που κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα u ως

$$\begin{pmatrix} E' \\ p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\gamma_u u & 0 & 0 \\ -\gamma_u u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E' \\ p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u\left(E - u\,p_x\right) \\ \gamma_u\left(-u\,E + p_x\right) \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Για τη ζητούμενη ποσότητα έχουμε

$$p_1^{\mu}{}' \odot p_2^{\mu}{}' = E_1' E_2' - \vec{p}_1' \bullet \vec{p}_2' = E_1' E_2' - p_{1x}' p_{2x}' - p_{1y}' p_{2y}' - p_{1z}' p_{2z}'$$

$$= \gamma_u (E_1 - u\, p_{1x}) \gamma_u (E_2 - u\, p_{2x}) - \gamma_u (-u\, E_1 + p_{1x}) \gamma_u (-u\, E_2 + p_{2x}) - $$
$$- p_{1y} p_{2y} - p_{1z} p_{2z}$$

$$= \gamma^2{}_u \left[E_1 E_2 + u^2 p_{1x} p_{2x} \cancel{- u(p_{1x} E_2 + p_{2x} E_1)} - u^2 E_1 E_2 - p_{1x} p_{2x} + \cancel{u(p_{1x} E_2 + p_{2x} E_1)} \right] -$$
$$- p_{1y} p_{2y} - p_{1z} p_{2z}$$

$$= \gamma^2{}_u \left[(1-u^2) E_1 E_2 - (1-u^2)\, p_{1x} p_{2x} \right] - p_{1y} p_{2y} - p_{1z} p_{2z} = \gamma^2{}_u (1-u^2) \left[E_1 E_2 - p_{1x} p_{2x} \right] -$$
$$- p_{1y} p_{2y} - p_{1z} p_{2z} =$$

$$= \frac{1}{(1-u^2)} (1-u^2) \left[E_1 E_2 - p_{1x} p_{2x} \right] - p_{1y} p_{2y} - p_{1z} p_{2z} = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \bullet \vec{p}_2 = p_1^{\mu} \odot p_2^{\mu}$$

Επομένως η τιμή της ποσότητας $p_1^{\mu} \odot p_2^{\mu}$ είναι ίδια σε οποιοδήποτε ΣΑ είναι δηλαδή σταθερή.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, και θεωρώντας κίνηση κατά μήκος του άξονα των x, η διατήρηση της τετραορμής, στο ΣΑ του εργαστηρίου (που συμπίπτει με το ΣΑ του κέντρου μάζας καθώς η συνολική ορμή μηδενίζεται) γράφεται

$$p_1^{\mu} + p_2^{\mu} = p_3^{\mu} + p_4^{\mu} + p_5^{\mu} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_V m \\ \gamma_V m V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_V m \\ -\gamma_V m V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m'' \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 2\gamma_V m = m + m' + m'' \Rightarrow m(2\gamma_V - 1) = m' + m''$$

Καθώς μας δίνεται ότι $m' + m'' > m \Rightarrow \dfrac{m' + m''}{m} > 1 \Rightarrow \dfrac{m' + m''}{m} = 1 + \lambda$ από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$(2\gamma_V - 1) = 1 + \lambda \Rightarrow \gamma_V = 1 + \frac{\lambda}{2}$$

Η ελάχιστη κινητική ενέργεια του ενός σωματιδίου στο ΣΑ του κέντρου μάζας είναι λοιπόν

$$E_K = (\gamma_V - 1) m = (\gamma_V - 1) m = \frac{\lambda}{2} m$$

Για το ΣΑ του δευτέρου σώματος η διατήρηση της τετραορμής συνεπάγεται

$$(p_1^{\mu} + p_2^{\mu}) \odot (p_1^{\mu} + p_2^{\mu}) = (p_3^{\mu} + p_4^{\mu} + p_5^{\mu}) \odot (p_3^{\mu} + p_4^{\mu} + p_5^{\mu})$$

Το πρώτο μέλος ισούται με

$$(p_1^{\mu} + p_2^{\mu}) \odot (p_1^{\mu} + p_2^{\mu}) = \left[\begin{pmatrix} \gamma_\upsilon m \\ m\gamma_\upsilon \upsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \right] \odot \left[\begin{pmatrix} \gamma_\upsilon m \\ m\gamma_\upsilon \upsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} m(\gamma_\upsilon + 1) \\ m\gamma_\upsilon \upsilon \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} m(\gamma_\upsilon + 1) \\ m\gamma_\upsilon \upsilon \end{pmatrix} = m^2 (\gamma_\upsilon + 1)^2 - m^2 \gamma^2{}_\upsilon \upsilon^2 = m^2 \gamma^2{}_\upsilon + m^2 + 2m^2 \gamma_\upsilon - m^2 \gamma^2{}_\upsilon \upsilon^2 =$$

$$= m^2 \gamma^2{}_\upsilon (1 - \upsilon^2) + m^2 + 2m^2 \gamma_\upsilon = m^2 + m^2 + 2m^2 \gamma_\upsilon = 2m^2 (\gamma_\upsilon + 1)$$

