Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

ΣΥΓΧΡΟΝΗ

Διάρκεια: 120 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………….

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.0)

Α) Τα εκπεμπόμενα μήκη κύματος για φωτόνια σε υδρογονοειδές ιόν δίνονται από

$$\frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f = \frac{ke^2Z^2}{2\alpha_0}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{ke^2Z^2}{2hc\alpha_0}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Η σειρά Balmer αντιστοιχεί σε μεταπτώσεις προς την κατάσταση με $n_f = 2$. Τα αντίστοιχα μήκη κύματος δίνονται από

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \;, n_i = 3, 4, 5, \ldots$$

Το μέγιστο μήκος κύματος αντιστοιχεί στην γραμμή με $n_i = 3$. Επομένως η τρίτη γραμμή θα αντιστοιχεί σε $n_i = 5$

$$Z = \sqrt{\frac{1/R}{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)\lambda}} = \sqrt{\frac{9.1128\times10^{-6}m}{\left(1/4 - 1/25\right)\times1085\times10^{-10}m}} \approx 2$$

Επομένως πρόκειται για ιόν Ηλίου (He^{++}) για το οποίο η ενέργεια του ηλεκτρονίου στη βασική κατάσταση δίνεται από

$$E_1 = -13.6Z^2\,\mathrm{eV} = -54.4\mathrm{eV}$$

Β) Η γωνία που σχηματίζει το άνυσμα της στροφορμής με τον άξονα των z δίνεται από

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|L|} = \frac{m\hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar} \Rightarrow \cos 65.9° = \frac{m}{\sqrt{12}} \Rightarrow m \approx 1$$

Ενώ για το μέτρο της στροφορμής έχουμε (απορρίπτοντας την αρνητική ρίζα)

$$\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar \Rightarrow \ell^2 + \ell - 12 = 0 \Rightarrow \ell = 3$$

Για $\ell = 3$ το μικρότερο n είναι το $n = 4$ επομένως η κυματοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση 7.17 του βιβλίου των Serway,Moses, Moyer

$$\psi_{4,3,1}(r,\theta,\phi) = R_{43}(r)Y_4^3(\theta,\phi)$$

Θέμα 2º (Μονάδες: 2.0)

Α) Από την κανονικοποίηση έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left|\psi(x)\right|^2 = 1 \Rightarrow A^2 \left(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{+a\,x} + \int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{a^2}{\pi}x^2} \right) = 1 \Rightarrow A^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{\pi}{2a} \right) = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2a}{\pi+2}}$$

Β)

$$P_{x<0} = \int_{-\infty}^{0} dx \left|\psi(x)\right|^2 = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{+a\,x} = \frac{2a}{\pi+2}\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi+2} \approx 38.9\%$$

Γ) Το δυναμικό μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση του Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \Rightarrow \left(E + V(x)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + E$$

Στο πρόβλημα έχουμε, για $x > 0$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{Ae^{-\frac{a^2}{2\pi}x^2}\left(\frac{a^4}{\pi^2}x^2 - \frac{a^2}{\pi}\right)}{Ae^{-\frac{a^2}{2\pi}x^2}} + \varepsilon = \varepsilon - \frac{\hbar^2 a^2}{2m\pi} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{a^4}{\pi^2}x^2, x > 0$$

και για $x < 0$

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{Ae^{\frac{a}{2}x}a^2/4}{Ae^{\frac{a}{2}x}} + \varepsilon = \varepsilon + \frac{\hbar^2 a^2}{8m}, x < 0$$

Θέμα 3º (Μονάδες: 2.0)

Ζητείται η αρχική μάζα του άνθρακος. Επειδή 1 γραμμάριο έχει N_A νουκλεόνια, $g \equiv N_A u$, και κάθε πυρήνας άνθρακος έχει ΑΒ=12 νουκλεόνια, η μάζα του άνθρακος ήταν

$$m = N_c\, ABu = N_c\, AB\frac{g}{N_A},$$

όπου N_c το ολικό πλήθος των πυρήνων αρχικώς.

Η εξίσωση της ενεργότητος είναι

$$R\;\;t\; = R_0 e^{-\lambda t},$$

όπου λ είναι η σταθερά διασπάσεως,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Άρα η ηλικία είναι

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R\;\;t}{R_0}\right) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R_0}{R\;\;t}\right)$$

Και το σφάλμα ενεργότητος είναι

$$\Delta R = -\lambda R_0 e^{-\lambda t}\Delta t = -\lambda R\;\;t\;\;\Delta t \Rightarrow \left|\Delta t\right| = \frac{\Delta R}{\lambda R\;\;t}$$

Αφού προέκυψε Δt=t/8, έπεται

$$\frac{\Delta R}{R\;\;t} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{R_0}{R\;\;t}\right) \Rightarrow R_0 = R\;\;t\;\;e^{\frac{8\Delta R}{R\;t}}$$

Αν οι αρχικοί πυρήνες ^{14}C ήσαν N_0, τότε αρχικώς το δείγμα είχε

$$N_c = \frac{N_0}{k} = \frac{R_0}{\lambda k}$$

πυρήνες άνθρακος, επειδή $R_0 = \lambda N_0$
Επομένως,

$$m = \frac{R_0\, AB\, g}{\lambda\, kN_A} \Rightarrow m = \frac{AB}{kN_A}\frac{T}{\ln 2} R\ \ t\ \ e^{\frac{8\Delta R}{R\,t}}\ \ g$$

Επειδή οι κρούσεις δίδονται ανά ώρα μετατρέπουμε και το T σε ώρες,

$$m = \frac{12}{1.3 10^{-12}\cdot 6.02 10^{23}} \frac{5730\, y\cdot 365\frac{d}{y}\cdot 24\frac{h}{d}}{\ln 2}\frac{22}{h} e^{\frac{8\cdot 5}{22}}\ \ g\ \Rightarrow m = 0.15g$$

