Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Επαναληπτικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

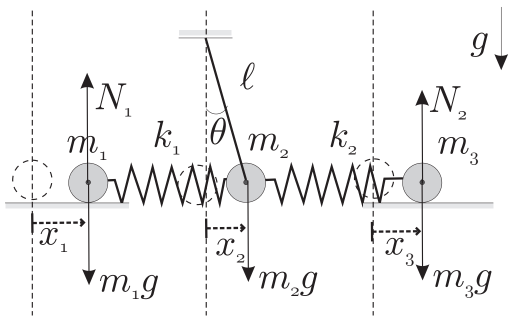
Διάρκεια: 210 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)

Α) Θεωρούμε μετατόπιση του συστήματος από τη θέση ισορροπίας όπως στο Σχήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στις τρεις μάζες φαίνονται στο Σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κάθε μια μάζα παίρνουμε



$$(m_1): m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_1 \left(x_2 - x_1 \right)$$

$$N_1 = m_1 g$$

$$(m_2): m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_1 \left(x_1 - x_2 \right) + k_2 \left(x_3 - x_2 \right) - T \sin\theta$$

$$T \cos\theta = m_2 g$$

$$(m_3): m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = k_2 \left(x_2 - x_3 \right)$$

$$N_3 = m_3 g$$

Επιλύοντας για την τάση της μπάρας και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση μικρών γωνιών $\theta \ll 1, \cos\theta \approx 1$

$$T = \frac{m_2 g}{\cos\theta} \approx m_2 g$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις και χρησιμοποιώντας

$$\sin\theta = \frac{x_2}{\ell},$$

βρίσκουμε

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_1\left(x_2 - x_1\right)$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_1\left(x_1 - x_2\right) + k_2\left(x_3 - x_2\right) - m_2 \frac{g}{\ell}$$
$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = k_2\left(x_2 - x_3\right)$$

και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος $m_1 = 2m, m_2 = 3m,$ $k_1 = 2k, k_2 = k,\ \ell = \frac{mg}{2k}$ βρίσκουμε τελικά

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{2\omega_0^2}{3} x_1 - 3\omega_0^2 x_2 + \frac{\omega_0^2}{3} x_3$$
$$\ddot{x}_3 = \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_3$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

B) Εισάγοντας τη γενική μορφή των κανονικών τρόπων ταλάντωσης $x_i = A_i \cos\left(\omega t + \delta\right), i = 1,2,3$ στις εξισώσεις κίνησης παίρνουμε

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_1 - \omega_0^2 A_2 = 0$$
$$-\frac{2}{3}\omega_0^2 A_1 + \left(3\omega_0^2 - \omega^2\right) A_2 - \frac{\omega_0^2}{3} A_3 = 0$$
$$-\omega_0^2 A_2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_3 = 0$$

οι οποίες γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\frac{2}{3}\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{3} \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\frac{2}{3}\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{3} \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

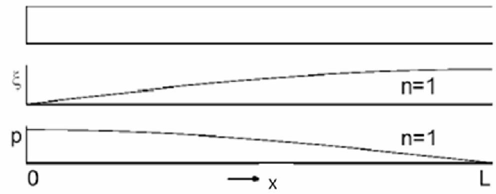
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left[\left(3\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - \frac{\omega_0^4}{3}\right] - \frac{2\omega_0^4}{3}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega^4 - 4\omega_0^2\,\omega^2 + 2\omega_0^4\right) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0, \omega_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0, \omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0$$

<u>Θέμα 2</u> (Μονάδες: 1.5)

A.) Η παράμετρος q είναι η ταχύτητα του ήχου που η προσεγγιστική της τιμή είναι q=v=340m/s

B) Η λύση της κυματικής εξίσωσης υπερπίεσης έχει την μορφή στάσιμου κύματος που σημαίνει ότι τα μόρια του αέρα ταλαντώνονται με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και πλάτος που εξαρτάται από την συντεταγμένη x. Αυτές οι ταλαντώσεις έχουν ως συνέπεια την ταλάντωση της τιμής της πίεσης κατά μήκος του σωλήνα λόγω των πυκνωμάτων και αραιωμάτων που δημιουργούν. Η απομάκρυνση των μορίων του αέρα θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης όπου ο σωλήνας είναι ανοικτός και δεσμό όπου ο σωλήνας είναι κλειστός, όπως δείχνει το Σχήμα για την μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης της πρώτης αρμονικής (ο σωλήνας είναι κλειστός στο x=0 και ανοικτός στο x=L) κατά μήκος του σωλήνα.



