Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Σύμφωνα με τον αρχικό προγραμματισμό, στο ΣΑ της Γης ο διαστημικός σταθμός κινείται με σταθερή ταχύτητα $0.62c$ και η απόσταση του έχει να διανύσει είναι $2.25\times10^{14}\,\mathrm{m}$. Συνεπώς η αρχικά προβλεπόμενη διάρκεια του ταξιδιού ήταν

$$\Delta t_{\Gamma}^{0}=\frac{2.25\times10^{14}}{0.62\times3\times10^{8}\times3600\times24}\text{days=14.0days}$$

Β) Λόγω διαστολής του χρόνου για τους παρατηρητές στη Γη (ή στον Δ που ακινητεί ως προς τη Γη) το χρονικό διάστημα είναι

$$\Delta t_{\Gamma}^{1}=\gamma\,10\text{days}=\frac{10\text{days}}{\sqrt{1-0.62^{2}}}=12.75\text{days}$$

και ο διαστημικός σταθμός έχει διανύσει απόσταση

$$\Delta x_{\Gamma}^{1}=\Delta t_{\Gamma}^{1}\,0.62c=2.048\times10^{14}\,\mathrm{m}$$

Επομένως απέχει από τον πλανήτη Δ

$$\Delta x_{\Gamma}^{2}=2.250\times10^{14}\,\text{m-}2.048\times10^{14}\,\text{m=}2.02\times10^{13}\,\mathrm{m}$$

Γ) Σύμφωνα με το νόμο σύνθεσης των ταχυτήτων

$$\upsilon_{\Delta}=\frac{0.62c+0.70c}{1+0.62\times0.70}=0.92c$$

Δ) Ο χρόνος που διήρκεσε η αποστολή μέχρι την εκτόξευση του μικρού διαστημοπλοίου, στο ΣΑ της Γης, είναι σύμφωνα με το (Β) $\Delta t_{\Gamma}^{1}=12.75\text{days}$. Ο χρόνος που διαρκεί το ταξίδι του μικρού διαστημοπλοίου είναι

$$\Delta t_{\Gamma}^{1}=\frac{\Delta x_{\Gamma}^{2}}{\upsilon_{\Delta}}=\frac{2.02\times10^{14}\,\mathrm{m}}{0.92\mathrm{c}}=0.85\text{days}$$

Ο συνολικός χρόνος είναι λοιπόν

$$\Delta t_{\Gamma}^{1}+\Delta t_{\Gamma}^{2}=12.75+0.85\text{days=13.60days}$$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Από τη διατήρηση της ορμής

$$x: 0 = \gamma m \upsilon \cos\vartheta - \frac{E_\varphi}{c}\cos\varphi \Rightarrow \gamma m \upsilon c \cos\vartheta = E_\varphi \cos\varphi \qquad (1)$$

$$y: 0 = \gamma m \upsilon \sin\vartheta - \frac{E_\varphi}{c}\sin\varphi \Rightarrow \gamma m \upsilon c \sin\vartheta = E_\varphi \sin\varphi \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $\vartheta = \varphi$ (3)

και $E_\varphi = \gamma m \upsilon c$ (4)

Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$Mc^2 = \gamma mc^2 + E_\varphi \xrightarrow{(4)} Mc^2 = \gamma mc^2 + \gamma m \upsilon c \Rightarrow \frac{M}{m} = \gamma\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 = \frac{\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^2 = \frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}} \Rightarrow \frac{\upsilon}{c} = \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 + 1} \Rightarrow \upsilon = 0.8c$$

Β) Υπόλογίζουμε

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{5}{3}$ και από τη σχέση (4) με αντικατάσταση βρίσκουμε

$E_\varphi = \gamma m \upsilon c = \frac{5}{3}\frac{M}{3}\frac{8}{10}c^2 = \frac{4}{9}Mc^2$, άρα ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{E_\varphi}{Mc^2} = \frac{4}{9}$.

Γ) Η ορμή του σωματιδίου *m* στο ΣΑ του εργαστηρίου είναι

$p = \gamma m \upsilon = \frac{5}{3}\frac{M}{3}\frac{8}{10}c = \frac{4}{9}Mc$, ενώ η ενέργειά του είναι $E = \gamma mc^2 = \frac{5}{3}\frac{M}{3}c^2 = \frac{5}{9}Mc^2$.

