# Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

## Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

Ιούλιος 2008

**ΣΥΓΧΡΟΝΗ**

Διάρκεια: 120 λεπτά

**<u>Θέμα 1$^o$</u>** (Μονάδες: 1.5)

Για $x \le 0$ η κυματοσυνάρτηση πρέπει να μηδενίζεται λόγω απειρισμού του δυναμικού. Από τη συνέχεια της κυματοσυνάρτησης στο σημείο $x = 0$

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow Be^{-x^2/C} = 0 \Rightarrow B = 0$$

Από την εξίσωση του Shroedinger για $x > 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x) \Rightarrow$$

$$-\frac{A\hbar^2}{C\,m}e^{-x^2/C}x\left[-3+\frac{2x^2}{C}\right] + \frac{1}{2}m\omega^2 x^3 Ae^{-x^2/C} = E\,Axe^{-x^2/C}$$

$$\Rightarrow A\left[\frac{1}{2}m\,\omega^2 - \frac{2\hbar^2}{m\,C^2}\right]x^3 + A\left[\frac{3\hbar^2}{m\,C} - E\right]x = 0 \Rightarrow C^2 = \frac{4\hbar^2}{m^2\omega^2} \Rightarrow C = \frac{2\hbar}{m\omega}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\psi''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(Axe^{-x^2/C}\right) = A\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/C} - \frac{2x^2}{C}e^{-x^2/C}\right)$$

$$= A\left(-\frac{2x}{C} - \frac{4x}{C} + \frac{4x^3}{C^2}\right)e^{-x^2/C} = \frac{2A}{C}\left(-3+\frac{2x^2}{C}\right)x\,e^{-x^2/C}$$

και το γεγονός ότι για να μηδενίζεται το πολυώνυμο του $x$ για οποιαδήποτε τιμή του $x$ θα πρέπει να μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων του $x$.

Η αρνητική ρίζα στο $C$ απορρίπτεται γιατί θα έδινε κυματοσυνάρτηση που απειρίζεται στο $x \to +\infty$. Επίσης για την ενέργεια βρίσκουμε

$$E = \frac{3\hbar^2}{m\,C} = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Η σταθερά A μπορεί να προσδριοριστεί από την κανονικοποίηση

$$\int_0^{+\infty} dx\left|\psi(x)\right|^2 = 1 \Rightarrow 1 = \left|A\right|^2\int_0^{+\infty} dx\,x^2\,e^{-2x^2/C} = \left|A\right|^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi C^3}{8}} \Rightarrow A = 2\left[\frac{8}{\pi C^3}\right]^{1/4} = 2\left[\frac{m\,\omega}{\pi^{1/3}h}\right]^{3/4}$$

B) $\left\langle x\right\rangle = \int_0^{+\infty} dxx\left|\psi(x)\right|^2 = \left|A\right|^2\int_0^{+\infty} dx\,x^3\,e^{-2x^2/C} = \left|A\right|^2\frac{C^2}{8} = \sqrt{\frac{2C}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}}$

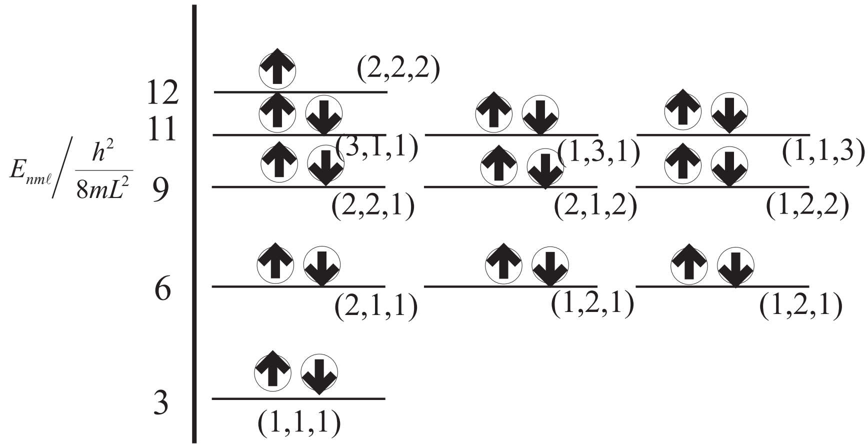
όπου χρησιμοποιήσαμε τα ολοκληρώματα από το τυπολόγιο των θεμάτων.

