Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων Τελικών Εξετάσεων στη Θεματική Ενότητα ΦΥΕ34

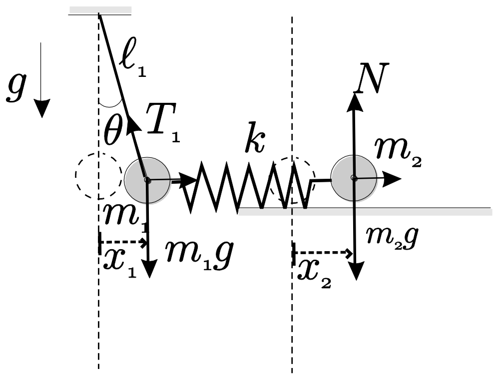
ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Διάρκεια: 180 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………

Τμήμα: ……………

Θέμα 1ο (Μονάδες: 2.5)



Α) Θεωρούμε μετατόπιση του συστήματος από τη θέση ισορροπίας όπως στο Σχήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο μάζες φαίνονται στο Σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κάθε μια μάζα παίρνουμε

$$(m_1): m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k\left(x_1 - x_2\right) - T\sin\theta$$
$$T\cos\theta = m_1 g$$
$$(m_2): m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k\left(x_1 - x_2\right)$$
$$N_1 = m_1 g$$

Επιλύοντας για την τάση της μπάρας και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση μικρών γωνιών $\theta \ll 1, \cos\theta \approx 1$

$$T = \frac{m_1 g}{\cos\theta} \approx m_1 g$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις και χρησιμοποιώντας

$$\sin\theta = \frac{x_1}{\ell},$$

Βρίσκουμε

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k\left(x_1 - x_2\right) - m_1 \frac{g}{\ell} x_1$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k\left(x_1 - x_2\right)$$

και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος

$m_1 = 8m, m_2 = m,\ k = \dfrac{m_1 g}{7\ell} = \dfrac{m_1}{7}\omega_0^2 = \dfrac{8m}{7}\omega_0^2\ \ \dfrac{m_1 g}{\ell} = 8m\,\omega_0^2$ βρίσκουμε τελικά

$$\ddot{x}_1 = -\frac{8}{7}\omega_0^2 x_1 + \frac{1}{7}\omega_0^2 x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{8}{7}\omega_0^2 x_1 - \frac{8}{7}\omega_0^2 x_2$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Β) Εισάγοντας τη γενική μορφή των κανονικών τρόπων ταλάντωσης $x_i = A_i \cos(\omega t + \delta), i = 1,2$ στις εξισώσεις κίνησης παίρνουμε

$$\left(\frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2\right)A_1 - \frac{1}{7}\omega_0^2 A_2 = 0$$
$$-\frac{8}{7}\omega_0^2 A_1 + \left(\frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2\right)A_2 = 0$$

οι οποίες γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{1}{7}\omega_0^2 \\ -\frac{8}{7}\omega_0^2 & \frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{1}{7}\omega_0^2 \\ -\frac{8}{7}\omega_0^2 & \frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{7}\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{8-2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\frac{8-2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2 + \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{2}}{7}}\omega_0 \approx 0.860\omega_0, \omega_2 = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{2}}{7}}\omega_0 \approx 1.24\omega_0$$

Γ) Αντικαθιστώντας στην (1) $\omega = \omega_1$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2 & -\frac{1}{7}\omega_0^2 \\ -\frac{8}{7}\omega_0^2 & \frac{2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{7}\omega_0^2 A_1 - \frac{1}{7}\omega_0^2 A_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2\sqrt{2}$$

<u>Θέμα 2^{ο}</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Έστω f και υ η συχνότητα της σειρήνας και η ταχύτητα του περιπολικού, V η ταχύτητα του φορτηγού και c η ταχύτητα του ήχου.

Ο ήχος της σειρήνας λαμβάνεται και επανεκπέμπεται από μεν το φορτηγό έστω με συχνότητα $f_A=f_\varphi$, από δε το κτήριο με συχνότητα $f_A=f_\kappa$.

Έστω δε οτι οι εξ ανακλάσεως λαμβανόμενες συχνότητες είναι $f_\mu=0.90f_M$. Η μεγαλύτερη, f_M, προέρχεται από το φορτηγό που κινείται αντίθετα.

