25/3/2008

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΦΥΕ 34   2007-08

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 5ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προθεσμία παράδοσης 6/5/08

Άσκηση 1

A) Από τον νόμο μετατόπισης του Wien (σχέση (2.6) σελ. 52 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer) έχουμε $\lambda_{max} \cdot T = 2.898 \times 10^{-3}$ m K , T=49+273, ==> $\lambda_{max} = 9$ μm
B) Η ολική ισχύς που ακτινοβολείται ανά μονάδα επιφάνειας είναι $E = \int_0^\infty E_f df = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4} (49+273)^4=609.5 W/m^2.

Κάθε φέτα έχει εμβαδό 0.1 m^2 × 2 επιφάνειες = 0.2 m^2 . Άρα η ολική επιφάνεια έχει εμβαδό 2m^2 και επομένως στούς 49 ^{o}C το σώμα αποδίδει 2 x 609.5 W = 1219 W (συγκρίσιμη με μια ηλεκτρική θερμάστρα).
Γ) Η ζητούμενη ένταση ακτινοβολίας (ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας) είναι

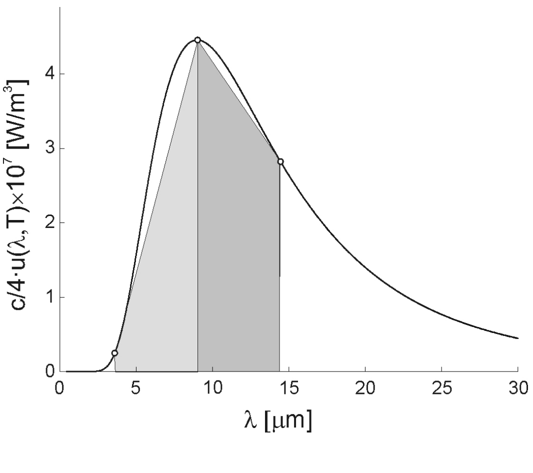
$$E_{\approx \max} = \frac{c}{4}\int_{f_1}^{f_2} u(f,T)\,df$$

όπου $u(f,T) = \dfrac{8\pi h f^3}{c^3}\dfrac{1}{e^{hf/kT}-1}$ η φασματική πυκνότητα ενέργειας και f_1, f_2 τα όρια ολοκλήρωσης συχνοτήτων με $f_1 < f_2$. Από τη σχέση $f = c/\lambda \Rightarrow f_1 = c/\lambda_1$ και $f_2 = c/\lambda_2$

όπου $\lambda_1 = \lambda_{\max}(1+0.6) = 1.6\lambda_{\max} = 14.4\mu\text{m}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\max}(1-0.6) = 0.4\lambda_{\max} = 3.6\mu\text{m}$ τα όρια ολοκλήρωσης μηκών κύματος. Κάνοντας χρήση των σχέσεων $f = c/\lambda$ και $df = -c/\lambda^2 d\lambda$, μετασχηματίζουμε την συνάρτηση u ως προς λ και βρίσκουμε

$$E_{\approx \max} = -\frac{c}{4}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u(f,T)\,c/\lambda^2 d\lambda = \frac{c}{4}\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}d\lambda = \frac{c}{4}\int_{0.4\lambda_{\max}}^{1.6\lambda_{\max}} u(\lambda,T)\,d\lambda\,.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $c/4\cdot u(\lambda,T)$ ως προς λ φαίνεται στο σχήμα.



Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα περί την κορυφή με δύο τραπέζια εκατέρωθεν του μεγίστου:

$$\frac{c}{4}\left[\int_{0.4\lambda_{\max}}^{\lambda_{\max}} u(\lambda,T)\,d\lambda + \int_{\lambda_{\max}}^{1.6\lambda_{\max}} u(\lambda,T)\,d\lambda\right]$$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε $E_{\approx \max}$=(127.2+197.2)W/m^2=324.4 W/m^2.