**<u>Θέμα 2<sup></sup></u>** (Μονάδες: 1.5)

Οι ενέργειες των καταστάσεων του τρισδιάστατου κουτιού δίνονται από τη σχέση (7.8) του βιβλίου των Serway&Moses

$$E_{nm\ell} = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n^2 + m^2 + \ell^2\right), \quad n, m, \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια και σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli, μπορούμε να τοποθετήσουμε το πολύ δύο, με αντιπαράλληλα σπιν, σε κάθε ενεργειακή κατάσταση του πηγαδιού σύμφωνα με το Σχήμα. Επομένως η ολική ενέργεια του συστήματος στη βασική κατάσταση ισούται με




$$E = 2\left(E_{111} + 3E_{112} + 3E_{122} + 3E_{113}\right) + E_{222} = \frac{h^2}{8mL^2}\left[2\times\left(3 + 3\times 6 + 3\times 9 + 3\times 11\right) + 12\right] = \frac{87h^2}{4mL^2}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{87}{mE}}\,\frac{h}{2} = 2.5\mu m$$

**<u>Θέμα 3</u>** (Μονάδες: 2.0)

Α) Το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση $L^2 = l(l+1)\hbar^2 \Rightarrow l(l+1) = (L/\hbar)^2$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$l(l+1) = \left(\frac{2.2801\times 10^{-15}}{6.582\times 10^{-16}}\right)^2 = 12 \Rightarrow l^2 + l - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 3 \\ l = -4 \end{cases}.$$

Προφανώς η αρνητική λύση απορρίπτεται και άρα ο κβαντικός αριθμός περιστροφής είναι $l$=3.

Η ολική ενέργεια του μορίου λόγω ταλάντωσης και περιστροφής δίνεται από τη σχέση (11.10) του βιβλίου των Serway&Moses

$$E_{rot-vib} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}}\left\{l(l+1)\right\} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (1)$$

Εφόσον μας δίνεται η ολική ενέργεια της διεγερμένης κατάστασης, για να υπολογίσουμε τον κβαντικό αριθμό ταλάντωσης $\nu$, πρέπει να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας

$$I_{cm} = \mu R_0^{\,2} = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} R_0^{\,2} = \frac{12u\cdot 16u}{12u + 16u} R_0^{\,2} = 6.8571\cdot u\cdot R_0^{\,2} \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\Rightarrow I_{cm} = 6.8571\times 1.6606\times 10^{-27}\times(0.113\times 10^{-9})^2\,\mathrm{kg\cdot m^2} = 1.454\times 10^{-46}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

και τη συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{\mu}}=\sqrt{\frac{1860}{6.8571\cdot u}}\ \mathrm{rad}\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}}\Rightarrow \omega=4.0416\times10^{14}\ \mathrm{rad/s}\ \ (3)$$

Από τις (1), (2) υπολογίζουμε την ενέργεια ταλάντωσης

$$E_{vib}=E_{rot-vib}-E_{rot}=0.4019-0.0029\,\mathrm{eV}=0.3990\,\mathrm{eV}$$

και κάνοντας χρήση της (3) βρίσκουμε

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=0.3990\,\mathrm{eV}\Rightarrow\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\frac{0.3990}{6.582\times10^{-16}\times4.0416\times10^{14}}=1.5\Rightarrow\nu=1$$

B) Αφού το μόριο αποδιεγείρεται, οι κανόνες επιλογής είναι $\Delta\nu=-1$, $\Delta l=\pm1$. Άρα οι κβαντικοί αριθμοί των σταθμών στις οποίες είναι δυνατόν να αποδιεγερθεί το μόριο είναι {v=0, l=2} και {v=0, l=4}.