όπου υ η ταχύτητα του πρώτου στο ΣΑ του δεύτερου η οποία σύμφωνα με το νόμο σύνθεσης των ταχυτήτων δίνεται από $\upsilon = \dfrac{V + V}{1 + V^2} = \dfrac{2V}{1 + V^2}$

Λόγω της αναλλοιώτητας μπορώ να υπολογίσω το δεύτερο μέλος της ισότητας στο ΣΑ του εργαστηρίου όπου

$$\left(p_3^\mu + p_4^\mu + p_5^\mu\right) \odot \left(p_3^\mu + p_4^\mu + p_5^\mu\right) = \left(m + m' + m''\right)^2$$

Επομένως έχουμε

$$2m^2\left(\gamma_\upsilon + 1\right) = \left(m + m' + m''\right)^2 \Rightarrow 2\left(\gamma_\upsilon + 1\right) = \left(1 + \frac{m' + m''}{m}\right)^2 \Rightarrow 2\left(\gamma_\upsilon + 1\right) = \left(1 + 1 + \lambda\right)^2 \Rightarrow$$

$$\gamma_\upsilon = \frac{\left(2 + \lambda\right)^2}{2} - 1$$

και η ελάχιστη κινητική ενέργεια του πρώτου σώματος θα είναι

$$E_K = (\gamma_\upsilon - 1)m = \left(\frac{\left(2+\lambda\right)^2}{2} - 2\right)m = \frac{\lambda(\lambda + 4)}{2} m\,,$$

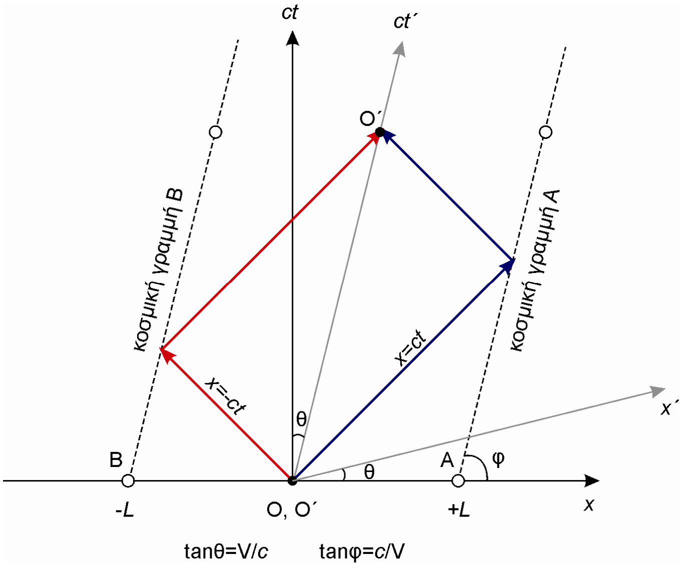
και με αποκατάσταση των διαστάσεων, $E_K = \frac{\lambda(\lambda+4)}{2} mc^2$.