Εύκολα συμπεράνουμε (π.χ. από την γεωμετρική σημασία της παραγώγου) ότι η παράγωγος $\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$ είναι μηδέν στα σημεία που οι ταλαντώσεις απομάκρυνσης των μορίων έχουν μέγιστο πλάτος και συνεπώς (από τη σχέση $p(x,t)=P(x,t)-P_0=-\kappa\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$) συμπεράνουμε ότι το στάσιμο κύμα πίεσης κατά μήκος του σωλήνα έχει δεσμό εκεί που ο σωλήνας είναι ανοικτός. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε παρατηρώντας ότι η πίεση μέσα στο σωλήνα για x=L, P(x=L,t) θα πρέπει να είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση έξω από τον σωλήνα για το ίδιο x (η πίεση πρέπει να μεταβάλλεται συνεχώς) και συνεπώς $p(x=L,t)=P(x=L,t)-P_0=0$. Αντίθετα στο σημείο που η απομάκρυνση των μορίων έχει ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης (δεσμός), όπως φαίνεται στο σχήμα, το πλάτος ταλάντωσης της πίεσης είναι μέγιστο (κοιλία).

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες ,την σχέση:

$$p(x,t)=\left[A\cos(k\cdot x)+B\sin(k\cdot x)\right]\cos(\omega\cdot t)$$

και το γεγονός ότι για x=0 το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\left[A\cos(k\cdot x)+B\sin(k\cdot x)\right]_{x=0}=\left[-kA\sin(k\cdot x)+Bk\cos(k\cdot x)\right]_{x=0}=0$$

Καταλήγουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned}
&0=\left[A\cos(k\cdot L)+B\sin(k\cdot L)\right]\cos(\omega\cdot t)\quad\forall t\\
&p_0=\left[A\cos(k\cdot 0)+B\sin(k\cdot 0)\right]\cos(\omega\cdot 0)\\
&\left[-kA\sin(k\cdot 0)+Bk\cos(k\cdot 0)\right]=0
\end{aligned}\right\}\quad
\begin{aligned}
&A=p_0\\
&B=0\\
&0=p_0\cos kL\Rightarrow k_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L}
\end{aligned}$$

Όπου n=1,2,3…

Άρα $p(x,t)=p_0\cos(k_n\cdot x)\cos(\omega\cdot t)$

Και αντικαθιστώντας στην εξίσωση κύματος βρίσκουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -p_0 \cdot (k_n)^2 \cos(k_n \cdot x)\cos(\omega \cdot t) \\ \dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = -p_0 \cdot (\omega)^2 \cos(k_n \cdot x)\cos(\omega \cdot t) \end{array}\right\} \omega^2 = (\upsilon \cdot k_n)^2$$

Η κυκλική συχνότητα συνδέεται με την ταχύτητα και τον κυματάριθμο ως:

$$\omega = v \cdot k = \frac{(2n-1)\pi v}{2L}$$

Γ) Για L=0.5 και n=1 ή n=2 έχουμε αντίστοιχα

$$k_1 = \pi \qquad \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2m \qquad f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 170Hz$$

$$k_2 = 3\pi \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 2/3m \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 510Hz$$

<u>Θέμα 3ο</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Αν a η απόσταση των σχισμών και b το εύρος τους, τα πρωτεύοντα μέγιστα εμφανίζονται οταν μηδενίζεται ο παρονομαστής του όρου της συμβολής, δηλαδή όταν $\frac{a\sin\theta_{n_a}}{\lambda} = n_a = 0,1,2,\ldots$, όπου $n_a = 0$ αντιστοιχεί στο κεντρικό, και $n_a = 3$ αντιστοιχεί στο 3ο πρωτεύον μέγιστο εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου.

