Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Επαναληπτικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Η συχνότητα των σημάτων από τους ραδιοφάρους υφίσταται μετατόπιση λόγω του σχετικιστικού φαινομένου Doppler. Έστω f_0 η συχνότητα των ραδιοφάρων και u η ταχύτητα του διαστημοπλοίου, θεωρώντας ότι το διαστημόπλοιο πλησιάζει τον πλανήτη Υ τότε οι συχνότητες που θα μετράει το διαστημόπλοιο θα είναι

$$f_1 = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} f_0$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} f_0$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c-u}{c+u} \Rightarrow u = \frac{f_2 - f_1}{f_1 + f_2} c = -0.224c$$

Αφού το u προκύπτει αρνητικό σημαίνει πως το διαστημόπλοιο κινείται (αντίθετα με την υπόθεση που κάναμε) από τον πλανήτη Υ προς τη Γη.

Β) Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$f_1 = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} f_0 \Rightarrow f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 565.\mathrm{GHz}$$

Θέμα 2ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Έστω Χ το σημείο στο οποίο θα συγκρουστούν τα διαστημόπλοια στο ΣΑ του ακίνητου παρατηρητή σε χρόνο t. Τότε θα ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} AX = \upsilon_A t \\ BX = \upsilon_B t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AX}{BX} = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} \Rightarrow \frac{AX}{AB - AX} = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} \Rightarrow AX\left(1 + \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}\right) = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} AB$$

$$\Rightarrow AX\left(\frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{\upsilon_B}\right) = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} AB \Rightarrow AX = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_A + \upsilon_B} AB = 539.\mathrm{km}$$

$$t = \frac{AX}{\upsilon_A} = \frac{AB}{\upsilon_A + \upsilon_B} = 3.52\mathrm{ms}$$

Β) Ο πιλότος του διαστημοπλοίου Α θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο και το διαστημόπλοιο Β να πέφτει πάνω του. Ο χρόνος που μεσολαβεί είναι μικρότερος από τον ακίνητο παρατηρητή

$$t_A = \frac{t}{\gamma_A} = \frac{AB}{\upsilon_A + \upsilon_B}\sqrt{1 - \frac{\upsilon_A^2}{c^2}} = 3.03\text{ms}$$

Αντίστοιχα για τον πιλότο του διαστημοπλοίου Β ο χρόνος που μεσολαβεί θα είναι

$$t_B = \frac{t}{\gamma_B} = \frac{AB}{\upsilon_A + \upsilon_B}\sqrt{1 - \frac{\upsilon_B^2}{c^2}} = 2.44\text{ms}$$

Γ) Το σβήσιμο των δύο κινητήρων είναι ταυτόχρονο στο ακίνητο σύστημα αναφοράς όπου οι κινητήρες έχουν χωροχρονικές συντεταγμένες $(t_1, x_1) = (0,0)$ και $(t_2, x_2) = (0, AB)$. Στο σύστημα αυτό $\Delta t = t_2 - t_1 = 0, \Delta x = x_2 - x_1 = AB$. Στο σύστημα αναφοράς του Α το οποίο κινείται με ταχύτητα υ_A ως προς το ακίνητο ΣΑ θα έχουμε σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz

$$\Delta t' = \gamma_A \Delta t - \gamma_A \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x = -\gamma_A \frac{\upsilon}{c^2} AB \Rightarrow t_2' - t_1' = -2.57\text{ms}$$

Συνεπώς ο κινητήρας του Β σβήνει 2.57ms πριν τον κινητήρα του Α.

<u>Θέμα 3ο</u> (Μονάδες: 2.5)

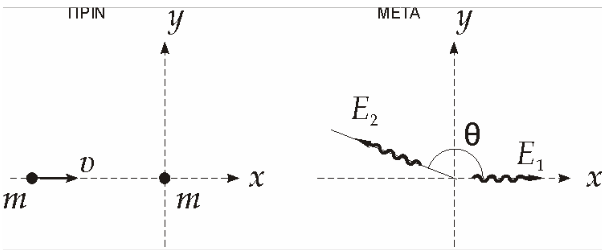
Έστω ότι το δεύτερο φωτόνιο σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση κίνησης μετρούμενη όπως στο Σχήμα. Από τη διατήρηση της ενέργειας και ορμής (στους άξονες x και y) έχουμε αντίστοιχα

$$\gamma mc^2 + mc^2 = E_1 + E_2 \qquad (1)$$

$$\gamma m\upsilon = \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}\cos\theta \qquad (2)$$

$$0 = 0 - \frac{E_2}{c}\sin\theta \qquad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $\sin\theta = 0$ και άρα οι δυνατές λύσεις είναι $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2), και με το δεδομένο ότι $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-1/9}} = 1.0607$, βλέπουμε ότι η πρώτη λύση οδηγεί σε άτοπο ($\gamma/3 = \gamma + 1$), ενώ η δεύτερη μας δίνει το σύστημα



$$E_1 + E_2 = (\gamma + 1)mc^2$$

$$E_1 - E_2 = \gamma m\frac{c^2}{3}$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\gamma + 1 + \frac{\gamma}{3}\right)mc^2 = 1.2071mc^2 = 1.1326\,\text{GeV}$$

