Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΥΓΧΡΟΝΗ

Διάρκεια: 180 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 1.5)

Από τη συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου στο σημείο $x=0$ παίρνουμε αντίστοιχα

$$A = C$$

$$-a\,A + A\,B = Ca \Rightarrow 2Aa = AB \Rightarrow B = 2a$$

Αντικαθιστώντας στην κυματοσυνάρτηση και από την κανονικοποίηση βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left|\psi(x)\right|^2 = 1 \Rightarrow A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{2ax} + A^2\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-2ax}(1+2ax)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$A^2\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{2ax} + A^2\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-2ax}\left(1+4a\,x+4\,a^2x^2\right) = 1$$

$$A^2\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{4a}{(2a)^2}1!+\frac{4a^2}{(2a)^3}2!\right] = 1 \Rightarrow A^2\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right] = 1 \Rightarrow A^2\frac{3}{a} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

B) Η μέση τιμή της θέσης δίνεται από

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\left|\psi(x)\right|^2 = \frac{a}{3}\int_{-\infty}^{0} dx\, x\, e^{2ax} + \frac{a}{3}\int_{0}^{+\infty} dx\ \ x\, e^{-2ax}(1+2ax)^2 =$$

$$= -\frac{a}{3}\int_{0}^{\infty} dx\, x\, e^{2ax} + \frac{a}{3}\int_{0}^{+\infty} dx\ \ x\, e^{-2ax}(1+2ax)^2 = \frac{a}{3}\left[\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-2ax}\left(4ax^2+4a^2x^3\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{3}\left(\frac{8a}{\left(2a\right)^3}+\frac{24a^2}{\left(2a\right)^4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2a}+\frac{3}{2a}\right) = \frac{5}{6a}$$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 1.5)

A) Στην προσέγγιση ευρέως φάσματος, η πιθανότητα δίνεται από

$$T(E) = \left(\frac{4k\delta}{1+\left(k\delta\right)^2}\right)^2 e^{-2L/\delta}$$

όπου

$$\delta = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2\left(U-E\right)}} = \frac{197,3\,\mathrm{eV\,nm}}{\sqrt{2\times 511\times 10^3 eV\times\left(15-13\right)eV}} = 0.138nm$$

και

$$k\delta = \sqrt{\frac{E}{U-E}} = \sqrt{\frac{13}{2}} = 2.55$$

$$T_e = \left(\frac{4\times 2,55}{1+6,5}\right)^2 e^{-2L/\delta} = 0.025 \Rightarrow 1.849 e^{-2L/\delta} = 0.025$$

$$\Rightarrow L = -\frac{0.138\mathrm{nm}}{2}\times\ln\left(\frac{0.025}{1.849}\right) = 0.30\mathrm{nm}$$

Β) Σύμφωνα με τον πίνακα 15.2 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer $m_\mu = 105.7\mathrm{MeV/c^2}$ οπότε

$$\delta = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_\mu c^2\left(U-E\right)}} = \frac{197,3\,\mathrm{eV\,nm}}{\sqrt{2\times 105.7\times 10^6 eV\times\left(15-13\right)eV}} = 9.60\mathrm{pm}$$

και

$$T_\mu = \left(\frac{4\times 2,55}{1+6,5}\right)^2 e^{-2L/\delta_\mu} = 0.025 \Rightarrow 1.849 e^{-2\times 0.30/0.0096} = 2.4\times 10^{-27}$$

<u>Θέμα 3^o</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Σύμφωνα με τον Πίνακα 7.3 του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης για Z=2 δίνεται από

$$R(r) = \frac{2}{\sqrt{3}a_0^{5/2}} r\, e^{-r/a_0}$$

Β) Η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από $P(r)dr = \left|R(r)\right|^2 r^2 dr = r^2 R(r)^2 dr$ και παρουσιάζει ακρότατα για

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3a_0^5}\frac{d}{dr}\left[r^4 e^{-2r/a_0}\right] = 0 \Rightarrow \frac{8r^3}{3a_0^5} e^{-2r/a_0}\left(2-\frac{r}{a_0}\right) = 0 \Rightarrow r = 0, 2a_0, \infty$$

Καθώς $\psi(0)=0$ και η πιθανότητα είναι πάντα θετική στο $r=0$ έχουμε ελάχιστο και ομοίως $\psi(\infty)=0$. Επομένως για $r=2a_0$ έχουμε μέγιστο.

