# Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

## Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα

## ΦΥΕ34

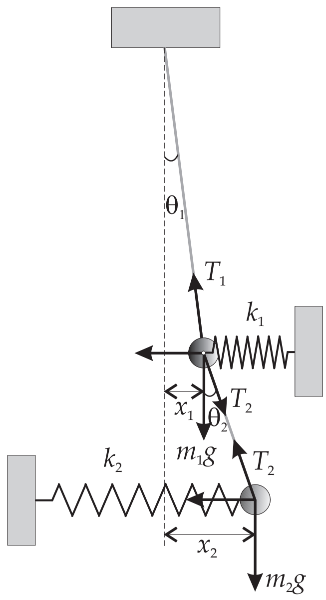
# ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Διάρκεια: 210 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………

Τμήμα: ……………

**Θέμα 1$^{o}$** (Μονάδες: 2.0)




Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από δύο εκκρεμή Α) Θεωρούμε τις μετατοπίσεις των δύο μαζών από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας $x_1$ και $x_2$. Στη μάζα $m_1$ ενεργεί το βάρος της $m_1 g$, οι τάσεις $T_1$ και $T_2$ από τις δύο ράβδους καθώς επίσης και η δύναμη του ελατηρίου. Άρα από το 2$^{o}$ νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 \qquad (1)$$

$$T_1 \cos\theta_1 = m_1 g + T_2 \cos\theta_2 \qquad (2)$$

ενώ οι αντίστοιχες εξισώσεις για τη μάζα $m_2$ είναι:

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - T_2 \sin\theta_2 \qquad (3)$$

$$T_2 \cos\theta_2 = m_2 g \qquad (4)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) και (4), οι σχέσεις γίνονται:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - (m_1 + m_2) g \tan\theta_1 + m_2 g \tan\theta_2 \qquad (1)$$

$$T_1 \cos\theta_1 = m_1 g + m_2 g \qquad (2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - m_2 g \tan\theta_2 \qquad (3)$$

$$T_2 \cos\theta_2 = m_2 g \qquad (4)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\tan\theta_1 = \dfrac{x_1}{l_1}$ και $\tan\theta_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{l_2}$, οι σχέσεις (3),(4) γίνονται

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1}x_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_2}(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \ddot{x}_1 = \left[-\frac{k_1}{m_1} - \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1} - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_2}\right]x_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_2}x_2 \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{g}{l_2}(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{g}{l_2}x_1 - \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{g}{l_2}\right)x_2 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων τιμών βρίσκουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \left[-\omega_0^2 - 2\omega_0^2 - 2\omega_0^2\right]x_1 + 2\omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2\omega_0^2 x_1 - \left(3\omega_0^2 + 2\omega_0^2\right)x_2\end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -5\omega_0^2 x_1 + 2\omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2\omega_0^2 x_1 - 5\omega_0^2 x_2\end{aligned}$$

Β) Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν και ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Εισάγωντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης $x_i = A_i \cos(\omega t + \phi), i = 1,2$ , η (5) γράφεται

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 5\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \\ 2\omega_0^2 & \omega^2 - 5\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

η οποία έχει λύσεις όταν

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 5\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \\ 2\omega_0^2 & \omega^2 - 5\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\omega^2 - 5\omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 - 5\omega_0^2 = 2\omega_0^2 \\ \omega_2^2 - 5\omega_0^2 = -2\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{7}\omega_0 \\ \omega_2 &= \sqrt{3}\omega_0 \end{aligned}$$

**<u>Θέμα 2ο</u>** (Μονάδες: 1.5)

Α) Εφόσον το ένα άκρο της ράβδου είναι ελεύθερο, τα στάσιμα κύματα που μπορούν να αναπτυχθούν στη ράβδο έχουν μήκος κύματος

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n+1}, n = 0,1,2,3,... \quad \text{(σχέση 22.37 Alonso-Finn)}$$

Ο τέταρτος κατά σειρά αρμονικός τρόπος ταλάντωσης ($n = 3$) έχει μήκος κύματος $\lambda = \frac{4L}{7}$ και άρα το χωρικό μέρος του κύματος είναι

$$y(x) = A_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}x) = A_0 \sin(\frac{7\pi}{2L}x)$$

Για τα σημεία μηδενισμού (δεσμοί):

$y(x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{7\pi}{2L}x) = 0 \Rightarrow \frac{7\pi}{2L}x = m\pi \Rightarrow x = m\frac{2L}{7}$ , όπου το $m = 0,1,2,...$ έτσι ώστε $0 \le x \le L$, δηλαδή $x = 0, \frac{2L}{7}, \frac{4L}{7}, \frac{6L}{7}$.

Για τα σημεία μέγιστης ή ελάχιστης απομάκρυνσης (κοιλίες):

$y(x) = \pm A_0 \Rightarrow \sin(\frac{7\pi}{2L}x) = \pm 1 \Rightarrow \frac{7\pi}{2L}x = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2m+1)\frac{L}{7}$ , όπου το $m = 0,1,2,...$ έτσι ώστε $0 \le x \le L$, δηλαδή $x = \frac{L}{7}, \frac{3L}{7}, \frac{5L}{7}, L$.

