Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Επαναληπτικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΥΓΧΡΟΝΗ

Διάρκεια: 120 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 1.5)

A) Το μήκος κύματος De Broglie δίνεται από τη σχέση

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_n K}}$, όπου K η κινητική ενέργεια και m_n η μάζα των νετρονίων. Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{4.134\times10^{-15}eV\cdot s}{\sqrt{2\times\frac{939.57\times10^{6}}{\left(2.9979\times10^{8}\right)^{2}}\frac{eV\cdot s^{2}}{m^{2}}0.0435eV}} = 1.37A$$

B) Από τη σχέση της περίθλασης (4.10) $d\sin\varphi = n\lambda$ έχουμε

$$\begin{matrix} d\sin\varphi_1 = n\lambda \\ d\sin\varphi_2 = (n+1)\lambda \end{matrix} \Rightarrow d\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right) = \lambda \Rightarrow d = \frac{1.37A}{\sin(46.8°)-\sin(29.1°)} = 5.65A .$$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 1.5)

A) Σύμφωνα με τη σχέση της μετατόπισης Compton του βιβλίου των Serway-Moses-Moyer

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}\left(1-\cos\theta\right)$$

Εδώ έχουμε $\theta = \pi$ και

$$E' = \frac{E_0}{2} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda_0} \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_0$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$2\lambda_0 - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}\left(1-\left(-1\right)\right) \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2h}{m_e c} = 2\times\lambda_c = 4.86\text{pm}$$

B) Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$E_0 + m_e c^2 = \frac{E_0}{2} + \gamma m_e c^2 \Rightarrow \frac{E_0}{2} = \left(\gamma-1\right)m_e c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_e c^2}{4} = \left(\gamma-1\right)m_e c^2 \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \upsilon = \frac{3}{5}c = 1.8\times10^{8}\,m/s$$

Θέμα 3ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Από την εξίσωση του Scroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_0\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \left(E + V_0\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} - V_0$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος στην περιοχή $-a < x < a$

$$\psi''(x) = -\rho^2\left(A\sin(\rho x) + B\cos(\rho x)\right) = -\rho^2\psi(x)$$

βρίσκουμε

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\rho^2 - V_0 = \frac{V_0}{8} - V_0 = -\frac{7V_0}{8}$$

Β)Στην περιοχή $x \geq a$ έχουμε $V(x) = 0$ και η εξίσωση του Scroedinger παίρνει τη μορφή

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x)$$

η οποία έχει ως γενική λύση

$$\psi_I(x) = Ce^{-kx} + De^{+kx}$$

όπου $k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{7mV_0}}{2\hbar} = \sqrt{7}\rho$

Το τμήμα e^{+kx} απειρίζεται για $x \to \infty$ και επομένως πρέπει να θέσουμε $D = 0$. Επίσης από τη συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της παραγώγου στο $x = a$ παίρνουμε

$$A\sin(\rho a) + B\cos\left(\rho a\right) = Ce^{-ka} \Rightarrow A\sin(\rho a) + B\cos\left(\rho a\right) = Ce^{-\sqrt{7}\rho a}$$

$$\rho A\cos(\rho a) - \rho B\sin\left(\rho a\right) = -k\,Ce^{-ka} \Rightarrow A\cos(\rho a) - B\sin\left(\rho a\right) = -\sqrt{7}Ce^{-\sqrt{7}\rho a}$$

Επιλύοντας το σύστημα ως προς *B, C* βρίσκουμε

$$B = \frac{\cos\left(a\rho\right) + \sqrt{7}\sin\left(a\rho\right)}{\sin\left(a\rho\right) - \sqrt{7}\cos\left(a\rho\right)}A$$

$$C = \frac{e^{\sqrt{7}a\rho}}{\sin\left(a\rho\right) - \sqrt{7}\cos\left(a\rho\right)}A$$

Γ) Η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από

$$P = C^2\int_a^\infty dx\, e^{-2kx} = -\frac{C^2}{2k}\left[e^{-2kx}\right]_{-a}^{+\infty} = \frac{C^2}{2k}e^{-2ka} = \frac{1}{2\sqrt{7}\rho\left[\sin\left(a\rho\right) - \sqrt{7}\cos\left(a\rho\right)\right]^2}A^2$$

Θέμα 4ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Η ενέργεια υδρογονοειδούς (μονοηλεκτρονιακού) ατόμου δίνεται από τη σχέση 7.21

$E_n = -13.6\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\}eV$. Η ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση από τη στάθμη $n = 4$ στη στάθμη $n = 3$ είναι

$\Delta E = E_4 - E_3 = -13.6Z^2\left\{\frac{1}{4^2}-\frac{1}{3^2}\right\}eV = 0.6611Z^2 eV$ και το αντίστοιχο μήκος κύματος $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} \Rightarrow Z^2 = \frac{hc}{\lambda \cdot 0.6611eV} = \frac{1.240\times10^3 eV\cdot nm}{208.4\cdot 0.6611 nm\cdot eV} = 9 \Rightarrow Z = 3$, άρα πρόκειται για το ιόν του λιθίου, Li^{+2}

