# Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

# Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

## ΚΥΜΑΤΙΚΗ

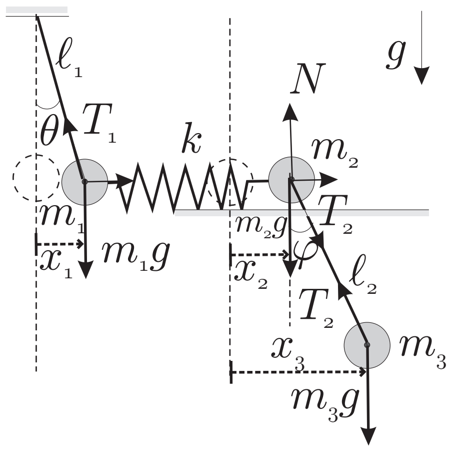
Διάρκεια: 210 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………

Τμήμα: ……………

**Θέμα 1ο** (Μονάδες: 2.0)

Α) Θεωρούμε μετατόπιση του συστήματος από τη θέση ισορροπίας όπως στο Σχήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στις τρεις μάζες φαίνονται στο Σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κάθε μια μάζα παίρνουμε




$$(m_1): m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = k\left(x_2 - x_1\right) - T_1\sin\theta$$

$$T_1\cos\theta = m_1 g$$

$$(m_2): m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k\left(x_1 - x_2\right) + T_2\sin\varphi$$

$$N = T_2\cos\varphi + m_2 g$$

$$(m_3): m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = -T_2\sin\varphi$$

$$T_2\cos\varphi = m_3 g$$

Επιλύοντας για τις τάσεις των μπαρών βρίσκουμε

$$T_1 = \frac{m_1 g}{\cos\theta} \approx m_1 g, T_2 = \frac{m_3 g}{\cos\varphi} \approx m_3 g$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις και χρησιμοποιώντας

$$\sin\theta = \frac{x_1}{\ell_1},\ \sin\varphi = \frac{x_3 - x_2}{\ell_2}$$

βρίσκουμε

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = k\left(x_2 - x_1\right) - m_1 g\frac{x_1}{\ell_1}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k\left(x_1 - x_2\right) + m_3 g\frac{x_3 - x_2}{\ell_2}$$

$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = -m_3 g\frac{x_3 - x_2}{\ell_2}$$

και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος $m_1$ =2m, $m_2 = m_3$=$m$,
$\ell_1 = \frac{2m\,g}{k}, \ell_2 = \frac{m\,g}{k}$ βρίσκουμε τελικά

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \frac{\omega_0^2}{2} x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_3$$
$$\ddot{x}_3 = \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_3$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Β) Εισάγοντας τη γενική μορφή των κανονικών τρόπων ταλάντωσης
$x_i = A_i \cos\left(\omega t + \delta\right), i = 1,2,3$ στις εξισώσεις κίνησης παίρνουμε

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_1 - \frac{\omega_0^2}{2} A_2 = 0$$
$$-\omega_0^2 A_1 + \left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) A_2 - \omega_0^2 A_3 = 0$$
$$-\omega_0^2 A_2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_3 = 0$$

οι οποίες γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{2} & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{2} & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - \omega_0^4\right] - \frac{\omega_0^4}{2}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega^4 - 3\omega_0^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^4\right) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0\,, \omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}\omega_0\,, \omega_3 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}}\omega_0$$

**Θέμα 2ο** (Μονάδες: 1.5)

Α) Το φορτηγό λαμβάνει ήχο συχνότητας ίσο με

$$f_\Phi = f\,\frac{\upsilon + \upsilon_\Phi}{\upsilon + \upsilon_A}$$

Αρα

$$f = f_\Phi \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_\Phi} = 450\frac{340 + 100/3.6}{340 + 80/3.6} Hz = 456.9 Hz$$

Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο μοτοσυκλετιστής είναι

$f_M = f\dfrac{\upsilon-\upsilon_M}{\upsilon-\upsilon_A}$ και άρα

$$\upsilon_M = \upsilon-(\upsilon-\upsilon_A)\frac{f_M}{f} = 340-(340-100/3.6)\frac{448}{456.9} = 121.4Km/h$$

B) Το φορτηγό λαμβάνει ήχο συχνότητας $f_2$ στην συνέχεια τον επανεκπέμπει. Αρα, στον μοτοσυκλετιστή ο ήχος που φτάνει δευτερογενώς μέσω του φορτηγού έχει συχνότητα

$$f_2' = f_2\frac{\upsilon-\upsilon_M}{\upsilon-\upsilon_\Phi} = f\frac{\upsilon+\upsilon_\Phi}{\upsilon+\upsilon_A}\frac{\upsilon-\upsilon_M}{\upsilon-\upsilon_\Phi} = f\frac{\upsilon+\upsilon_\Phi}{\upsilon-\upsilon_\Phi}\frac{\upsilon-\upsilon_M}{\upsilon+\upsilon_A} = 433.7Hz$$

