Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

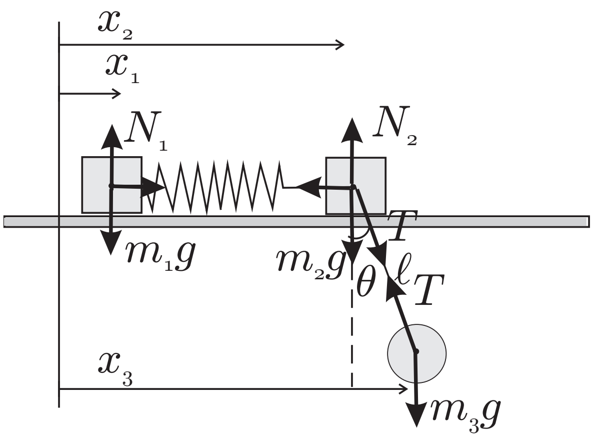
Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

Ιούλιος 2008

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Διάρκεια: 210 λεπτά

<u>Θέμα 1^ο</u> (Μονάδες: 2.5)



Α) Θεωρούμε τις αποστάσεις των τριών μαζών από ακίνητο σημείο x_1, x_2 και x_3 αντίστοιχα. Στη μάζα m_1 ενεργεί το βάρος της m_1g το οποίο εξουδετερώνεται από την αντίδραση του επιπέδου N_1 (στον κάθετο άξονα) και η δύναμη του ελατηρίου (στον οριζόντιο άξονα) επομένως από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 + \ell) \qquad (1)$$

Για τη μάζα m_2 η αντίδραση του επιπέδου εξουδετερώνει το βάρος και την κάθετη συνιστώσα της τάσης T, $N_2 = m_2g + T\cos\theta$ ενώ παράλληλα με το επίπεδο ασκείται η δύναμη του ελατηρίου $+k(x_1 - x_2)$ και η παράλληλη συνιστώσα της τάσης $T\sin\theta$

Συνεπώς

$$m_2\ddot{x}_2 = +k(x_1 - x_2 + \ell) + T\sin\theta \qquad (2)$$

Για τη μάζα m_3 έχουμε για μικρές γωνίες ταλάντωσης στην κάθετη συνιστώσα

$$T\cos\theta = m_3g \qquad (3)$$

ενώ στην οριζόντια

$$m_2\ddot{x}_3 = -T\sin\theta \qquad (4)$$

Από την (3) βρίσκουμε $T = \dfrac{m_3g}{\cos\theta}$ και συνεπώς αντικαθιστώντας στις (2) και (3) παίρνουμε

$$m_2\ddot{x}_2 = +k(x_1 - x_2 + \ell) + m_3\, g\tan\theta \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = +k(x_1 - x_2 + \ell) + m_3\, g\,\frac{x_3 - x_2}{\ell}$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -m_3\, g\tan\theta = -m_3\, g\,\frac{x_3 - x_2}{\ell}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών και τη συνθήκη $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ έχουμε τελικά

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2(x_1 - x_2 + \ell)$$

$$\ddot{x}_2 = +\frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - x_2 + \ell) + \frac{3\omega_0^2}{2}\left(x_3 - x_2\right) = \frac{\omega_0^2}{2}\left(x_1 - 4x_2 + 3x_3 + \ell\right)$$

$$\ddot{x}_3 = -\omega_0^2\left(x_3 - x_2\right)$$

Β) Εισάγοντας $\tilde{x}_1 = x_1 + \ell, \tilde{x}_2 = x_2, \tilde{x}_3 = x_3$ μπορούμε να απαλείψουμε το ℓ από τις εξισώσεις και αυτές παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = \omega_0^2\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Εισάγοντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $\tilde{x}_i = A_i\cos\left(\omega t + \phi\right), i = 1,2,3$, η (2) γράφεται ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega_0^2 + \omega^2 & \omega_0^2 & 0\\ \frac{\omega_0^2}{2} & -2\omega_0^2 + \omega^2 & \frac{3\omega_0^2}{2}\\ 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

η οποία έχει λύσεις όταν

$$\det\begin{pmatrix}-\omega_0^2 + \omega^2 & \omega_0^2 & 0\\ \frac{\omega_0^2}{2} & -2\omega_0^2 + \omega^2 & \frac{3\omega_0^2}{2}\\ 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega^2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\begin{vmatrix}-2\omega_0^2 + \omega^2 & \frac{3\omega_0^2}{2}\\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega^2\end{vmatrix} - \omega_0^2\begin{vmatrix}\frac{\omega_0^2}{2} & \frac{3\omega_0^2}{2}\\ 0 & -\omega_0^2 + \omega^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right) - \frac{3\omega_0^4}{2}\right] - \frac{\omega_0^4}{2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left[\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2\right] = 0 \Rightarrow \omega^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(\omega^2 - 3\omega_0^2\right) = 0$$

και συνεπώς οι γωνιακές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega_0, \omega_3 = \sqrt{3}\,\omega_0$$

Η κανονικός τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα $\omega_1 = 0$ αντιστοιχεί σε μεταφορική κίνηση του συστήματος.