Τούτο σημαίνει ότι η μισή περίπου ισχύς παρέχεται στην ως άνω περιοχή του λ_{max}.

Άσκηση 2
Για να έχουμε την εμφάνιση φωτοηλεκτρικού φαινομένου θα πρέπει $f>f_c \Leftrightarrow \lambda<\lambda_c$, όπου f_c, λ_c είναι η συχνότητα και το μήκος κύματος κατωφλίου αντίστοιχα.
Γνωρίζουμε ότι $f_c = \frac{\Phi}{h}$, όπου Φ το έργο εξόδου (σχέση (2.24), σελ. 67 του βιβλίου των Serway, Moses, Moyer) Από την τελευταία προκύπτει ότι $\lambda_c = \frac{hc}{\Phi}$.
Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει το μήκος κύματος κατωφλίου για τα 3 μέταλλα:
Li: λ_c=540nm
Be: λ_c=318nm
Hg: λ_c=276nm

Όπως παρατηρούμε μόνο το Li ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη για την εμφάνιση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.
Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων θα δίνεται από τη σχέση (2.23) σελ. 67 του βιβλίου των Serway, Moses, Moyer:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \Phi_{Li} \Rightarrow K = \frac{\left(6.626\mathrm{x}10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}\right)\cdot\left(3\mathrm{x}10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)}{400\mathrm{x}10^{-9}\ \mathrm{m}} - 2.3\,\mathrm{eV}\mathrm{x}1.6\mathrm{x}10^{-19}\ \mathrm{J/eV} \Rightarrow$$
K_{max}= 1.29x10^{-19}J=0.806eV

Άσκηση 3
Η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Υπολογίζοντας τη μέση τιμή έχουμε

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle \qquad (1)$$

Από τον ορισμό της αβεβαιότητας και χρησιμοποιώντας $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (\Delta x) &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \Rightarrow \langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2 \\ (\Delta p) &= \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} \Rightarrow \langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1)

$$\langle E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \qquad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

η (3) συνεπάγεται

$$\langle E \rangle \geq 2\sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{2m}}\sqrt{\frac{1}{2}k(\Delta x)^2} = (\Delta p)(\Delta x)\sqrt{\frac{k}{m}} \geq \frac{\hbar}{2}\omega$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση αβεβαιότητας

$$\left(\Delta x\right)\left(\Delta p\right) \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (4)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την (3) ως προς $\left(\Delta x\right)$ αφού αντικαταστήσουμε το $\left(\Delta p\right)$ από την (4) και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση 4

Ακολουθούμε τα ίδια βήματα με την εύρεση κατά Bohr του φάσματος του ατόμου του Υδρογόνου

Α) Από την κβάντωση της στροφορμής έχουμε $L = m\upsilon r = n\dfrac{h}{2\pi} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{nh}{2\pi mr}$

όπου $n = 1, 2, \ldots$

Για να κινείται το σώμα σε κυκλική τροχιά η ελκτική δύναμη πρέπει να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου επομένως

$$F = +Dr = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{m\upsilon^2}{D} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 mr^2 D} \Rightarrow r_n = \left(\frac{n^2h^2}{4\pi^2 mD}\right)^{1/4}.$$

Β)

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dr^2 = \frac{1}{2}Dr^2 + \frac{1}{2}Dr^2 = Dr^2$$

$$= D\sqrt{\frac{n^2h^2}{4\pi^2 mD}} = \sqrt{\frac{D}{m}}\,\hbar n \text{ , n=1,2,...}$$