Άσκηση 9

$$\begin{aligned}
w = \vec{E}' \bullet \vec{B}' &= E_x' B_x' + E_y' B_y' + E_z' B_z' = \\
&= \gamma\left(E_x - \upsilon B_y\right)\gamma\left(B_x + \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right) + \gamma\left(E_y + \upsilon B_x\right)\gamma\left(B_y - \frac{\upsilon}{c^2}E_x\right) + E_z B_z = \\
&= \gamma^2\left(E_x B_x - \frac{\upsilon^2}{c^2}E_x B_x + E_y B_y - \frac{\upsilon^2}{c^2}E_y B_y - \cancel{\upsilon B_y B_x} + \cancel{\upsilon B_x B_y}\right) + E_z B_z = \\
&= \gamma^2\left(\frac{E_x B_x}{\gamma^2} + \frac{E_y B_y}{\gamma^2}\right) + E_z B_z = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = \vec{E} \bullet \vec{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u = \vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2 &= \gamma^2\left(E_x - \upsilon B_y\right)^2 + \gamma^2\left(E_y + \upsilon B_x\right)^2 + E_z^2 \\
&\quad - \gamma^2 c^2\left(B_x + \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right)^2 - \gamma^2 c^2\left(B_y - \frac{\upsilon}{c^2}E_x\right)^2 - c^2 B^2{}_z \\
&= \gamma^2\left(E_x{}^2 + E_y{}^2\right) - \frac{\gamma^2\upsilon^2}{c^2}\left(E_y{}^2 + E_y{}^2\right) - \gamma^2 c^2\left(B_x{}^2 + B_y{}^2\right) + \gamma^2\upsilon^2\left(B_y{}^2 + B_x{}^2\right) + E_z'^2 - c^2 B^2{}_z \\
&\quad + \cancel{2\upsilon\left(-E_x B_y + E_y B_x - B_x E_y + B_y E_x\right)} \\
&= \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(E_x{}^2 + E_y{}^2\right) - c^2\gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(B_x{}^2 + B_y{}^2\right) + E_z{}^2 - c^2 B^2{}_z \\
&= \left(E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2\right) - c^2\left(B_x{}^2 + B_y{}^2 + B^2{}_z\right) = \\
&= \vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2
\end{aligned}$$

Άσκηση 10
Λύση



Έστω το Α μπροστά, το Β πίσω. Το φώς δεξιά με εξίσωση $x = ct$ συναντά το Α με εξίσωση $x = L + Vt$ (κοσμική γραμμή Α) όταν $t_A = \dfrac{L}{c-V}$ στη θέση $x_A = \dfrac{cL}{c-V}$, ανακλάται (ταχύτητα $-c$) με εξίσωση $x - x_A = -c(t - t_A)$ και συναντά το Ο΄ που έχει εξίσωση $x = Vt$ όταν $t = \dfrac{x_A + ct_A}{c+V} = \dfrac{2cL}{c^2 - V^2} = \dfrac{2L}{c}\dfrac{1}{1 - V^2/c^2}$ στη θέση $x = \dfrac{2L}{c}\dfrac{V}{1-V^2/c^2}$. Το φώς αριστερά με εξίσωση $x = -ct$ συναντά το Β με εξίσωση $x = -L + Vt$ όταν $t_B = \dfrac{L}{c+V}$ στη θέση $x_B = \dfrac{-cL}{c+V}$, ανακλάται (ταχύτητα c) με εξίσωση $x - x_B = c(t - t_B)$ και συναντά το Ο΄ (που έχει εξίσωση $x = Vt$) όταν $t = \dfrac{x_B - ct_B}{-c+V} = \dfrac{2cL}{c^2 - V^2} = \dfrac{2L}{c}\dfrac{1}{1-V^2/c^2}$ στη θέση $x = \dfrac{2L}{c}\dfrac{V}{1-V^2/c^2}$, ίδια με πριν. Άρα οι ανακλώμενοι παλμοί συναντούν το Ο΄ ταυτόχρονα, πράγμα που παρατηρεί και ο Ο.

Β) Έκτοτε οι σφαιρικοί παλμοί που ξεκίνησαν με κέντρα τα ανακλαστικά σφαιρίδια, και άρα έχουν εξισώσεις $\left(x - x_{A(\acute{\eta} B)}\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(t - t_{A(\acute{\eta} B)}\right)^2$, τέμνονται κατά κύκλο ακτίνας $r = r' = \sqrt{y^2 + z^2}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές και αφαιρώντας για να απαλειφθεί το r βρίσκουμε $x = Vt$ που ταυτίζεται με την θέση του Ο΄, άρα το επίπεδο του κύκλου αποτελεί το μεσοκάθετο επίπεδο $y´z´$ του Σ΄, Το επίπεδο αυτό, ως προς τη Γη, μετακινείται με ταχύτητα V, ενώ ως προς το τραίνο είναι σταθερό ως (συνεχώς) μεσοκάθετο επίπεδο. Δηλ. ο Ο' μπορεί κάλλιστα να ορίσει αυτό ως $y'z'$ επίπεδο στη θέση x'=0.