Στη θεμελειώδη κατάσταση έχουμε $n=1$ και $\ell = 0$, άρα από τον πίνακα 7.3 έχουμε

$$\Psi_{100}(r) = \left(\frac{3}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-3r/a_0}$$

Β) Η ενέργεια του φωτονίου για τη μετάβαση από $n=1$ σε $n=2$ (πρώτη διεγερμένη) είναι $\Delta E' = E_2 - E_1 = -13.6\times 3^2\left\{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right\}eV = 91.8eV$. Επίσης από τον κανόνα επιλογής $\Delta\ell = \pm1$ προκύπτει ότι στη διεγερμένη στάθμη $\ell = 1$, άρα το μέτρο της στροφορμής του ηλεκτρονίου είναι $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar = 9.308\times10^{-16} eV\cdot s$

Γ) Το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης που περιγράφει τη διεγερμένη κατάσταση του ερωτήματος Β) είναι

$$R_{21}(r) = \left(\frac{3}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3r}{\sqrt{3}a_0} e^{-3r/2a_0}$$

Το ηλεκτρόνιο μπορεί να έχει $m_\ell = -1, 0, 1$ αλλά επειδή εδώ ζητάμε την πιθανότητα σε σφαίρα αυτό δεν έχει σημασία (οι σφαιρικές αρμονικές είναι κανονικοποιημένες). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$P = \int_0^R \left|R_{21}(r)\right|^2 r^2 dr$, όπου $R = 2^2\frac{a_0}{3} = \frac{4}{3}a_0$ η ακτίνα της τροχιάς Bohr (σχέση 3.35).

$P = \int_0^R \left(\frac{3}{2a_0}\right)^3 \frac{8r^4}{2a_0^2} e^{-3r/a_0} dr = \frac{27}{2a_0^5}\int_0^R r^4 e^{-3r/a_0} dr = \frac{27}{2a_0^5}\frac{a_0^5}{3^5}\int_0^4 y^4 e^{-y} dy$, όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $y = 3r/a_0$. Υπολογίζοντας

$$P = \frac{1}{18}\int_0^4 y^4 e^{-y} dy = -\frac{1}{18}\left(y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 24y + 24\right)e^{-y}\Big|_0^4 = 0.4949 \Rightarrow P = 49.5\%$$

<u>Θέμα 5^ο</u> (Μονάδες: 2.0)

Α. Η ενέργεια που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των προϊόντων και ενέργεια του φωτονίου αντιστοιχεί στην ισοδύναμη ενέργεια της διαφοράς ατομικών μαζών μεταξύ προϊόντων και αντιδρώντων. Συνεπώς σε κάθε αντίδραση ελευθερώνεται ενέργεια Q ίση με:

$$Q = \left[4\cdot M\left({}^1_1H\right) - M\left({}^4_2He\right) - 2\cdot m_e\right]\cdot c^2 =$$
$$= \left[4\cdot 1.007825u - 4.002603u\right]\cdot 931.5MeV/u - 2\cdot 0.511MeV$$
$$= 25.71MeV = 25.71\cdot10^6\cdot 1.6022\cdot10^{-19}J = 41.19\cdot10^{-13}J$$

Στον προηγούμενο υπολογισμό θεωρήσαμε ως μάζα των πυρήνων (τα άτομα είναι ιονισμένα στις μεγάλες θερμοκρασίες του Ηλίου) τις μάζες των στοιχείων άρα κάναμε προσέγγιση. Προφανώς αφαιρώντας την μάζα του ηλεκτρονίου δεν κερδίσαμε περισσότερη ακρίβεια, αλλά αφαιρέσαμε για να επισημάνουμε ότι η μάζα του ηλεκτρονίου δεν συνεισφέρει στην παραγωγή ενέργειας.

Σε κάθε δευτερόλεπτο συντελούνται Ν συντήξεις, όπου

$$N = \frac{4 \cdot 10^{26} J/s}{41.19 \cdot 10^{-13} J} \simeq 0.971 \cdot 10^{38} \textit{συντήξεις}/s$$

Σε κάθε σύντηξη λαμβάνουν μέρος 4 πρωτόνια άρα συντήκονται $3.89 \cdot 10^{38}$ *πρωτόνια/s*

Β. Η παραγόμενη ενέργεια ανά δευτερόλεπτο είναι $E = 4 \cdot 10^{26} J$. Συνεπώς η ισοδύναμη μάζα θα είναι $M_{\iota\sigma o\delta.} = \frac{E}{c^2} = \frac{4 \cdot 10^{26} J}{9 \cdot 10^{16} m^2/s^2} = 0.44 \cdot 10^{10} kg$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