Γ) Οι δυνατές ενέργειες των φωτονίων είναι

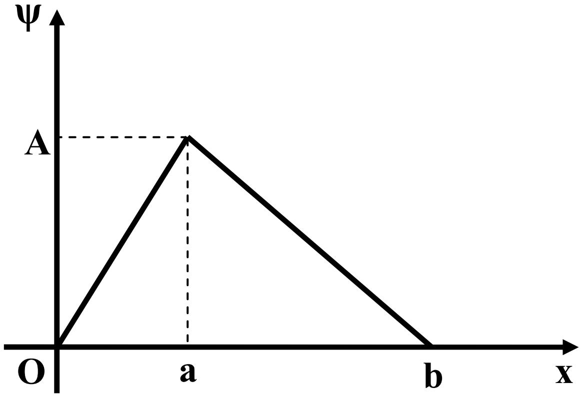
$$E_{if} = E_i - E_f = (n_i - n_f)\sqrt{\frac{D}{m}}\hbar, n_i > n_f$$

και τα αντίστοιχα μήκη κύματος

$$\lambda_{if} = \frac{hc}{E_{if}} = \frac{hc}{\sqrt{\frac{D}{m}}\hbar}\frac{1}{(n_i - n_f)} = \sqrt{\frac{m}{D}}\frac{2\pi c}{(n_i - n_f)}, n_i > n_f$$

Άσκηση 5

Α)



Β) Πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^a |\psi(x)|^2\, dx + \int_a^b |\psi(x)|^2\, dx = 1$$

Αναπτύσσοντας τα ολοκληρώματα, παίρνουμε:

$$\int_0^a \frac{A^2 x^2}{a^2} dx + \int_a^b \frac{A^2 (b-x)^2}{(b-a)^2} dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A^2}{a^2}\int_0^a x^2 dx + \frac{A^2}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)^2\, dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{A^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2}\left(-\frac{(b-x)^3}{3}\right)\Bigg|_a^b = 1 \Leftrightarrow$$

$$A^2\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a + \frac{1}{(b-a)^2}\left(-\frac{(b-x)^3}{3}\right)\Bigg|_a^b\right\} = 1 \Leftrightarrow$$

$$A^2\left\{\frac{a}{3} + \frac{b-a}{3}\right\} = 1 \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{\frac{3}{b}}$$

Γ) Είναι η θέση x=a (για την οποία μεγιστοποιείται το $|\psi(x)|^2$)

Δ) $P(a,b) = \int_0^a |\Psi|^2\, dx = \dfrac{|A|^2}{\alpha^2}\dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\alpha}{b}$

$P(a,a) = 1$ όπως είναι αναμενόμενο γιατί η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται για $x > a$. $P(a,2a) = 1/2$ το οποίο είναι επίσης σωστό γιατί όταν $b = a$ η κυματοσυνάρτηση είναι συμμετρική ως προς το σημείο $x = a$.

Ε)

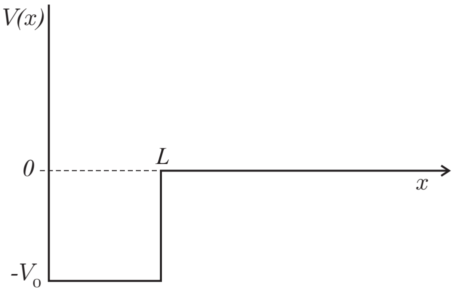
$$\langle x\rangle = \int x|\Psi|^2\, dx = |A|^2\left\{\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha x^3 dx + \frac{1}{(b-\alpha)^2}\int_0^\alpha x(b-x)^2\, dx\right\} =$$

$$= \frac{3}{b}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a + \frac{1}{(b-\alpha)^2}\left(b^2\frac{x^2}{2} - 2b\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_a^b\right\} =$$

$$= \frac{3}{4b(b-a)^2}\left[a^2(b-a)^2 + 2b^4 - 8\frac{b^4}{3} + b^4 - 2a^2b^2 + 8\frac{a^3b}{3} - a^4\right] =$$

$$= \frac{3}{4b(b-a)^2}\left(\frac{b^4}{3} - a^2b^2 + \frac{2}{3}a^3b\right) = \frac{1}{4(b-a)^2}\left(b^3 - 3a^2b + 2a^3\right) = \frac{2a+b}{4}$$