**<u>Θέμα 4</u>** **(Μονάδες: 2.0)**

A) Το ιόν του $Li^{2+}$ έχει μόνο ένα ηλεκτρόνιο, άρα συμπεριφέρεται σαν υδρογονοειδές άτομο με $Z$=3 και η ενέργεια της στάθμης $n$ δίνεται από τη σχέση (7.21) του βιβλίου των Serway, Moses, Moyer

$$E_n=-\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\}=(-13.6\mathrm{eV})\frac{Z^2}{n^2},\quad n=1,2,3,...$$

Άρα η ενέργεια της ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση από μια διεγερμένη κατάσταση με κβαντικό αριθμό $n$ στην θεμελιώδη $(n=1)$ είναι:

$$\Delta E=E_n-E_0\Rightarrow hf=(-13.6eV)\cdot3^2\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{1}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n^2}=1-\frac{4.136\times10^{-15}\times2.2195\times10^{16}}{13.6\times3^2}=0.25$$

$$\Rightarrow n=2$$

Εφόσον $n=2$, οι δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού της στροφορμής είναι $l$=0,1. Όμως επειδή οι ατομικές μεταβάσεις υπακούουν στους κανόνες επιλογής $\Delta l=\pm1$ και $\Delta m_l=0,\ \pm1$, συμπεραίνουμε ότι ο κβαντικός αριθμός της στροφορμής γι' αυτή τη διεγερμένη κατάσταση είναι $l=1$.

Το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης σε αυτή την περίπτωση θα είναι (πίνακας 7.3 του βιβλίου των Serway&Moses)

$$R(r)=\left(\frac{3}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{3r}{\sqrt{3}a_0}e^{-3r/2a_0}$$

όπου $a_0=0.529\ \mathring{A}$ η ακτίνα του Bohr.

B) Η πιο πιθανή απόσταση είναι η τιμή του $r$ που κάνει την ακτινική πυκνότητα πιθανότητας $P(r)=r^2\left|R(r)\right|^2=\left(\frac{3}{2a_0}\right)^3\frac{3r^4}{a_0^2}e^{-3r/a_0}$ μέγιστη. Τα ακρότατα βρίσκονται από

$$dP(r)/dr=0\Rightarrow\left(\frac{3}{2a_0}\right)^3\left(\frac{12r^3}{a_0^2}-\frac{9r^4}{a_0^3}\right)e^{-3r/a_0}=0\Rightarrow r^3\left(4-\frac{3r}{a_0}\right)e^{-3r/a_0}=0\Rightarrow\begin{cases}r=0\\ r=4a_0/3\\ r=+\infty\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη λύση μηδενίζει την ακτινική πυκνότητα πιθανότητας $P(r=0)=0$ και άρα πρόκειται για ελάχιστο. Ελάχιστο έχουμε επίσης στο $r=+\infty$ και συνεπώς στο σημείο $r=4a_0/3$ έχουμε μέγιστο καθώς $P(r)\geq 0$.

Άρα η πιο πιθανή απόσταση ηλεκτρονίου-πυρήνα είναι $r=4a_0/3=0.705\,\mathring{A}$.

**Θέμα 5** **(Μονάδες: 1.5)**

Α) Η πιθανότητα καταλήψεως δίνεται από την κατανομή Fermi-Dirac (σελ 302 του βιβλίου των Serway&Moses)

$$f(E)=\frac{1}{1+e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Επομένως η πιθανότητα μια στάθμη να είναι μην είναι κατειλημμένη είναι 1-*f(E)*.
Άρα:

$$1-f(E_F-\varepsilon)=1-\frac{1}{1+e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}}=\frac{1+e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}-1}{1+e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}+1}=f(E_F+\varepsilon)$$