Β) Η συχνότητα $\nu$ και το μήκος κύματος $\lambda$ συνδέονται με τη σχέση $\upsilon = \lambda \cdot \nu$, όπου $\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ η ταχύτητα του στάσιμου κύματος, οπότε

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{7}{4L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{7}{4L}\sqrt{\frac{G}{m}V} = \frac{7}{4L}\sqrt{\frac{G}{m}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L} \Rightarrow \nu = \frac{7}{4\cdot 0.5}\sqrt{\frac{4\times10^9}{40\times10^{-3}}\pi\left(\frac{5\times10^{-3}}{2}\right)^2 0.5}$$

$$\Rightarrow \nu = 3.5\,\text{kHz}$$

**<u>Θέμα 3ο</u>** (Μονάδες: 1.0)

Α) Έστω οτι η μεμβράνη είναι πακτωμένη για $x$=0, $y$=0, και ελεύθερη για $x$=$a$, $y$=$a$

Αφού το κύμα αρχίζει από $\psi = 0$ για $x$=0, $y$=0, η γενική λύση είναι

$$\psi = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t + \phi)$$

Κατά μήκος του $x$, $a = n_x\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_x}{4} \Rightarrow \lambda_x = \frac{a}{n_x/2 + 1/4},\ n_x = 0,1,2,\ldots$

Ομοίως, κατά μήκος του $y$, $\lambda_y = \frac{a}{n_y/2 + 1/4},\ n_y = 0,1,2,\ldots$

Άρα το ολικό κυματάνυσμα

$$\vec{k} = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_x},\frac{1}{\lambda_y}\right) = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{n_x}{2}+\frac{1}{4},\frac{n_y}{2}+\frac{1}{4},\right) \Rightarrow k = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\left(\frac{n_x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}$$

Η ταχύτητα διαδόσεως είναι $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = k\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = 2\pi\nu$

Άρα

$$\nu = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{n_x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{2}+\frac{1}{4}\right)^2},\ n_x = 0,1,2,\ldots,\ n_y = 0,1,2,\ldots$$

Β) Το μέγιστο μήκος κύματος $\lambda_{\max} = 2\pi/k_{\min}$ δίδεται από το ελάχιστο $k$, δηλαδή για $n_x = n_y = 0$

Άρα

$$\lambda_{\max} = a/\sqrt{2/4^2} = 4a/\sqrt{2}$$

**<u>Θέμα 4ο</u>** (Μονάδες: 1.5)

Α) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] & E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right] \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\hat{y}\frac{\partial}{\partial x}E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+\hat{z}\frac{\partial}{\partial x}E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\hat{y}E_0\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+\hat{z}E_0\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\vec{B} = \hat{y}E_0\frac{\omega}{c}\int dt\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]-\hat{z}E_0\frac{\omega}{c}\int dt\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]+\vec{C}(x,y,z)\Rightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{y}\frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+\hat{z}\frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]+\vec{C}(x,y,z)\Rightarrow$$

$$\vec{B} = -\hat{y}\frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+\hat{z}\frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

όπου καθώς πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικό κύμα η $\vec{C}$ δεν μπορεί παρά να είναι σταθερά (διαφορετικά θα ήταν συνάρτηση και του χρόνου) την οποία επιλέγουμε ίση με μηδέν.

Β) Το διάνυσμα του Poynting δίνεται από

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] & E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right] \\ 0 & -\frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right] & \frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\frac{E_0^{\,2}}{c\mu_0}\left\{\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]+\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]\right\} =$$

$$= \hat{x}\,\varepsilon_0 E_0^{\,2}\left\{\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]+\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{6}\right]\right\}$$

**<u>Θέμα 5$^{ο}$</u>** (Μονάδες: 1.0)

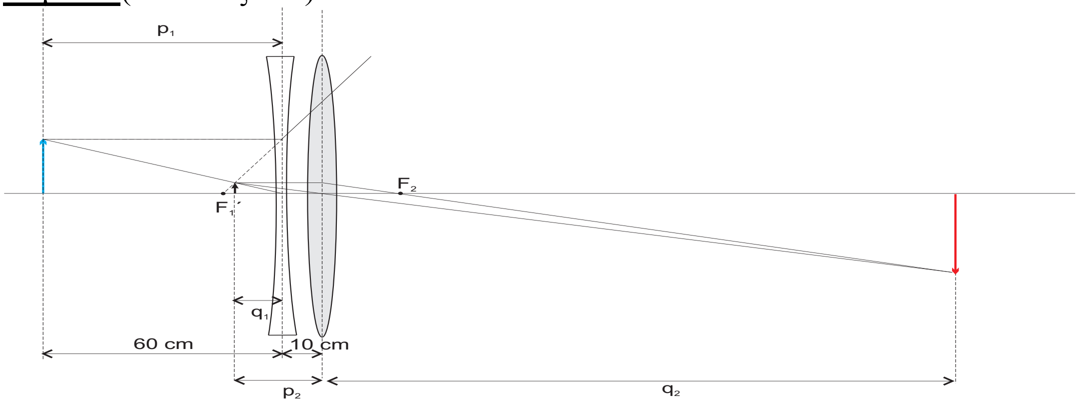
Από τη σχέση 20.26 βρίσκουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι $\tan\vartheta_i = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \vartheta_i = 60^\circ$ και άρα η γωνία διάθλασης $\vartheta_r = 30^\circ$. Μετά από τον πολωτή το Η/Μ κύμα είναι γραμμικά πολωμένο με διεύθυνση πόλωσης που ορίζεται από τον άξονα του πολωτή. Λόγω της πρόσπτωσης υπό γωνία ολικής πόλωσης το ανακλώμενο Η/Μ κύμα είναι γραμμικά πολωμένο κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης. Επομένως μας ενδιαφέρει μόνο αυτή η συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος, της οποίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$E_{i,\sigma} = E_\varphi$, όπου $E_\varphi$ το ηλεκτρικό πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα του πολωτή. Τότε το $E_{i,\sigma} = \sigma\tau\alpha\theta\frac{I}{\sqrt{2}}\cos\varphi$. Από τις σχέσεις 20.25 η ένταση το ανακλώμενου Ηλ. Πεδίου είναι