Άσκηση 6



α) Η κυματοσυνάρτηση είναι λύσης της εξίσωσης του Schoedinger

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar}(E-U)\psi \quad (1)$$

Στην περιοχή $0 < x < L$, $U = -V_0$ και καθώς

$E > -V_0 \to E + V_0 > 0$ ορίζουμε $K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(E+V_0)}$ και η (1) παίρνει τη μορφή

$$\psi_I''(x) = -K^2 \psi_I(x)$$

με γενική λύση

$$\psi_I = A \sin Kx + B \cos Kx$$

Στην περιοχή $x > L$ το δυναμικό μηδενίζεται και καθώς $E < 0$ η (1) γράφεται ως

$$\psi_{II}''(x) = k^2 \psi_{II}(x)$$

με $k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar}} > 0$. Η γενική λύση είναι

$$\psi_{II} = C e^{kx} + D e^{-kx}$$

Οι οριακές συνθήκες είναι $\psi_I(0) = 0$ καθώς το δυναμικό απειρίζεται στο $x = 0$ και κατά συνέπεια $B = 0$. Επίσης η κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι πεπερασμένη στο $x \to +\infty$ και άρα $C = 0$. Η κυματοσυνάρτηση είναι λοιπόν της μορφής

$$\begin{aligned} \psi_I &= A \sin K x \;, 0 < x < L \\ \psi_{II} &= D e^{-kx}, \qquad x > L \end{aligned}$$

Η συνέχεια της κυματοσυναρτήσεως και της παραγώγου της στο $x = L$ συνεπάγονται

$$\left.\begin{aligned} \psi_I(L) = \psi_{II}(L) &\Rightarrow A \sin K L = D e^{-kL} \\ \psi_I'(L) = \psi_{II}'(L) &\Rightarrow A K \cos K L = -D k e^{-kL} \end{aligned}\right\} (2)$$

όπου η πρώτη σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της σταθεράς D συναρτήσει της A, $D = A e^{kL} \sin KL$.

β)Διαιρώντας τις δύο σχέσεις (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{\sin KL}{K \cos KL} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \tan K L = -\frac{K}{k}$$

που είναι και η ζητούμενη εξίσωση που ικανοποιούν οι τιμές της ενέργειας με K και k όπως ορίστηκαν παραπάνω.

Άσκηση 7

Α) Η αβεβαιότητα της θέσης δίνεται από

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.26) και το Παράδειγμα 5.9 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer η κυματοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή στη βασική κατάσταση είναι

$$\psi = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

Συνεπώς

$$\left\langle x \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x \psi^2 = 0$$

καθώς πρόκειται για ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε συμμετρικά όρια.
Επίσης

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 \psi^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2\, e^{-m\omega x^2/\hbar} =$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{\pi} m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2\, e^{-y^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{\pi} m\omega} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Επομένως

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle}$$

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι $\Delta x = d$.

Άρα: $d = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}} \Rightarrow \omega = \dfrac{\hbar}{2md^2}$

Β) Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας δίνεται από

$$\left\langle V \right\rangle = \frac{1}{2} k \left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \left\langle x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{8md^2}$$

Γ) Η ενέργεια του ταλαντωτή στη βασική του κατάσταση είναι $E_1 = \dfrac{\hbar\omega}{2} = \dfrac{\hbar^2}{4md^2}$

$$E = T + V \Rightarrow \left\langle T \right\rangle = \left\langle E \right\rangle - \left\langle V \right\rangle = E_1 - \left\langle V \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4md^2} - \frac{\hbar^2}{8md^2} = \frac{\hbar^2}{8md^2}$$

Άσκηση 8

Α) Ζητείται η πιθανότητα διελεύσεως Τ όταν L=5 A^o και 10 A^o ενώ E=2.5 eV. Το ύψος του φραγμού είναι U = Φ = 5eV.