**<u>Θέμα 3$^o$</u>** (Μονάδες: 1.5)

Το φάσμα συμβολής εκ τριών σχισμών αποτελείται από κύρια και δευτερεύοντα μέγιστα εναλλάξ. Για N = 3 σχισμές, μηδενισμοί εκ συμβολής γίνονται όταν

$$Na\sin\theta_{n_a} = 3a\sin\theta_{n_a} = n_a\lambda \Rightarrow \sin\theta_{n_a} = \frac{n_a\lambda}{3a},$$

όπου $a$ η απόσταση των σχισμών και $n_a$ = 1,2,3..., εκτός εάν συμπίπτει

$$a\sin\theta_{n_\pi} = n_\pi\lambda \Rightarrow \sin\theta_{n_\pi} = \frac{n_\pi\lambda}{a}, \quad n_\pi = 0,1,2,3...,$$

καθώς στις γωνίες $\theta_\pi$ υπάρχουν πρωτεύοντα μέγιστα που αντιστοιχούν στις τιμές του

$n_a$ = 3,6,9,12,15,18,21,24,...

εκατέρωθεν του κεντρικού.

Επομένως οι μηδενισμοί είναι για

$n_a$ = 1,2, 4,5, 7,8, 10,11, 13,14, 16,17, 19,20, 22,23,...

Μεταξύ αυτών είναι τα δευτερεύοντα μέγιστα, και το 3$^o$ (ελλείπον) δευτερεύον μέγιστο είναι στο μέσον μεταξύ $n_a$ = 7 και 8.

$$\sin\theta_{\delta\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{7\lambda}{3a}+\frac{8\lambda}{3a}\right) = \frac{15\lambda}{6a}$$

Καθώς σαρώνουμε την οθόνη πέραν του κεντρικού μεγίστου, σ΄ αυτήν την γωνία γίνεται ο πρώτος μηδενισμός εκ περιθλάσεως. Δηλαδή,

$$b\sin\theta_b = n_b\lambda \Rightarrow \sin\theta_{\delta\mu} = \frac{1\lambda}{b}$$

Άρα

$$b = \frac{6a}{15}$$

Ο δεύτερος μηδενισμός εκ περιθλάσεως γίνεται όταν

$$b\sin\theta_b = 2\lambda \Rightarrow \sin\theta_b = \frac{2\lambda}{b} = \frac{30\lambda}{6a} = \frac{5\lambda}{a}$$

Αλλά στα $\dfrac{5\lambda}{a}$ αντιστοιχεί πρωτεύον μέγιστο για $n_\pi$ = 5, το οποίον ελλείπει.

Αφού όλα τα πρωτεύοντα μέγιστα στην οθόνη είναι 13, δεν υπάρχει άλλο ελλείπον πρωτεύον μέγιστο, άρα, μόνο εκ συμβολής, όλα θα ήταν 15, το κεντρικό και 7 εκατέρωθεν.

Το τελευταίο πρωτεύον μέγιστο για $n_\pi$ = 7 (ή $n_a$ = 21) αντιστοιχεί σε

$$\sin\theta_{21} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{21\lambda}{3a} = \frac{3}{5} \text{ (από τη γωνία στα άκρα)}$$

Άρα $a=\dfrac{21\cdot 5\lambda}{3\cdot 3}=11.67\lambda=7000nm=7\mu m$ και $b=\dfrac{6a}{15}=2.8\mu m$.

**Θέμα 4ο** (Μονάδες: 1.5)
Η εστιακή απόσταση του επιπεδόκοιλου φακού είναι
$\dfrac{1}{f_1}=(n_1-1)\dfrac{1}{r_1}=(1.5-1)\dfrac{1}{-20cm}\Rightarrow f_1=-40cm$, ενώ για τον επιπεδόκυρτο έχουμε
$\dfrac{1}{f_2}=(n_2-1)\dfrac{1}{r_2}=(1.7-1)\dfrac{1}{14cm}\Rightarrow f_2=+20cm$
Για το σύστημα των φακών που είναι σε επαφή, η εστιακή απόσταση $F$ είναι (παράδειγμα 21.9)
$\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\Rightarrow F=\dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2}=\dfrac{-40\times 20}{-40+20}cm=+40cm$, άρα ο σύνθετος φακός είναι συγκλίνων. Έστω $p$ η ζητούμενη απόσταση συστήματος φακών-αντικειμένου. Από τον τύπο των φακών έχουμε
$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{F}$, ενώ η μεγέθυνση δίνεται από τη σχέση $M=-\dfrac{q}{p}$, όπου $q$ η απόσταση φακού-ειδώλου. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
i) ορθό είδωλο: $M=2>0\Rightarrow -\dfrac{q}{p}=2\Rightarrow q=-2p$, οπότε
$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2p}=\dfrac{1}{F}\Rightarrow p=\dfrac{F}{2}=+20cm$ και $q=-40cm$ (φανταστικό είδωλο)
ii) ανεστραμμένο είδωλο: $M=-2<0\Rightarrow -\dfrac{q}{p}=-2\Rightarrow q=2p$, οπότε
$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2p}=\dfrac{1}{F}\Rightarrow p=\dfrac{3F}{2}=+60cm$ και $q=+120cm$ (πραγματικό είδωλο)