Για να εμφανίζεται εκεί (στο εν λόγω θ) η πρώτη έλλειψη φωτός σημαίνει οτι ο όρος της περιθλάσεως, ο οποίος μηδενίζεται οταν $\frac{b\sin\theta_{n_b}}{\lambda} = n_b = 1,2,\ldots$, μηδενίζεται για $n_b = 1$.

Επομένως στο εν λόγω $\theta_{n_a} = \theta_{n_b}$,

$$a\sin\theta = 3\lambda, \quad b\sin\theta = 1\lambda \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$$

Β) Το 1ο δευτερεύον μέγιστο εμφανίζεται στο μέσον μεταξύ του κεντρικού και του 1ου πρωτεύοντος, κ.ο.κ, άρα το 3ο δευτερεύον εμφανίζεται στο μέσον μεταξύ του 2ου και του 3ου πρωτεύοντος. Εκεί είναι

$$\sin\theta = \frac{1}{2}(\sin\theta_2 + \sin\theta_3) = \frac{\lambda}{a}(2+3) = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{a}$$

Εκεί πρέπει να μηδενίζεται, για $n_b = 1$, ο όρος της περιθλάσεως,

$$\sin\theta = 1\frac{\lambda}{b}$$

Άρα

$$\frac{5}{2}\frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{5}$$

<u>Θέμα 4ο</u> (Μονάδες: 1.0)

Α) Το ξ_1 διαδίδεται προς την $+x$ διεύθυνση με ταχύτητα $v_1 = \dfrac{\omega}{k_1}$. Τα μέτωπα κύματος είναι επίπεδα παράλληλα στο επίπεδο yz

Το ξ_2 διαδίδεται προς την $-y$ διεύθυνση με ταχύτητα $v_2 = \dfrac{\omega}{k_2}$. Τα μέτωπα κύματος είναι επίπεδα παράλληλα στο επίπεδο xz

Β)Έχουμε $\lambda_1 = \dfrac{2\pi}{k_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{2\pi}{k_2}$ οπότε $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{v_1}{v_2} = 3$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \sin\left(\frac{1}{2}(k_1 x + k_2 y)\right)\cos\left(\frac{k_1 x - k_2 y}{2} - \omega t\right)$$

Γ)Το ελάχιστο της έντασης (η οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους) βρίσκεται όταν $\dfrac{1}{2}(k_1 x + k_2 y) = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + n\dfrac{\lambda_1}{3}$.

Ομοίως το μέγιστο της έντασης βρίσκεται όταν $\dfrac{1}{2}(k_1 x + k_2 y) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + (2n+1)\dfrac{\lambda_1}{6}$.

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν επίπεδα κάθετα στο επίπεδο xy που η τομή τους με αυτό είναι οι παράλληλες ευθείες με κλίση $-\dfrac{1}{3}$ με σταθερή απόσταση που δίνουν οι παραπάνω εξισώσεις και που τέμνουν τους άξονες σε ισαπέχοντα σημεία.

<u>Θέμα 5ο</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Η σχέση παριστά στάσιμο κύμα της μορφής $\vec{E} = \left(E_o \hat{x}\right)\cos(kz)\cos(\omega t)$ όπου

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}, \omega = 2\pi f$. Συνεπώς, λ=1.814cm και f=1.114x10^{10}Hz

Β) Ο δείκτης διάθλασης εξ ορισμού είναι

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\omega / k} = \frac{3 \cdot 10^{10} cm/s}{\left(7.10^{10} s^{-1}\right)/\left(2\sqrt{3} cm^{-1}\right)} = 1.48$$

Γ) Εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $2\cos a \cdot \cos b = \cos\left(a+b\right) + \cos\left(a-b\right)$

γράφουμε

$$\vec{E} = \left(E_o \hat{x}\right)\cos(2\sqrt{3}z)\cos(7\cdot 10^{10} t) = \frac{1}{2}\left(E_o \hat{x}\right)\left[\cos(2\sqrt{3}z - 7\cdot 10^{10} t) + \cos(2\sqrt{3}z + 7\cdot 10^{10} t)\right]$$

που παριστά την υπέρθεση δύο ιδίων ΗΜ κυμάτων που διαδίδονται παράλληλα και αντιπαράλληλα της κατεύθυνσης του άξονα z.