Θέμα 2° (Μονάδες: 1.0)

Α) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των αρμονικών ταλαντώσεων χορδής μήκους L με στερεωμένα άκρα έχουμε για το πλάτος ταλάντωσης

$$y(x,t) = A\sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \phi)$$

όπου $k_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1,2,3,\ldots$ και $\omega_n = k_n\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ όπου $L = 1m$

Εφόσον το σημείο στο $x_0 = 25cm$ παραμένει σταθερό θα πρέπει

$$y(x_0,t) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{1m}0.25m\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow n = 4,8,12,\ldots$$

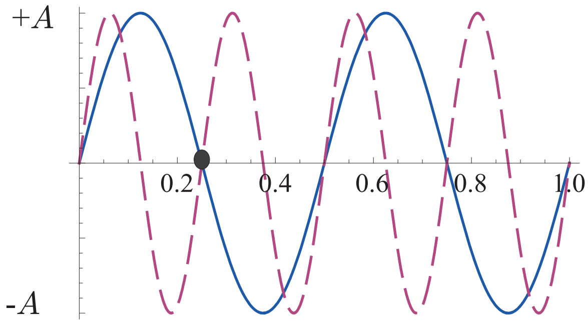
δηλαδή το n είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4

$$n = 4\ell, \ell = 1,2,\ldots$$

και οι συχνότητες των αρμονικών τρόπων ταλάντωσης δίνονται από

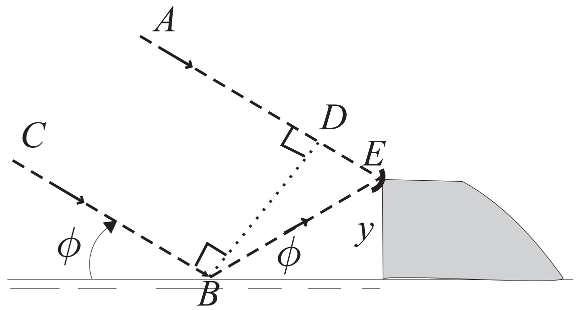
$$f_\ell = \frac{\omega_\ell}{2\pi} = \frac{2\ell}{1\text{m}}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \ell = 1,2,\ldots$$

Β) Οι δύο πρώτοι αρμονικοί τρόποι ταλάντωσης φαίνονται στο σχήμα, ο πρώτος με συνεχή γραμμή και ο δεύτερος με διακεκομμένη γραμμή.



Θέμα 3° (Μονάδες: 1.5)

Σύμφωνα με την εκφώνηση το ραντάρ λαμβάνει δύο σήματα άμεσα (ΑΕ) και έμμεσα (CBE). Λόγω της απόστασης της πηγής οι ακτίνες ΑΕ και CB μπορούν να θεωρηθούν παράλληλες. Η κάθετος BD στην ΑΕ είναι μέτωπο κύματος, άρα τα B και D δεν έχουν διαφορά φάσης. Πέραν του μετώπου BD η διαφορά δρόμου Δr των δύο ακτίνων είναι (δοθέντος ότι η γωνία DBE = 180 – 90 – 2φ)



$$\Delta r = BE - DE = BE - BE\sin\left(\pi - 2\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y}{\sin\phi}\left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right)\right]$$

όπου για να βρούμε την DE χρησιμοποιήσαμε το ορθογώνιο τρίγωνο BDE. Για $\phi = 35°$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι υπάρχει μια πρόσθετη φάση π λόγω ανάκλασης, η οποία αντιστοιχεί σε διαφορά δρόμου $\frac{\lambda}{2}$, έχουμε

$$\Delta r = \frac{y}{\sin 35°}\left[1 - \sin(20°)\right] + \frac{400m}{2}$$

Ελάχιστα έχουμε όταν

$$\Delta r = \frac{y}{\sin 30°}\left[1-\sin\left(20°\right)\right]+\frac{\lambda}{2}=(2n+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{y}{\sin 35°}\left[1-\sin\left(20°\right)\right]=n\lambda$$

όπου $n = 0,1,2,\ldots$ Το πρώτο ελάχιστο, για $\phi > 0$ όπως εδώ, αντιστοιχεί σε $n = 1$ και συνεπώς

$$y = \frac{400m}{\left[1-\sin\left(20°\right)\right]}\sin 35° = 349.m$$

<u>Θέμα 4^ο</u> (Μονάδες: 1.0)