Με βάση τα δεδομένα χρησιμοποιούμε την (6.9) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer έχουμε

$$T(E) \approx \left[\frac{4k\delta}{1+\left(k\delta\right)^2}\right]^2 e^{-2L/\delta} \tag{2}$$

όπου $k\delta=\sqrt{\dfrac{E}{U-E}}$ και $\delta=\dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}}$

Με τα δεδομένα, η (2) γράφεται

$$T=16\frac{E}{\Phi}\left(1-\frac{E}{\Phi}\right)e^{-2L\sqrt{2m(\Phi-E)}/\hbar}$$

Υπολογίζουμε τον εκθέτη

$$\frac{2\sqrt{2m(\Phi-E)}}{\hbar}L=\frac{2\sqrt{2mc^2(\Phi-E)}}{\hbar c}L=\frac{2\sqrt{2\times 0.5110\times 10^6\,\mathrm{eV}(5-2.5)\mathrm{eV}}}{197.3\mathrm{eV}{\bullet}\mathrm{nm}}L=\frac{16.20L}{\mathrm{nm}}$$

και συνεπώς

$$T(L)=16\frac{2.5}{5.0}\left(1-\frac{2.5}{5.0}\right)e^{-16.2L/\mathrm{nm}}=4e^{-16.2L/\mathrm{nm}}$$

Έτσι έχουμε

$$T(5A^{\circ})=T(0.5\mathrm{nm})=4e^{-16.2\times 0.5\mathrm{nm}/\mathrm{nm}}=1.21\times 10^{-3}$$

και

$$T(10A^{\circ})=T(1\mathrm{nm})=4e^{-16.2\times 1\mathrm{nm}/\mathrm{nm}}=3.69\times 10^{-7}$$

Β) Απομακρυνόμενοι κατά απόσταση ακόμη 5 μονοατομικών στρωμάτων η πιθανότητα μειώνεται κατά 3280 φορές.

Άσκηση 9

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.28) και (3.29) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer οι ακτίνες r_1 και r_2 του μοντέλου του Bohr είναι: $r_1=\alpha_o$ και $r_2=4\alpha_o$

Σύμφωνα με τη σχέση (7.26) του ιδίου βιβλίου η πυκνότητα πιθανότητας είναι

$$\mathrm{P(r)}=\left|\mathrm{R}_{21}\right|^2\mathrm{r}^2=\left(\frac{1}{2\alpha_o}\right)^3\frac{\mathrm{r}^2}{3\alpha_o^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\alpha_o}\mathrm{r}^2$$

Συνεπώς η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε σφαιρικό φλοιό μεταξύ των ακτίνων $r_1=\alpha_o$ και $r_2=4\alpha_o$ είναι

$$\Pi=\int_{\alpha_0}^{4\alpha_0}\left|\mathrm{R}_{21}\right|^2\mathrm{r}^2\mathrm{dr}=\left(\frac{1}{2\alpha_o}\right)^3\frac{1}{3\alpha_0^2}\int_{\alpha_0}^{4\alpha_0}\mathrm{r}^4\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\alpha_0}\mathrm{dr}=$$

$$=\frac{1}{24\alpha_0^5}\int_{\alpha_0}^{4\alpha_0}\mathrm{r}^4\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\alpha_0}\mathrm{dr}=\frac{1}{24}\int_{\alpha_0}^{4\alpha_0}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{r}}{\alpha_0}\right)\left(\frac{\mathrm{r}}{\alpha_0}\right)^4\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\alpha_o}=\frac{1}{24}\int_1^4\mathrm{dz}\,\mathrm{z}^4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}$$