Γνωρίζουμε ότι η ποσότητα $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - p'^2$ είναι αναλλοίωτη (είναι ίδια σε δύο αδρανειακά συστήματα Σ, Σ') οπότε με αντικατάσταση του δεδομένου

$p' = \frac{p}{4} = \frac{1}{9}Mc$ υπολογίζουμε

$$\left(\frac{E'}{c}\right)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 + p'^2 = \left(\frac{5}{9}Mc\right)^2 - \left(\frac{4}{9}Mc\right)^2 + \left(\frac{1}{9}Mc\right)^2 \Rightarrow E' = \frac{\sqrt{10}}{9}Mc^2$$

<u>Θέμα 3^o</u> (Μονάδες: 2.5)

Α) Από το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler έχουμε για τον οδηγό

$$f' = f\sqrt{\frac{c+\upsilon_s}{c-\upsilon_s}}$$

όπου υ_s η ταχύτητα με την οποία η φωτεινή πηγή (φανάρι) πλησιάζει τον παρατηρητή (οδηγό) στο σύστημά του. Βρίσκουμε γιά f'=6.0x10^{14}Hz και f=5.2x10^{14} Hz

$$\frac{\upsilon_s}{c} = 2\frac{\left(\frac{f'}{f}\right)^2}{1+\left(\frac{f'}{f}\right)^2} - 1 = 0.14$$

Β) Για το αστυνομικό αυτοκίνητο εφόσον απομακρύνεται από το φανάρι έχουμε μετατόπιση προς το ερυθρό, δηλ.

$$f' = f\sqrt{\frac{c-\upsilon_s'}{c+\upsilon_s'}}$$

οπου υ_s' είναι η ταχύτητα της πηγής (φανάρι) που απομακρύνεται. Βρίσκουμε γιά f'=4.2x10^{14}Hz και f=5.2x10^{14} Hz

$$\frac{\upsilon_s'}{c} = 1 - 2\frac{\left(\frac{f'}{f}\right)^2}{1+\left(\frac{f'}{f}\right)^2} = 0.21$$

<u>Θέμα 4^o</u> (Μονάδες: 2.5)

Α) Στο ΣΑ του διαστημοπλοίου η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $0.2c$ και διανύει μήκος $L = 1500\text{m}$, επομένως διανύει την απόσταση ΑΒ σε

$$t_\Delta = \frac{L}{0.2c} = \frac{1500\text{m}}{0.2\times 3\times 10^8\,\text{m/s}} = 2.500\times 10^{-5}\text{s}=25.00\mu\text{s}$$

Β) Θεωρούμε ότι οι αρχές των αξόνων των δύο ΣΑ (διαστημοπλοίου και Γης) ότι συμπίπτουν στο σημείο Α κατά τη στιγμή την εκτόξευση της σφαίρας. Στο ΣΑ του διαστημοπλοίου ο πυροβολισμός λαμβάνει χώρα στο $(t_1', x_1') = (0,0)$ και η σύγκρουση με το μηχανισμό στο $(t_2', x_2') = (t_\Delta, -L)$ έχουμε λοιπόν $(\Delta t', \Delta x') = (t_\Delta, -L)$. Από το μετασχηματισμό Loretnz, αυτές οι ποσότητες στο ΣΑ του διαστημοπλοίου συνδέονται με τις αντίστοιχες ποσότητες στο ΣΑ της Γης ως

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-0.3^2}}\left(2.5\times 10^{-5}\text{s} + \frac{0.3\times(-1500\text{m})}{3\times 10^8\,\text{m/s}}\right) = 24.63\mu\text{s}$$

Γ) Στο ΣΑ του διαστημοπλοίου το ΗΜ κύμα το οποίο κινείται με ταχύτητα c χρειάζεται χρόνο

$$\Delta t' = \frac{L}{c} = \frac{1500m}{3\times 10^8 m} = 5.00\mu\text{s}$$

Θεωρώντας ότι οι αρχές των ΣΑ (διαστημοπλοίου- Γης) συμπίπτουν κατά την εκπομπή του ΗΜ κύματος, στο σημείο Β, το αντίστοιχο διάστημα στο διαστημόπλοιο είναι

$$\Delta x' = L - 0 = L$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Lorentz όπως και πριν

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-0.3^2}}\left(5.0\times 10^{-6}\text{s} + \frac{0.3\times 1500\text{m}}{3\times 10^8\,\text{m/s}}\right) = 6.81\mu\text{s}$$

Δ) Προφανώς με c λόγω του αξιώματος της Ειδικής Σχετικότητας.

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