Το κύμα που διαδίδεται στην +z κατεύθυνση πρέπει να έχει το μαγνητικό πεδίο παράλληλα με τον y άξονα ώστε το διάνυσμα $\vec{E} \times \vec{B}$ $\left(\rightarrow \hat{x} \times \hat{y}\right)$ να έχει πράγματι κατεύθυνση στον +z. Αντίστοιχα το κύμα που διαδίδεται στην –z κατεύθυνση θα πρέπει να έχει, για τους ίδιους λόγους, μαγνητικό πεδίο που κατευθύνεται στον –y.

Ας γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο κάθε ενός των ΗΜ κυμάτων που συμβάλλουν υπό την γενική μορφή: $\vec{E}_{\pm} = \left(\varepsilon_o \hat{x}\right)\cos(kz \mp \omega t)$

όπου ο δείκτης $\pm$ δηλώνει διάδοση στον θετικό ή αρνητικό ζ άξονα. Τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία θα είναι της μορφής $\vec{\mathrm{B}}_{\pm} = (\pm\hat{y})\, f_{\pm}(z,t)$ και θα υπακούουν στον νόμο:

$\nabla\times\vec{\mathrm{B}}_{\pm} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \vec{E}_{\pm}}{\partial t}$ (όπου v η ταχύτητα διάδοσης του ΗΜ κύματος)

Αλλά $\dfrac{\partial \vec{E}_{\pm}}{\partial t} = \pm(\varepsilon_o \omega \hat{x})\sin(kz \mp \omega t)$ *και* $\nabla\times\vec{\mathrm{B}}_{\pm} = \nabla\times\left((\pm\hat{y})\, f_{\pm}(z,t)\right) = \mp\hat{x}\dfrac{\partial f_{\pm}(z,t)}{\partial z}$

ώστε $\nabla\times\vec{\mathrm{B}}_{\pm} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \vec{E}_{\pm}}{\partial t} \quad \Rightarrow \mp\hat{x}\dfrac{\partial f_{\pm}(z,t)}{\partial z} = \pm\left(\dfrac{\varepsilon_o\omega}{v^2}\hat{x}\right)\sin(kz\mp\omega t)$

ή

$$\frac{\partial f_{\pm}(z,t)}{\partial z} = \left(-\frac{\varepsilon_o\omega}{v^2}\right)\sin(kz\mp\omega t) \quad \Rightarrow f_{\pm}(z,t) = \left(-\frac{\varepsilon_o\omega}{v^2}\right)\int\sin(kz\mp\omega t)dz = \frac{\varepsilon_o\omega}{kv^2}\cos(kz\mp\omega t) + C(t)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι συνάρτηση ΜΟΝΟ του χρόνου. Ωστόσο μία κυματική διαταραχή (λύση εξίσωσης κίνησης) πρέπει να είναι συνάρτηση του kz-ωt και όχι μόνο του χρόνου. Συνεπώς η C(t) θα πρέπει να είναι αριθμητική σταθερά, την οποία θα πάρουμε ίση με μηδέν, και η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει την συναρτησιακή μορφή:

$$f_{\pm}(z,t) = \frac{\varepsilon_o\omega}{kv^2}\cos(kz\mp\omega t) = \frac{\varepsilon_o}{v}\cos(kz\mp\omega t) = \frac{\varepsilon_o n}{c}\cos(kz\mp\omega t)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{n}$ και προφανώς το πλάτος του μαγνητικού πεδίου θα είναι: $b_0 = \dfrac{\varepsilon_o n}{c}$. Θέτοντας τα δεδομένα του προβλήματος η ένταση του μαγνητικού πεδίου της επαλληλίας των ΗΜ κυμάτων θα παρίσταται ως:

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(B_o\hat{y})\cos(2\sqrt{3}z - 7\cdot10^{10}t) + \frac{1}{2}B_o(-\hat{y})\cos(2\sqrt{3}z + 7\cdot10^{10}t) \qquad \text{όπου } B_0 = \frac{E_o n}{c}.$$

Προσέξετε το αρνητικό σύμβολο στον δεύτερο όρο λόγω της διεύθυνσης της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κύματος που διαδίδεται στα αρνητικά του z. εφαρμόζοντας την απλή τριγωνομετρική ταυτότητα: $2\sin a\cdot\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ καταλήγουμε ότι:

$$\vec{B} = \left(\frac{E_o n}{c}\hat{y}\right)\sin(2\sqrt{3}z)\sin(7\cdot10^{10}t)$$

Δ) Η στιγμιαία τιμή του διανύσματος Poynting είναι

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{E_o^2 n}{\mu_0 c}\hat{z}\right)\sin(2\sqrt{3}z)\sin(7\cdot10^{10}t)\cos(2\sqrt{3}z)\cos(7\cdot10^{10}t) =$$

$$= \left(\frac{E_o^2 n}{4c\mu_0}\hat{z}\right)\sin(4\sqrt{3}z)\sin(1.4\cdot10^{11}t)$$

Παρατηρήστε ότι το μέτρο του διανύσματος Poynting είναι της μορφής $S_0\sin(kz)\cos(kz)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ και η μέση τιμή του μέτρου για χρόνο μίας περιόδου είναι:

$$\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle = \frac{1}{T}S_0\sin(kz)\cos(kz)\int_0^T\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = \frac{1}{2\omega T}S_0\sin(kz)\cos(kz)\cos^2\omega t\Big|_0^T = 0$$

Που σημαίνει ότι το στάσιμο ΗΜ κύμα δεν μεταφέρει ενέργεια στο χώρο.

Θέμα 6^o (Μονάδες: 1.0)
Η σχέση (22.17) των Alonso-Finn $2an\cos\vartheta_r = (2N-1)\lambda/2$ περιγράφει τα μέγιστα ανάκλασης από το υμένιο λόγω ενισχυτικής συμβολής στην γωνία διάθλασης θ_r. Χρησιμοποιούμε το νόμο του Snell $\sin\vartheta_i = n\sin\vartheta_r$ και έχουμε

$$a = \frac{(2N-1)\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}} = \frac{(2N-1)6000}{4.4} = (2N-1)1363.6\,\overset{o}{A} \quad (1)$$

Άρα, πιθανά μήκη του πλακιδίου είναι 1363.6, 4090.9, 6818 κλπ Angstrom.

Από διάθλαση παρατηρούμε φως στα 4500 Α. Συμφωνα με την σχέση (22.18)

$$a = \frac{M\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2\vartheta_i}} = \frac{M\cdot 4500}{2.2} = M\cdot 2045.4\,\overset{o}{A} \quad (2)$$

οπου Μ=1,2, … Από την σύγκριση των εξισώσεων (1) και (2) παρατηρούμε οτι για ενισχυση πρέπει να ισχύει

$$\frac{2N-1}{M} = \frac{2045}{1363} \approx \frac{3}{2}$$

Για Ν=2, Μ=2 προκείπτει το πλακίδιο με το μικρότερο πάχος περίπου 4090 Α. Για Ν=5, Μ=6 έχουμε πλακίδιο με πάχος περίπου 12270 Α κλπ.

Θέμα 7ο (Μονάδες: 1.0)
Α) Ο φοιτητής μπορεί να ελέγξει αν για κάποια από τις δύο πιθανές τιμές του δείκτη διάθλασης υπάρχει ολική ανάκλαση στην απιφάνεια ΟΒ κατά την πρόσπτωση της δέσμης από το οπτικά πυκνότερο μέσο (πρίσμα, n_2) στο οπτικά αραιότερο (αέρας, $n_1 = 1$).