**Θέμα 5ο** (Μονάδες: 1.0)
Το μήκος κύματος είναι $\lambda=\dfrac{v}{f}=\dfrac{344m/s}{21.5Hz}=16.0m$. Η διαφορά διαδρομής των δύο ηχητικών κυμάτων είναι

$$d_1-d_2=9m-1m=8m=\frac{\lambda}{2}$$

Άρα έχουμε ελάχιστο.
$d_1=\sqrt{(x+L/2)^2+y^2}$, $d_2=\sqrt{(x-L/2)^2+y^2}$. Λύνουμε την εξίσωση
$d_1-d_2=\dfrac{\lambda}{2}\Rightarrow\sqrt{(x+L/2)^2+y^2}-\sqrt{(x-L/2)^2+y^2}=\dfrac{\lambda}{2}$
$\Rightarrow\sqrt{(x+L/2)^2+y^2}=\dfrac{\lambda}{2}+\sqrt{(x-L/2)^2+y^2}=$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε $x^2\left(\dfrac{4L^2}{\lambda^2}\right)-y^2=\dfrac{L^2}{4}-\dfrac{\lambda^2}{16}\Rightarrow\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ που είναι υπερβολή.

**<u>Θέμα 6$^{o}$</u>** (Μονάδες: 1.5)

Από το νόμο του Malus έχουμε $I_1 = I_0 \cos^2 \vartheta$ (1)

Αφού ο οπτικός άξονας είναι κατά τη διεύθυνση $x$, αυτή θα είναι και η διεύθυνση πόλωσης της εξερχόμενης δέσμης από τον πολωτή, άρα κατά την πρόσπτωση στην γυάλινη επιφάνεια έχουμε πόλωση κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης. Ο συντελεστής ανάκλασης είναι

$$R_\sigma = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} \qquad (2)$$

όπου $\theta_i$ η γωνία πρόσπτωσης και $\theta_r$ η γωνία διάθλασης. Από το σχήμα έχουμε $\theta_i = 45°$ και από το νόμο του Snell βρίσκουμε

$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\theta_r = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Με αντικατάσταση στη (2)

$R_\sigma = \frac{E_2}{E_1} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1.5\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.5\frac{\sqrt{7}}{3}} = -0.3033$. Επειδή $I \propto E^2$, έχουμε

$I_2 = R_\sigma{}^2 I_1$ η οποία σε συνδυασμό με την (1) δίνει

$I_2 = R_\sigma{}^2 \cos^2\vartheta I_0 \Rightarrow \cos^2\vartheta = \frac{1}{R_\sigma{}^2}\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{0.092}0.03 = 0.326 \Rightarrow \cos\vartheta = 0.571 \Rightarrow \vartheta = 55.2°$

**<u>Θέμα 7$^{o}$</u>** (Μονάδες: 1.0)

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{E}, \hat{B}, \hat{k}$ συνιστούν δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα. Άρα

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow E_x k_x + E_y k_y = 0 \Rightarrow E_y = -E_x \frac{k_x}{k_y},$$

όπου το $E_x$ θα καθορισθεί από την ένταση I.

$$\hat{B} = \hat{k} \times \hat{E} = \left(-\hat{E}_y \hat{k}_z, \hat{E}_x \hat{k}_z, \hat{E}_y \hat{k}_x - \hat{E}_x \hat{k}_y\right) = \hat{E}_x \left(\frac{\hat{k}_x \hat{k}_z}{\hat{k}_y}, \hat{k}_z, -\frac{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2}{\hat{k}_y}\right),$$

όπου $\hat{k}_{x,y,z} = \frac{k_{x,y,z}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$ δίδονται, και

$$\hat{E}_x = \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_y^2}}} = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}},$$

$$\hat{E}_y = \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} = \frac{-1\frac{k_x}{k_y}}{\sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_y^2}}} = \frac{-k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \Rightarrow \hat{E} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}\left(k_y, -k_x, 0\right)$$

Άρα

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}\left(\frac{k_x k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \frac{k_y k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right)$$

Άρα τα πλάτη

$\vec{E}_0 = E_0\hat{E}$ και $\vec{B}_0 = \dfrac{E_0}{c}\hat{B}$

Το διάνυσμα Poynting είναι

$$c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{\mathrm{B}} = c\varepsilon_0 E^2\hat{E}\times\hat{\mathrm{B}} = c\varepsilon_0 E^2\hat{k} = c\varepsilon_0 E^2\frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\left(k_x,k_y,k_z\right)$$

Και το πλάτος του ισούται με την ένταση *I*:

$$I = c\varepsilon_0 {E_0}^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{I}{c\varepsilon_0}}$$

Άρα

$$\vec{E}_0 = \sqrt{\frac{I}{c\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\left(k_y,-k_x,0\right)$$

και

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{I}{c\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\left(\frac{k_xk_z}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}},\frac{k_yk_z}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}},-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\right)$$

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**