Πράγματι,

$$\left(x - x_A\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(t - t_A\right)^2 \;==>\; \left(x - \frac{cL}{c-V}\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(t - \frac{L}{c-V}\right)^2 ==>$$

$$x^2 - \frac{2xcL}{c-V} + y^2 + z^2 = c^2t^2 - \frac{2c^2tL}{c-V}$$

και

$$\left(x - x_B\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(t - t_B\right)^2 \Longrightarrow \left(x - \frac{-cL}{c+V}\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2\left(t - \frac{L}{c+V}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$x^2 + \frac{2xcL}{c+V} + y^2 + z^2 = c^2t^2 - \frac{2c^2tL}{c+V}$$

Αφαιρώντας την 1^{η} από την 2^{η} έχουμε

$$\frac{2xcL}{c+V} + \frac{2xcL}{c-V} = \frac{2c^2tL}{c-V} - \frac{2c^2tL}{c+V} \Rightarrow x\frac{c-V+c+V}{\left(c+V\right)\left(c-V\right)} = ct\frac{c+V-\left(c-V\right)}{\left(c+V\right)\left(c-V\right)} \Longrightarrow x = Vt \ .$$

Άρα οι σφαίρες τέμνονται σε κύκλο με κέντρο (x=Vt , y=0, z=0) ή (x'=0, y'=0, z'=0) και ακτίνα $r = r' = \sqrt{y^2 + z^2}$ συνεχώς αυξανόμενη. Ως προς το Σ' ο κύκλος είναι σταθερός και βρίσκεται στο μεσοκάθετο επίπεδο y'z', ενώ ως προς τη Γη αυτός κινείται με ταχύτητα V ακριβώς στη θέση του O'.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Η σχετικιστική ορμή του ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση

$$p_{rel} = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \Rightarrow p_{rel} = \frac{p}{0.6} \Rightarrow p_{rel} = 1.67\,p\,,$$

όπου $p = m\upsilon$ η κλασική ορμή του. Η σχετική διαφορά τους είναι

$$\frac{p_{rel} - p}{p_{rel}} = \frac{1.67m\upsilon - m\upsilon}{1.67m\upsilon} \approx 0.40 = 40\%$$

ξεπερνάει δηλαδή κατά πολύ το όριο του 5% και επομένως ο τύπος $p = m\upsilon$ δεν αρκεί για την περιγραφή της ορμής αυτού του ηλεκτρονίου.

2) Η διαφορά χρόνου ανάμεσα στα δύο γεγονότα στο δεδομένο ΣΑ δίνει $\Delta(ct) = 1$. Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz για ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα υ ως προς το παραπάνω ΣΑ έχουμε

$$\begin{pmatrix} \Delta(ct') \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(ct) \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

με $\beta = \upsilon / c$. Επομένως για να είναι ταυτόχρονα

$$\Delta ct' = \gamma\left(\Delta ct - \beta\,\Delta x\right) = \gamma\left(1 - 2\frac{\upsilon}{c}\right) = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{c}{2}$$

Στο ΣΑ λοιπόν που κινείται με ταχύτητα $\upsilon = \dfrac{c}{2}$ τα γεγονότα φαίνονται ταυτόχρονα.

3) Η απάντηση είναι «όχι». Το μήκος της ράβδου δεν φαίνεται μικρότερο αλλά είναι μικρότερο στο δικό μας ΣΑ. Η συστολή του μήκους δεν έχει να κάνει με το πώς φαίνονται τα αντικείμενα αλλά με το που βρίσκονται τα άκρα της ράβδου σε μια ταυτόχρονη μέτρηση στο δικό μας ΣΑ και η απόσταση ανάμεσα στα άκρα στο δικό μας ΣΑ μπορεί να είναι μικρότερη από την αντίστοιχη απόσταση στο ιδιοσύστημα της ράβδου.

4) Έχουμε

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow 2E\frac{\partial E}{\partial p} = 2pc^2 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{pc^2}{E} = \frac{\gamma m\upsilon c^2}{\gamma mc^2} = \upsilon$$

5)

Το σύστημα του ασανσέρ που πέφτει ελεύθερα είναι αδρανειακό διότι σε σώμα που βρίσκεται σε αυτό δεν ασκείται καμιά δύναμη. Άρα, στο σύστημα του ασανσέρ το φως κινείται ευθύγραμμα και θα φθάσει απέναντι σε σημείο Η σε ύψος h. Ως προς τη Γη, το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα κάτω και το φως που οδεύει προς το απέναντι σημείο Η, φαίνεται επίσης να επιταχύνεται, έλκεται δηλαδή από τη Γη όπως και το ασανσέρ. Τα παραπάνω είναι σε συμφωνία με την αρχή της ισοδυναμίας του Αϊνστάιν σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει τρόπος να διαχωρίσουμε τοπικά ένα ομαλά επιταχυνόμενο σύστημα από ένα σύστημα σε βαρυτικό πεδίο.