Γ) Η προβλεπόμενη από τη θεωρία του Bohr ακτίνα δίνεται από τη σχέση (3.35) του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer

$$r_2 = \frac{2^2 a_0}{2} = 2a_0$$

Τα αποτελέσματα συμπίπτουν, δηλαδή η προβλεπόμενη από Θεωρία Bohr ακτίνα αντιστοιχεί στο μέγιστο της πιθανότητας εύρεσης του ηλεκτρονίου. Το γεγονός αυτό είναι απλή σύμπτωση, καθώς είναι γνωστό ότι η θεωρία Bohr δεν είναι πλήρης και προβλέπει σωστά μόνο τις ενεργειακές στάθμες των υδρογονοειδών ιόντων.

Δ) Καθώς είμαστε στην κατάσταση 2p έχουμε $\ell = 1$ και συνεπώς

$$m = -1, 1, 0, 1$$

Επομένως οι δυνατές τιμές της γωνίας, σύμφωνα με την (7.15) των Serway-Moses-Moyer είναι

$$\cos\theta = \frac{m_\ell}{\sqrt{2}} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}},\right\} \Rightarrow \theta = \left\{-45^\circ, 0, +45^\circ\right\}$$

Θέμα 4ο (Μονάδες: 2.0)
Α) Η ενέργεια περιστροφής του μορίου που βρίσκεται στην κατάσταση ℓ δίνεται από τη σχέση 11.5

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}} \ell(\ell+1) \qquad (1)$$

όπου $I_{cm} = \mu R_0^2$ η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας,

$\mu = \frac{m_N m_N}{m_N + m_N} = \frac{m_N}{2} = 7 \cdot u = 7 \times 1.66 \times 10^{-27} kg = 1.1620 \times 10^{-26} kg$ η ανηγμένη μάζα,

και $R_0 = 0.110 nm$ το μήκος δεσμού. Με αντικατάσταση στην (1) για $\ell = 6$ έχουμε

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_{cm}} \ell(\ell+1) = \frac{(1.055 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.1620 \times 10^{-26} \times (0.110 \times 10^{-9})^2} 6 \times 7\, J = 1.6624 \times 10^{-21} J = 0.0104\, eV$$

Β) Από τη γνωστή σχέση

$$\Delta U = \frac{1}{2} K (\Delta x)^2 \Rightarrow K = \frac{2\Delta U}{(\Delta x)^2} = \frac{2 \times 0.72 \times 1.602 \times 10^{-19}}{(0.01 \times 10^{-9})^2} N/m \Rightarrow K = 2307\, N/m$$

Επίσης από τη σχέση 11.9 υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω,

$$K = \mu\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{2307}{1.1620 \times 10^{-26}}} rad/s = 4.46 \times 10^{14} rad/s.$$

Η ενέργεια ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση 11.8

$$E_{vib} = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (2)$$

και είναι ελάχιστη για $v = 0$, $E_{vib,0} = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2} 6.582 \times 10^{-16} \times 4.46 \times 10^{14} eV = 0.147\, eV$

Γ) Για να υπολογίσουμε τη στροφορμή του μορίου στην τελική κατάσταση αρκεί να βρούμε το ℓ'. Με το φωτόνιο το μόριο απορροφά ενέργεια $\Delta E = \hbar\omega = 6.582 \times 10^{-16} \times 4.42 \times 10^{14} eV = 0.291 eV$, ενώ από το προηγούμενο ερώτημα Β) έχουμε $\hbar\omega = 0.294\, eV$.

Για απορρόφηση φωτονίου ισχύουν οι κανόνες επιλογής $\Delta v = \pm 1$, $\Delta \ell = \pm 1$ και οι σχέσεις 11.14. Από τα δεδομένα παρατηρούμε ότι $\Delta E < \hbar\omega$, άρα έχουμε την περίπτωση $\Delta \ell = -1$ και ισχύει η σχέση

$$\Delta E = \hbar\omega - \frac{\hbar^2}{2I_{cm}} 2\ell \qquad (3)$$

Πράγματι βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του Α) $[\frac{\hbar^2}{2I_{cm}} 2\ell = \frac{E_{rot}}{7} 2 = 0.003\, eV]$ επαληθεύουν την (3), άρα $\ell' = 5$ και $L' = \sqrt{\ell'(\ell'+1)}\hbar = \sqrt{30}\hbar = 3.6 \times 10^{-15} eV \cdot s$