Πρό της ανακλάσεως είναι:

Εκπομπός Ε: Το περιπολικό. Δέκτης Δ: Το φορτηγό ή το κτήριο.

Αν η θετική φορά είναι $\overrightarrow{\Delta E}$ τότε υ<0, V>0, και

$$f_A = f\frac{c+\upsilon_\Delta}{c+\upsilon_\mathrm{E}} \Rightarrow f_\phi = f\frac{c+V}{c-\upsilon},\ f_\kappa = f\frac{c+0}{c-\upsilon}$$

Μετά την ανάκλαση είναι:
Εκπομπός Ε: Το φορτηγό ή το κτήριο Δέκτης Δ: Το περιπολικό.
Αν η θετική φορά είναι $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ τότε υ>0, V<0, και

$$f_A = f\frac{c+\upsilon_\Delta}{c+\upsilon_\mathrm{E}} \Rightarrow f_\mathrm{M} = f_\phi\frac{c+v}{c-V},\ f_\mu = f_\kappa\frac{c+v}{c+0}$$

Αντικαθιστώντας και διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$f_\mathrm{M} = f\frac{c+V}{c-\upsilon}\frac{c+v}{c-V},\ f_\mu = f\frac{c}{c-\upsilon}\frac{c+v}{c} \Rightarrow$$

$$a \equiv \frac{f_\mu}{f_\mathrm{M}} = \frac{c-V}{c+V} \Rightarrow c = V\frac{1+a}{1-a} = V\frac{1+0.9}{1-0.9}$$

Άρα

$$c = 19V = 19\cdot 62\frac{km}{h} = 1178\frac{10^3 m}{3600 s} \Rightarrow c = 327.2\frac{m}{s}$$

Β) Συναρτήσει της θερμοκρασίας είναι

$$c = 20.055\sqrt{T} m s^{-1} K^{-1/2}$$

Άρα

$$T = \left(\frac{327.2\, m/s}{20.055\, m/s/K^{-1/2}}\right)^2 = 266\,K = (266-273)C \Rightarrow T = -7\,C$$

Επομένως οι διαβάτες φορούν χειμωνιάτικα ρούχα.

<u>Θέμα 3ο</u> (Μονάδες: 1.5)
Α) Συμφωνα με την θεωρία, η κατανομή της έντασης στο πέτασμα από δύο πεπερασμένες, όμοιες σχισμές δίνεται από

$$I = I_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2\cos^2\frac{\delta}{2}$$

όπου ο πρώτος όρος περιγράφει την περίθλαση από μιά σχισμή πάχους b ενώ ο δεύτερο όρος την συμβολή από δυο σχισμές σε απόσταση a με δ την διαφορά φάσης που αντιστοιχεί στην διαφορά των οπτικών διαδρομών. Για το δ έχουμε

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta + \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d$$

όπου ο πρώτος όρος περιγράφει την διαφορά διαδρομών χωρίς το πλακίδιο ενώ ο δεύτερος όρος την συνεισφορά από το πλακίδιο. Έχουμε υποθέσει οτι η παρουσία του πλακιδίου δεν αλλάζει την αρχική διαδρομή χωρίς το πλακίδιο.

Για το σημείο P έχουμε θ=0. Άρα,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d$$

Για τον όρο από την περίθλαση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του l' Hopital- ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

οπου $x=\pi b\sin\theta/\lambda$. Τελικά έχουμε

$$I=I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(n-1)d\right]$$

Γ) Απο την προηγούμενη σχέση βλέπουμε οτι το συνημίτονο μηδενίζεται για

$$\frac{\pi}{\lambda}(n-1)d=(2m+1)\frac{\pi}{2},\qquad \mathrm{m}=0,\pm1,\pm2,...$$

δηλαδή

$$d=\frac{(2m+1)\lambda}{2(n-1)}$$

Για m=0 έχουμε το ελάχιστο πάχος πλακιδίου για να υπάρχει ελάχιστο στην ένταση στο P, δηλ.

$$d_{\min}=\frac{\lambda}{2(n-1)}=2.5\lambda=1375nm$$

<u>Θέμα 4ο</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Το πλάτος του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από

$$\frac{E'_{0r}}{E_{0i}}=\frac{\cos\theta-n\cos\theta_r}{\cos\theta+n\cos\theta_r}$$