Α) Για να εξισορροπήσουμε το βάρος του χαρτιού θα πρέπει η (μέση) πίεση P της ακτινοβολίας να είναι τέτοια ώστε

$PA = mg \Rightarrow P = \dfrac{mg}{A}$, όπου A η επιφάνεια του χαρτιού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Όμως αφού το χαρτί θεωρείται τέλειος απορροφητής

$P = \dfrac{I}{c}$, όπου I η ένταση της ακτινοβολίας

Επομένως συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{mg}{A} = \frac{I}{c} \Rightarrow I = \frac{mgc}{A} \Rightarrow I = 1.2\times10^{8} W/m^{2}$$

Για επίπεδο κύμα έχουμε

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^{\ 2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.2\times10^{8}}{3\times10^{8}\cdot 8.85\times10^{-12}}} = 3\times10^{5}\ V/m$$

και

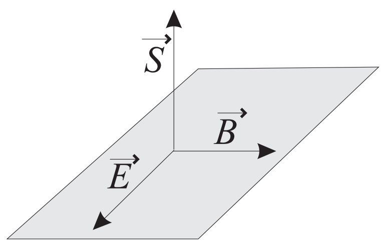
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3\times10^{5}\ V/m}{3\times10^{8} m/\sec} = 1\times10^{-3}T$$

Β) Η ισχύς θα δίνεται από τη σχέση

$\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma = I\cdot A = 1.2\times10^{8}\dfrac{W}{m^{2}}\cdot 50\times10^{-4}m^{2} = 6.0\times10^{5}W$ με αποτέλεσμα την εξάτμιση του χαρτιού.

Γ)Το διάνυσμα Poynting ορίζεται ως

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

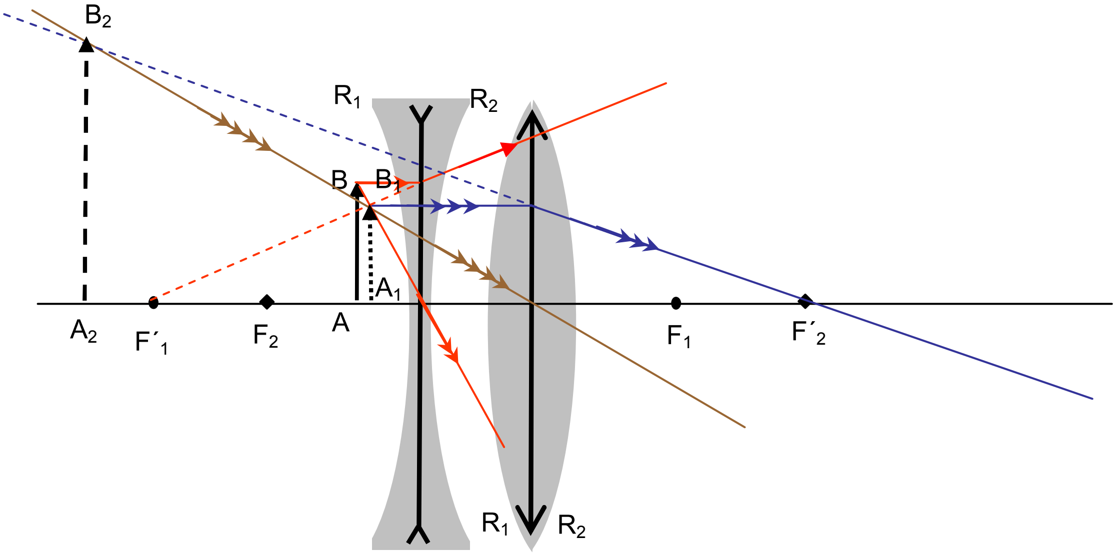


και για ένα επίπεδο ΗΜ κύμα έχει τη διεύθυνση και φορά που συμπίπτει με τη διάδοση της ενέργειας. Συνεπώς το διάνυσμα Poynting είναι κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού και με φορά προς τα πάνω ενώ τα διανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και παράλληλα με το επίπεδο του χαρτιού.

<u>Θέμα 5^ο</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Η εστιακή απόσταση των φακών θα δίνεται από τη σχέση:

$\dfrac{1}{f} = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$, όπου οι ακτίνες καμπυλότητας έχουν ληφθεί σύμφωνα με την ενιαία σύμβαση. Έτσι για τον αποκλίνοντα φακό έχουμε R_1=-35cm, R_2=+35cm και συνεπώς f_1=-35cm ενώ για τον συγκλίνοντα R_1=+35cm, R_2=-35cm και συνεπώς f_2=+35cm



Για να προσδιορίσουμε ποσοτικά τη θέση του ειδώλου θα εφαρμόσουμε την εξίσωση των λεπτών φακών. Για τον αποκλίνοντα φακό θα έχουμε:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\Rightarrow q_1=\frac{f_1p_1}{p_1-f_1}=\frac{(-35cm)(+10cm)}{+10\text{cm-(-35cm)}}\Rightarrow q_1=-7.8cm$$

δηλαδή το είδωλο θα βρίσκεται αριστερά του φακού (βλ. σχήμα) και θα είναι φανταστικό.