Η ηλικία και το σφάλμα μπορεί να υπολογισθεί από

$$t = \frac{8\Delta R}{\lambda R\ \ t} = \frac{4\cdot 5}{22}\frac{5730\, y}{\ln 2} \Rightarrow t = 15000\, y,\ \ \Delta t = \frac{15000y}{8} = 1900y$$

<u>Θέμα 4$^{\text{ο}}$</u> (Μονάδες: 2.0)
Α) Η ανηγμένη μάζα είναι

$$\mu = \frac{m_H m_{^{35}Cl}}{m_H + m_{^{35}Cl}} \approx \frac{1.67\times 10^{-27}\cdot 35\cdot 1.67\times 10^{-27}}{1.67\times 10^{-27} + 35\cdot 1.67\times 10^{-27}} kg = 1.623\times 10^{-27} kg$$

ενω η ροπή αδράνειας είναι

$$I = \mu_{H^{35}Cl} R^2 = 1.623\times 10^{-27} kg\cdot (1.27A)^2 = 2.62\times 10^{-47} kgm^2$$

Β) Το ενεργειακό φάσμα δίνεται από

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1),\quad l = 0,1,2,..$$

$$E_1 = 2\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\left(6.582\times 10^{-16} eV\cdot s\right)^2}{2.710\times 10^{-47} kgm^2} = \frac{\left(6.582\times 10^{-16} eV\right)^2}{2.710\times 10^{-47} J} = \frac{1.602\times 10^{-19}\cdot 43.32\times 10^{-32}}{2.710\times 10^{-47}} eV =$$
$$= 2.65\times 10^{-3} eV$$

$$E_2 = 6\frac{\hbar^2}{2I} = 3\frac{\hbar^2}{I} = 7.94\times 10^{-3} eV$$

Γ) Ισχύει

$$\nu_{0-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar}{I} \approx 6.62\times 10^{11} Hz$$

$$\nu_{1-2} = 2\nu_{0-1} = 13.23\times 10^{11} Hz$$

Δ) Ισχύει

$$\frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) = 0.369 eV$$

ή $l(l+1) = 278$. Τελικά $l \approx 15$

<u>Θέμα 5^{o}</u> (Μονάδες: 2.0)

Θεωρείστε την πυρηνική αντίδραση

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{9}_{4}\mathrm{B}e \to \mathrm{X} + ^{4}_{2}\mathrm{H}e$$

Α) Βρείτε τον μαζικό και ατομικό αριθμό του στοιχείου Χ και προσδιορίστε για ποιο στοιχείο πρόκειται.

Β) Βρείτε την ενέργεια που απελευθερώνεται από την αντίδραση

Γ) Έστω ότι αρχικά ο πυρήνας του $^{9}_{4}\mathrm{B}e$ είναι ακίνητος. Ποια κινητική ενέργεια θα πρέπει να έχει το $^{2}_{1}\mathrm{H}$ για να μπορέσει να ξεκινήσει η αντίδραση (την ενέργεια κατωφλίου);

Δ) Εξηγείστε γιατί απαιτείται αυτή η ενέργεια ενώ τελικά η αντίδραση είναι εξώθερμη;

Α) Για τον μαζικό αριθμό του άγνωστου στοιχείου θα έχουμε

$$A + 4 = 2 + 9 \Rightarrow A = 7$$

και για τον ατομικό αριθμό

$$Z + 2 = 1 + 4 \Rightarrow Z = 3$$

Επομένως πρόκειται για Λίθιο $^{7}_{3}\mathrm{Li}$

Β) Το άθροισμα των μαζών των αντιδρώντων είναι, σύμφωνα με τους πίνακες του παραρτήματος Ζ

$$m\left(^{2}_{1}\mathrm{H}\right) + m\left(^{9}_{4}\mathrm{Be}\right) = 2.014102u + 9.012183u = 11.0263u$$

Και η μάζα των προϊόντων

$$m\left(^{7}_{3}\mathrm{Li}\right) + m\left(^{4}_{2}\mathrm{He}\right) = 7.016004u + 4.002603u = 11.0186u$$

Η διαφορά μάζας είναι

$$\Delta m = 11.0263 - 11.0186 = 0.007678$$

με τα προϊόντα να έχουν μικρότερη μάζα. Η αντίδραση λοιπόν απελευθερώνει ενέργεια (είναι εξώθερμη) ίση με

$$E = \Delta m\, 931.5\mathrm{MeV/u} = 7.152\mathrm{MeV}$$

Γ) Για να μπορέσει να ξεκινήσει η αντίδραση θα πρέπει οι δύο πυρήνες να έρθουν σε επαφή. Θα πρέπει δηλαδή ο κινούμενος πυρήνας να έχει αρκετή ενέργεια έτσι ώστε να υπερνικήσει την άπωση Coulomb. Οι ακτίνες των δύο πυρήνων δίνονται από

$$r_H = 1.2\mathrm{fm}\times 2^{1/3}$$

$$r_{Be} = 1.2\mathrm{fm}\times 9^{1/3}$$

και η απόσταση επαφής είναι

$$R = r_H + r_{Be} = 4.0\text{fm}$$

Η απαιτούμενη ενέργεια είναι λοιπόν

$$U = k\frac{q_H q_{Be}}{R} = k\frac{4{q_e}^2}{R} = 1.44\text{MeV}$$

Δ) Η ενέργεια αυτή απαιτείται για να ξεκινήσει η αντίδραση, για να μπορέσουν δηλαδή οι πυρήνες να υπερνικήσουν την άπωση Coulomb και να έρθουν σε επαφή.

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