$$E_{r,\sigma}{}' = E_{i,\sigma}R_\sigma = E_{i,\sigma}\frac{\cos\vartheta_i - n\cos\vartheta_r}{\cos\vartheta_i + n\cos\vartheta_r} = \sigma\tau\alpha\theta\frac{I}{\sqrt{2}}\cos\varphi\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sigma\tau\alpha\theta\frac{I}{2\sqrt{2}}\cos\varphi$$

Άρα η ένταση του Η/Μ πεδίου είναι $I' = \sigma\tau\alpha\theta\left|E_{r,\sigma}{}'\right|^2 = \dfrac{I^2}{4}\cos^2\varphi$

**Θέμα 6°** (Μονάδες: 1.0)




A) Από τον τύπο των φακών και χρησιμοποιώντας ενιαίες συμβάσεις $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{q_1}=\dfrac{1}{f_1}$ με $f_1=-15cm$ και $p_1=60cm$. Άρα βρίσκουμε $q_1=-12cm$, δηλαδή το είδωλο του πρώτου φακού είναι φανταστικό με μεγέθυνση $M_1=-\dfrac{q_1}{p_1}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$. Αυτό αποτελεί αντικείμενο για τον συγκλίνοντα με $p_2=12+10cm=22cm$. Άρα $\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{q_2}=\dfrac{1}{f_2}$ με $f_2=20cm$, οπότε βρίσκουμε $q_2=220cm$. Το είδωλο του δεύτερου φακού είναι πραγματικό με μεγέθυνση $M_2=-\dfrac{q_2}{p_2}=-\dfrac{220}{22}=-10$. Η συνολική μεγέθυνση είναι $M=M_1M_2=\dfrac{-10}{5}=-2$. Άρα το τελικό είδωλο είναι πραγματικό, απέχει $x=60+10+220cm=290cm$ από το αντικείμενο, είναι ανεστραμμένο και έχει διπλάσιο ύψος.

B) Αφού θέλουμε $q_2=\infty$, και η απόσταση $p_2=22cm$ δεν αλλάζει, προφανώς ο φακός είναι συγκλίνων με εστιακή απόσταση $f_2=22cm$.

**Θέμα 7°** (Μονάδες: 2.0)

A) Τα κύρια μέγιστα δίνονται από τη σχέση $\sin\theta=\dfrac{n\lambda}{a}, n=0,\pm1,\pm2\ldots$

Εφαρμόζοντας για δύο γειτονικά μέγιστα

$$0.30=\frac{n\lambda}{a}, n=0,\pm1,\pm2\ldots$$

$$0.36=\frac{(n+1)\lambda}{a}, n=0,\pm1,\pm2\ldots$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{a} = 0.06 \to a = \frac{600\text{nm}}{0.06} = 10\mu\text{m}$$

Β)Το μέγιστο τέταρτης τάξης βρίσκεται κανονικά σε γωνία

$$\sin\theta = \frac{4\lambda}{a} = 0.24$$

και η απουσία του οφείλεται σε μηδενισμό του παράγοντα περίθλασης ο οποίος λαμβάνει χώρα όταν

$$\frac{b\sin\theta}{\lambda} = m, m = \pm1, \pm2, \ldots$$

όπου $b$ το πάχος της κάθε σχισμής. Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του $b$ είναι

$$b = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{600\text{nm}}{0.24} = 2.5\mu\text{m}$$

Γ) Τα κύρια μέγιστα δίνονται από

$$\sin\theta = 0.06n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, k$$

όπου $k = \left[\frac{1}{0.06}\right] = [16.667] = 16$, συνολικά 33 κύρια μέγιστα. Από αυτά θα απουσιάζουν αυτά για τα οποία

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{b} = 0.24m \to 0.06n = 0.24m \to n = 4m$$

Συνεπώς απουσιάζουν τα $n = \pm4, \pm8, \pm12, \pm16$ και παραμένουν 25 μέγιστα.

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

$$g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}, \; c = 3.00\times10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