Το είδωλο αυτό θα αποτελέσει αντικείμενο για το συγκλίνοντα φακό με p_2=15cm+7.8cm=+22.8cm.

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{p_2}\Rightarrow q_2=\frac{f_2p_2}{p_2-f_2}=\frac{(+35cm)(+22.8cm)}{+22.8cm\text{-35cm}}\Rightarrow q_2=-65.4cm$$

δηλαδή το είδωλο θα βρίσκεται αριστερά του φακού (φανταστικό) και θα απέχει 65.4cm από τον συγκλίνοντα και 50.4 cm από τον αποκλίνοντα.

Β) Η μεγέθυνση κάθε φακού μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις:

$$M_1=\frac{A_1B_1}{AB}=-\frac{q_1}{p_1}=-\frac{-7.8\text{cm}}{10\text{cm}}=+0.78$$

$$M_2=\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=-\frac{q_2}{p_2}=-\frac{(-65.4\text{cm})}{22.8\text{cm}}=+2.87$$

Συνεπώς η τελική μεγέθυνση θα είναι $M=\frac{A_2B_2}{AB}=M_1M_2=(+0.78)(+2.87)=+2.24$

Το θετικό πρόσημο δείχνει ότι το τελικό είδωλο A_2B_2 θα έχει την ίδια φορά με το αντικείμενο ΑΒ.

<u>Θέμα 6</u>

<u>Θέμα 6^o</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Προφανώς γραμμικά πολωμένο με ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα του πολωτή $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ και μέτρο ηλεκτρικού πεδίου

$$E' = \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left[\sin(kz-\omega t)+\cos(kz-\omega t)\right] = E_0 \sin(kz-\omega t+\frac{\pi}{4})$$

και

$$\vec{E}' = E'\,\hat{n} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(kz-\omega t+\frac{\pi}{4})(1,1,0)$$

Β) Για την προσπίπτουσα δέσμη

$$I = c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = c\varepsilon_0 \left\langle E_0^{\,2}\sin^2(kz-\omega t)+E_0^{\,2}\cos^2(kz-\omega t)\right\rangle$$

$$= c\varepsilon_0 E_0^{\,2}\left[\left\langle \sin^2(kz-\omega t)\right\rangle + \left\langle \cos^2(kz-\omega t)\right\rangle\right] = c\varepsilon_0 E_0^{\,2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = c\varepsilon_0 E_0^{\,2}$$

ενώ για την διερχόμενη

$$I' = c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}'^2 \right\rangle = c\varepsilon_0 \left\langle E_0^{\,2}\sin^2(kz-\omega t+\frac{\pi}{4})\right\rangle = c\varepsilon_0 \frac{E_0^{\,2}}{2}$$

Συνεπώς

$$\frac{I}{I'} = 2$$

Θέμα 7$^{\text{ο}}$ (Μονάδες: 1.0)

Όταν το σύστημα βρίσκεται στον αέρα ο πρώτος σκοτεινός κροσσός σχηματίζεται σε γωνία που δίνεται από τη σχέση

$$\tan\theta_a = \frac{y}{D} = \frac{0.223}{0.500} = 0.446 \Rightarrow \theta_a = 24^o \Rightarrow \sin\theta_a = 0.4073$$

Η θέση λοιπόν του πρώτου ελαχίστου περίθλασης στον αέρα δίνεται από

$$\sin\theta_a = \frac{\lambda}{a} = \frac{c}{f\,a} \qquad (1)$$

όπου $\lambda = c/f$ το μήκος κύματος και a το πλάτος της σχισμής. Όταν το σύστημα τοποθετηθεί στο νερό η συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός παραμένει ίδια αλλάζει όμως η ταχύτητα του λόγω αλλαγής του δείκτη διάθλασης και συνεπώς το μήκος κύματος

$$\lambda_\upsilon = \frac{c_\upsilon}{f} = \frac{c}{nf}$$

και επομένως το πρώτο ελάχιστο εμφανίζεται σε γωνία

$$\sin\theta_\upsilon = \frac{\lambda_\upsilon}{a} = \frac{c}{a\,n\,f} \qquad (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$n = \frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_\upsilon} = \frac{0.4073}{0.2990} = 1.36$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2},\ c = 3.00\times10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$