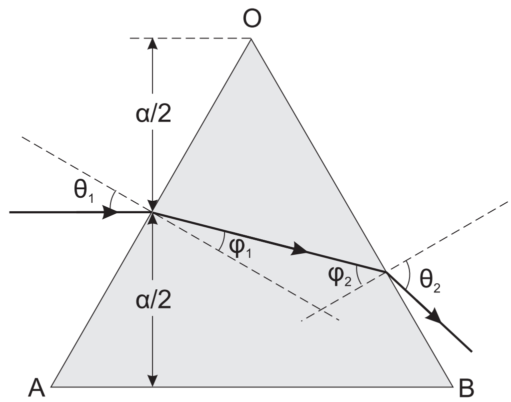
Η γωνία θ_2 υπό την οποία εξέρχεται η δέσμη από την πλευρά ΟΒ βρίσκεται με εφαρμογή του νόμου του Snell:

$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\varphi_1$

$n_2\sin\varphi_2 = n_1\sin\theta_2$

με $\theta_1 = 30°$ και $n_1 = 1$.

Επίσης από τη γεωμετρία του συστήματος έχουμε $\varphi_1 + \varphi_2 = 60°$.



α. Παρατηρούμε ότι για $n_2 = 1.35$ βρίσκουμε $\varphi_1 = 21.7°$ και $\varphi_2 = 38.3°$ το οποίο μας δίνει $\sin\theta_2 = n_2\sin\varphi_2 = 0.836 < 1$, άρα σε αυτή την περίπτωση υπάρχει εξερχόμενη δέσμη.

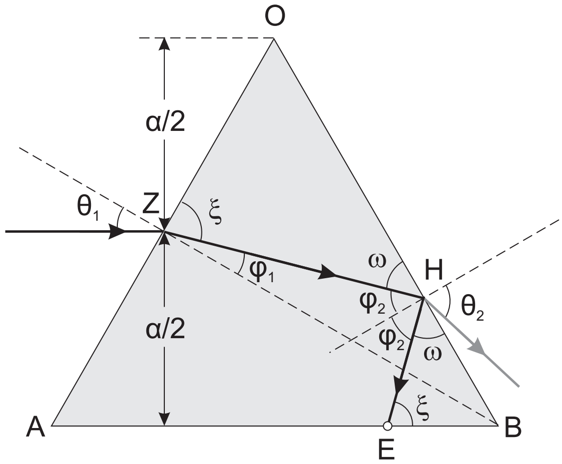
β. Παρατηρούμε ότι για $n_2 = 1.85$ βρίσκουμε $\varphi_1 = 15.7°$ και $\varphi_2 = 44.3°$ το οποίο μας δίνει $\sin\theta_2 = n_2\sin\varphi_2 = 1.3 > 1$, που είναι αδύνατον, άρα σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει εξερχόμενη δέσμη (ολική ανάκλαση).

Άρα ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος είναι $n_2 = 1.85$.

Β) Αρκεί να βρούμε το μήκος του τμήματος ΕΒ. Από τη γεωμετρία του προβλήματος έχουμε

$\xi = 90° - \varphi_1 = 74.3°$ και

$\xi + \omega = 120°$, άρα $\omega = 45.7°$. Με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων έχουμε:



1. για το τρίγωνο ΖΗΒ:

$$\frac{\text{ZB}}{\sin(2\varphi_2 + \omega)} = \frac{\text{HB}}{\sin\varphi_1} \quad (1)$$

2. για το τρίγωνο ΕΗΒ:

$$\frac{\text{EB}}{\sin\omega} = \frac{\text{HB}}{\sin\xi} \quad (2)$$ η οποία με αντικατάσταση του ΗΒ από την (1) γίνεται

$$\frac{\text{EB}}{\sin\omega} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\xi}\frac{\text{ZB}}{\sin(2\varphi_2+\omega)} \Rightarrow \text{EB} = \sin\omega\frac{\sin\varphi_1}{\sin\xi}\frac{\alpha}{\sin(2\varphi_2+\omega)} = 0.28\alpha \Rightarrow \text{EB} = 2.8\text{cm}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο απέχει 2.8 cm από το σημείο Β.

.

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