και $E_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma + 1 - \frac{\gamma}{3}\right)mc^2 = 0.8536mc^2 = 0.801\,\text{GeV}$ από τα οποία υπολογίζουμε τα μήκη κύματος $\lambda_1 = \frac{hc}{E_1} = \frac{1.24\times10^3\text{eV}\cdot\text{nm}}{1.1326\times10^9\text{ eV}} = 0.935\,\text{fm}$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{E_1} = \frac{1.24\times10^3\,\mathrm{eV\cdot nm}}{0.801\times10^9\,\mathrm{eV}} = 1.548\,\mathrm{fm}$$

Θέμα 4^ο^ (Μονάδες: 2.5)

Α) Ο Α βλέπει το Β συνεσταλμένο, L', και η προσπέραση από το παράθυρο διαρκεί χρόνο τ. Ως προς το Α, το Β φαίνεται να πηγαίνει «με την όπισθεν». Αν $\upsilon_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$ η ταχύτητα του Β ως προς το Α, τότε (με θετική φορά την φορά του Α - είτε του Β),

$$L' = \upsilon_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\tau \Rightarrow L\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}}{c}\right)^2} = \upsilon_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\tau \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\frac{cL}{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}}$$

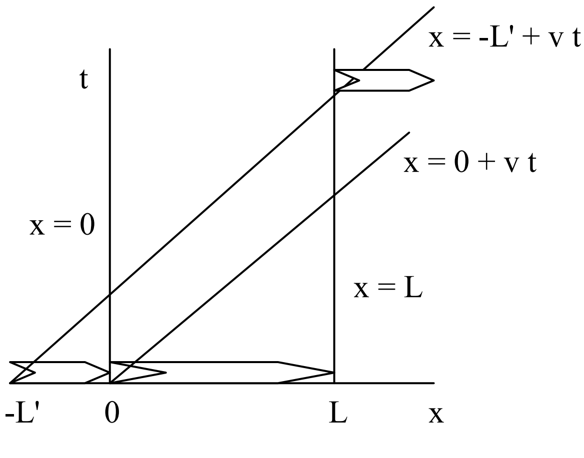
Β) Ο Β βλέπει το Α συνεσταλμένο, $L' = L\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_B^A}{c}\right)^2}$, όπου

$$\upsilon_B^A = +\frac{cL}{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}} \qquad (1),$$

ενώ βλέπει τον εαυτό του, Β, με ιδιομήκος L.

Ως προς το Β, το χωροχρονικό διάγραμμα έχει ένα ακίνητο Β μήκους L και ένα κινούμενο Α μήκους L' ($<L$).

Οι εξισώσεις κινήσεως των άκρων του ακίνητου Β και του κινούμενου Α, φαίνονται στο παρακάτω χωροχρονικό διάγραμμα.



Αν η αρχή των χρόνων είναι η αρχή της προσπέρασης, τότε ολικός χρόνος προσπέρασης βρίσκεται από την τομή των $\mathrm{x} = \text{-L}' + \mathrm{v\ t}$ της ουράς του Α, και $\mathrm{x} = \mathrm{L}$ της μύτης του Β.

Εξισώνοντας τα x έχουμε $t = \dfrac{L\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\upsilon}$, και από την (1),

$$t = \tau + \frac{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}}{c}$$

Γ) Όταν η κεραία πλησιάζει τον Α, αυτός βλέπει μεγαλύτερη συχνότητα, $\nu' = \nu\sqrt{\frac{c+|\upsilon|}{c-|\upsilon|}}$, και όταν τον προσπεράσει και απομακρύνεται, βλέπει μικρότερη

$$\nu'' = \nu\sqrt{\frac{c-|\upsilon|}{c+|\upsilon|}}\,.$$

Αντικαθιστώντας από την (1), έχουμε:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}+L}{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}-L}}$$

και

$$\nu'' = \nu\sqrt{\frac{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}-L}{\sqrt{L^2+(c\tau)^2}+L}}$$

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