Θέμα 5ο (Μονάδες: 1.5)
Τα ηλεκτρόνια του $1s^2$ έχουν

$$n = 1, l = 0, m_l = 0 \text{ και } m_s = \frac{1}{2} \text{ και } m_s = -\frac{1}{2} \text{ αντιστοίχως.}$$

Ένα ηλεκτρόνιο 2s διεγείρεται σε ένα από τα τρία τροχιακά 2p, εκ των οποίων τα δύο είναι ήδη κατειλημμένα με ηλεκτρόνια ομοπαραλλήλων σπιν. Βάσει της αρχής του Pauli μπορεί να πάει είτε σε αυτά, με αντίθετο σπίν, είτε στο ακατάληπτο με

οιονδήποτε σπιν. Λόγω των κανόνων του Hund που περιγράφουν οτι ενεργειακώς συμφέρει να πάει όσον το δυνατόν μακρύτερα με ομόρροπο σπίν θα καταλάβει το ακατάληπτο τροχιακό 2p με ομόρροπο σπίν.
Άρα οι κβαντικοί αριθμοί των 4^{ων} ηλεκτρονίων θα είναι

$$n=2, l=1, m_l=1, m_s=\frac{1}{2}$$

$$n=2, l=1, m_l=0, m_s=\frac{1}{2}$$

$$n=2, l=1, m_l=-1, m_s=\frac{1}{2}$$

$$n=2, l=0, m_l=0, m_s=\frac{1}{2}$$

ή ομοίως, με $m_s=-\frac{1}{2}$ (αρκεί ολα τα σπιν να είναι ομοπαράλληλα).

<u>Θέμα 6^o</u> (Μονάδες: 2.0)
Από το χρόνο ημιζωής του άνθρακα ^{14}C βρίσκουμε την σταθερά διάσπασής του
$\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=3.836\times10^{-12}s^{-1}$
Για μάζα άνθρακα ίση με m, ο αριθμός πυρήνων ^{12}C είναι

$$N(^{12}C)=\frac{6.02\times10^{23}\,nucl/gr-at}{12gr/gr-at}m$$

και άρα για τις μάζες m_1=20g και m_2=2 g έχουμε αντίστοιχα
N_1= 10^{24}, N_2= 10^{23} πυρήνες. Δεδομένου ότι ο λόγος του ^{14}C προς ^{12}C είναι $1.3\text{x}10^{-12}$ ο αριθμός των αρχικών πυρήνων ^{14}C για κάθε δείγμα είναι

$N_{0,1}$=$1.3\text{x}10^{12}$ πυρήνες ^{14}C
$N_{0,2}$=$1.3\text{x}10^{11}$ πυρήνες ^{14}C
Αντίστοιχα βρίσκουμε την αρχική ενεργότητα για το κάθε δείγμα ξεχωριστά
$R_{0,1}$ =300 διασπάσεις /min
$R_{0,2}$ =30 διασπάσεις /min
Η ενεργότητα του μολυσμένου δείγματος την παρούσα χρονική στιγμή θα δίνεται από την σχέση
$R=R_{0,1}e^{-\lambda t_1}+R_{0,2}e^{-\lambda t_2}$
όπου t_1 , t_2 είναι οι χρόνοι του κάθε δείγματος μέχρι σήμερα από την στιγμή που έπαψαν να ζούν. Ισχύει $t_2=2120\times3.15\times10^{7}=6.67\times10^{10}$ και
$R_2=R_{0,2}e^{-\lambda t_2}=30e^{-0.25}=23$. Ισχύει

$$-\lambda t_1=\ln\left(\frac{200-23}{300}\right)=\ln\left(\frac{174}{300}\right)=-0.527 \text{ και τελικά}$$

$$t_1=\frac{0.544}{3.84\times10^{-12}}=1.3787\times10^{11}s=4372\ \varepsilon\tau\eta$$

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

$$\int_0^{+\infty} dx\, e^{-kx}\, x^n=\frac{n!}{k^{n+1}}\quad, n=\{0,1,2,\ldots\}, k>0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