Β)Λύνοντας ως προς *E* έχουμε

$$f(E)=\frac{1}{1+e^{\frac{E-E_F}{kT}}}\quad\Rightarrow\quad E-E_F=kT\ln\left(\frac{1}{f}-1\right)\qquad(1)$$

Δίδεται $f$ = 1% = 0.01, T = (273+27) K = 300 K

Άρα $E-E_F=8.617\times10^{-5}\left(eV/K\right)300K\ \ln\left(\dfrac{1}{0.01}-1\right)=0.12\,eV$

Γ)Σύμφωνα με το ερώτημα (Α) και αφού 99% = 1-1% , η ακατάληπτη στάθμη κείται 0.12 *eV* κάτω από τη στάθμη Fermi, πράγμα που επαληθεύεται και από την (1) με $f$ = 0.99.

**Θέμα 6** **(Μονάδες: 1.5)**

Η σταθερά διάσπασης είναι $\lambda=\dfrac{0.693}{T_{1/2}}=\dfrac{0.693}{4.75\times10^{10}\,y}=1.4589\times10^{-11}\,y^{-1}$ και

επομένως σύμφωνα με τη σχέση (13.7) του βιβλίου των Serway&Moses

$$\mathrm{N}_{87}=\mathrm{N}_{\mathrm{o}_{87}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Rightarrow\mathrm{N}_{\mathrm{o}_{87}}=\mathrm{N}_{87}\mathrm{e}^{+\lambda t}\Rightarrow\mathrm{N}_{\mathrm{o}_{87}}=\mathrm{N}_{87}\mathrm{e}^{(4.62\times10^{-19}\,\mathrm{s}^{-1})(4.6\times10^{9}\,\mathrm{y})(3.156\times10^{7}\,\mathrm{s/y})}\Rightarrow$$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{o}87}=1.0694\ \mathrm{N}_{87}$$

Έχουμε $N_0=N_0^{85}+N_0^{87}$: ολικός αριθμός ατόμων ρουβιδίου τη χρονική στιγμή t=0 (δημιουργία του ηλιακού συστήματος)

$N=N^{85}+N^{87}$: ολικός αριθμός ατόμων ρουβιδίου τη χρονική στιγμή $t=4.6\times10^{9}\,y$ (σήμερα). Προφανώς ισχύει $N_0^{85}=N^{85}$ διότι το ισότοπο $^{85}\mathrm{Rb}$ είναι σταθερό: δεν αποδιεγείρεται αλλά και δεν δημιουργούνται νέα άτομα $^{85}\mathrm{Rb}$ κατά τη διάσπαση του $^{87}\mathrm{Rb}$ ($^{87}\mathrm{Rb}\longrightarrow{}^{87}\mathrm{Sr}+\beta^-$), δηλαδή $N<N_0$.

Η ζητούμενη ποσότητα είναι λοιπόν

$$x = \frac{N_0^{\ 87}}{N_0^{\ 85} + N_0^{\ 87}} = \frac{1.0694 N^{87}}{N^{85} + 1.0694 N^{87}} = \frac{1.0694 \dfrac{N^{87}}{N^{85}}}{1 + 1.0694 \dfrac{N^{87}}{N^{85}}} \qquad (1)$$

Από τα δεδομένα: $\dfrac{N^{87}}{N^{85} + N^{87}} = 0.2783, \dfrac{N^{85}}{N^{85} + N^{87}} = 0.7217 \Rightarrow \dfrac{N^{87}}{N^{85}} = 0.3856 \qquad (2)$

και με αντικατάσταση στην (1):

$x = \dfrac{1.0694 \cdot 0.3856}{1 + 1.0694 \cdot 0.3856} = 0.2920 = 29.2\%$ που είναι το ποσοστό των ατόμων $^{87}\mathrm{Rb}$ κατά τη δημιουργία του ηλιακού συστήματος.

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^2 e^{-a x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^3 e^{-a x^2} = \frac{1}{2a^2}$$