ιόπου θέσαμε $z=r/\alpha_0$. Χρησιμοποιώντας το δοθέν ολοκλήρωμα

$$\Pi=\frac{1}{24}\Big[-e^{-z}\left(z^4+4z^3+12z^2+24z+24\right)\Big]_1^4=$$

$$=\frac{1}{24}\Big[e^{-1}\left(1+4+12+24+24\right)-e^{-4}\left(4^4+4\;4^3+12\;4^2+24\;4+24\right)\Big]=$$

$$=\frac{65e^{-1}-824e^{-4}}{24}=0.368=36.8\%$$

Άσκηση 10

Για το μέτρο της στροφορμής σύμφωνα με τη σχέση (7.13) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer και την εκφώνηση θα έχουμε

$$\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 4.717\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \Rightarrow \ell(\ell+1) = \left(\frac{2\pi 4.717\times10^{-34}}{6.626\times10^{-34}}\right)^2 \approx 20$$

Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια βρίσκουμε $\ell=-5$ που απορρίπτεται και $\ell=4$ που είναι η αποδεκτή λύση.
Για $\ell=4$ οι δυνατές τιμές του μαγνητικού κβαντικού αριθμού είναι $m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$ και οι ζητούμενες γωνίες δίνονται από τη σχέση (7.15) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|L|} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

Έτσι έχουμε

$$m_\ell = -4 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{20}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 153.^\circ$$

$$m_\ell = -3 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{3}{\sqrt{20}} \Rightarrow \theta = 132.^\circ$$

$$m_\ell = -2 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{2}{\sqrt{20}} = +\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 117.^\circ$$

$$m_\ell = -1 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{1}{\sqrt{20}} \Rightarrow \theta = 103.^\circ$$

$$m_\ell = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$m_\ell = +1 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{1}{\sqrt{20}} \Rightarrow \theta = 77.1^\circ$$

$$m_\ell = +2 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{2}{\sqrt{20}} = +\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 63.4^\circ$$

$$m_\ell = +3 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{3}{\sqrt{20}} \Rightarrow \theta = 47.9^\circ$$

$$m_\ell = +4 \Rightarrow \cos\theta = +\frac{4}{\sqrt{20}} = +\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)
Το φάσμα του ατόμου του υδρογόνου δίνεται από

$$E_n = -\frac{me^4}{8{\varepsilon_0}^2 n^2 h^2} = -\frac{13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

ενώ των ιόντων του ηλίου *Z=2*

$$E'_n = -\frac{Z^2 me^4}{8{\varepsilon_0}^2 n^2 h^2} = -\frac{4\times13.6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

Τα μήκη κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας για το υδρογόνο δίνονται από

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{E_m - E_n}{h\,c} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

και για το ιόν του ηλίου και τα αντίστοιχα επίπεδα

$$\frac{1}{\lambda'_{mn}} = \frac{E'_m - E'_n}{h\,c} = 4R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{m'^2}\right)$$

Επομένως

$$\lambda_{mn} = \lambda'_{mn} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{4}{n'^2} - \frac{4}{m'^2}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς τα n, m, n', m' είναι ακέραιοι η ισότητα ισχύει για παράδειγμα όταν $n' = 2n, m' = 2m$ και επομένως προκαλείται η ομοιότητα στα φάσματα. Βέβαια στην πράξη υπάρχει μια μικρή διαφορά λόγω της διαφορετικής ανηγμένης μάζας.

2)

Σύμφωνα με τον de Broglie τα ηλεκτρόνια εκτός από σωματίδια μάζας m_e συμπεριφέρονται και ως κύματα με μήκος κύματος $\lambda = h/p$, όπου p η ορμή των ηλεκτρονίων. Επομένως τα ηλεκτρόνια θα εμφανίζουν κυματικά φαινόμενα όπως αυτό της περίθλασης όταν προσπίπτουν σε επιφάνειες με ασυνέχειες της τάξης του λ. Ο κρύσταλλος δρα σαν φράγμα περίθλασης με απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σχισμών (εδώ ατόμων) ίση με a.

Από τα φράγματα περίθλασης γνωρίζουμε ότι το πρώτο μέγιστο συμβολής (εκτός από το κεντρικό $\theta = 0$) προκύπτει από τη σχέση:

$a\sin\theta = \lambda$ η οποία μας δίνει $\lambda = 1.23$ Å.

Η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} \Rightarrow K = \frac{(6.626\times10^{-34})^2}{2\cdot 9.1095\times10^{-31}\cdot(1.23\times10^{-10})^2}\frac{\mathrm{J}^2\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} \Rightarrow$$

$$K = 1.5928\times10^{-17}\,\mathrm{J} \approx 100\,\mathrm{eV}$$

3)

(Α) Η μεταβολή του μήκους κύματος ενός φωτονίου λόγω σκέδασής του από ηλεκτρόνιο (φαινόμενο Compton) δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

Δίνεται ότι $\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda$ και από την (1) θέτοντας $\theta = 60°$ βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{h}{2m_e c} = \frac{6.626\times10^{-34}}{2\cdot 9.1095\times10^{-31}\cdot 2.9979\times10^{8}}\frac{\mathrm{J\cdot s}}{\mathrm{kg\cdot m/s}} = 1.213\times10^{-12}\,\mathrm{m}$$

(Β) Η αρχική ενέργεια του φωτονίου είναι

$$E = pc = \frac{h}{\lambda}c \xrightarrow{(1)} E = \frac{h}{h/2m_e c}c = 2m_e c^2 \Rightarrow$$

$$E = 2\cdot 9.1095\times10^{-31}\cdot(2.9979\times10^{8})^2\,\frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s^2}} = 1.6374\times10^{-13}\,\mathrm{J} \approx 1\ \mathrm{MeV}$$

4)

Η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι $E = E_1 + E_2 + E_3$, όπου οι επιμέρους ενέργειες δίνονται από

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_x^{\ 2}}n_1^{\ 2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n_1^{\ 2}, \qquad n_1 = 1,2,3,...$$

$$E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_y^{\ 2}}n_2^{\ 2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}4n_2^{\ 2}, \quad n_2 = 1,2,3,... \quad \Rightarrow E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^{\ 2} + 4n_2^{\ 2} + n_3^{\ 2}) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

$$E_3 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_z^{\ 2}}n_3^{\ 2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n_3^{\ 2}, \qquad n_3 = 1,2,3,...$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια και τον εκφυλισμό των καταστάσεων του σωματιδίου. Οι έξι πρώτες δίνονται στον πίνακα:

n_1	n_2	n_3	n^2	**εκφυλισμός**
1	1	1	6	Μη εκφυλισμένη
1 2	1 1	2 1	9	Διπλός
2	1	2	12	Μη εκφυλισμένη
1 3	1 1	3 1	14	Διπλός
2 3	1 1	3 2	17	Διπλός
1	2	1	18	Μη εκφυλισμένη

5)

Με βάση τη σχέση 3.17 από το βιβλίο των Serway-Moses-Moyer, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη κινητική ενέργεια K που μπορεί να έχει ένα σωμάτιο α ώστε να σκεδαστεί ελαστικά από έναν πυρήνα αργύρου ($Z = 47$)

$$K = k\frac{(Ze)(2e)}{r},$$

όπου $k = 10^{-7}c^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ η σταθερά Coulomb και r η απόσταση πλησιέστερης προσέγγισης του σωματιδίου α στον πυρήνα. Θέτοντας όπου r την ακτίνα ενός πυρήνα αργύρου, βρίσκουμε

$$K = k\frac{(Ze)(2e)}{r} = 10^{-7}(2.9979\times10^8)^2\frac{2\cdot47\cdot(1.602\times10^{-19})^2}{5.7\times10^{-15}}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 3.8\times10^{-12}\,\mathrm{J} \Rightarrow K = 23.7\,\mathrm{MeV}$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια των 35 MeV που έχουν τα σωματίδια α είναι μεγαλύτερη από το K, συνεπώς δεν ακολουθούν τον νόμο $(\sin\phi/2)^{-4}$ του Rutherford διότι μπορεί να εισχωρήσουν στον πυρήνα.