Επομένως η ανακλώμενη ένταση δίνεται από

$$I_r=\frac{1}{2}c\varepsilon_0\left(E'_{0r}\right)^2=\frac{1}{2}c\varepsilon_0\left(E_{0i}\right)^2\left(\frac{\cos\theta-n\cos\theta_r}{\cos\theta+n\cos\theta_r}\right)^2=I_i\left(\frac{\cos\theta-n\cos\theta_r}{\cos\theta+n\cos\theta_r}\right)^2$$

όπου

$$\sin\theta=n\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{\sin\theta}{n}\Rightarrow\cos\theta_r=\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$I_r=0.0578I_i$$

Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίο του ανακλώμενου φωτός σχηματίζει γωνία $30°$ με τον άξονα του πολωτή. Συνεπώς η ένταση στον μετρητή θα δίνεται από

$$I=I_r\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=0.0578I_i\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\Rightarrow\frac{I_r}{I_i}=0.0434$$

Β) Αυτό θα συμβεί μόνο αν το ανακλώμενο κύμα έχει μηδενικό πλάτος το οποίο συμβαίνει στη γωνία Brewster $\tan\theta=n\Rightarrow\theta=56.3°$

<u>Θέμα 5ο</u> (Μονάδες: 1.5)

Α) Για τον υπολογισμό του ηλ. πεδίου αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Faraday

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Αλλά

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{x}(\partial_y E_z - \partial_z E_y) + \hat{y}(\partial_z E_x - \partial_x E_z) + \hat{z}(\partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

$$= \hat{z}\partial_x E_y = \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{1+(x+ct)^2}\right) = \hat{z}\frac{d}{d(x+ct)}\left(\frac{5}{1+(x+ct)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{d(x+ct)}{dt}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{5}{1+(x+ct)^2}\right) = \hat{z}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{5}{1+(x+ct)^2}\right) = -\hat{z}\frac{10(x+ct)}{\left[1+(x+ct)^2\right]^2}$$

Όπου $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ κ.ο.κ. και χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (βλ. σελ. 12 Αλόνσο Φινν)

Άρα

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{z}\frac{10(x+ct)}{\left[1+(x+ct)^2\right]^2}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{z}\int dt\,\frac{10(x+ct)}{\left[1+(x+ct)^2\right]^2} + \vec{b}(x,y,z) = \hat{z}\left[\int du\,\frac{1}{c}\frac{10y}{\left[1+u^2\right]^2}\right] + \vec{b}(x,y,z) =$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{5}{c}\hat{z}\int d(1+u^2)\frac{1}{\left[1+u^2\right]^2} + \vec{b}(x,y,z) \Rightarrow \hat{B} = -\frac{5}{c}\hat{z}\frac{1}{1+u^2} + \vec{b}(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \hat{B} = -\frac{5}{c}\hat{z}\frac{1}{1+(x+ct)^2} + \vec{b}(x,y,z)$$

καθώς όμως πρόκειται για Η/Μ κύμα η συνάρτηση $\vec{f}(x,y,z)$ ανάγεται σε ένα σταθερό διάνυσμα το οποίο μπορούμε να θέσουμε ίσο με μηδέν.

<u>Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απλούστερη σε πράξεις μέθοδος</u>

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial(x+ct)}{\partial x}\frac{d}{d(x+ct)} = \frac{d}{d(x+ct)} \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\frac{d}{d(x+ct)} = c\frac{d}{d(x+ct)}, \quad \text{άρα}$$

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, όταν οι μερικές παράγωγοι δρουν πάνω σε μια συνάρτηση του $x+ct$.

Άρα

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\hat{z}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{5}{1+(x+ct)^2}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{5\hat{z}}{c[1+(x+ct)^2]} + \vec{b}(x,y,z) = \tilde{B}_z(x+ct)\hat{z} + \vec{b}(x,y,z)$$

Β) Οι συναρτήσεις $E_y = E_y(x+ct)$ και $B_z = B_z(x+ct)$ είναι συναρτήσεις μόνο της $x+ct$ άρα, σύμφωνα με την ανάλυση των Αλονσο-Φινν παρ. 18.4 και 18.10 ικανοποιούν την εξίσωση κύματος με ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής ίση με $\vec{v} = -c\hat{x}$. Άρα έχουμε ένα επίπεδο κύμα με ισοφασικές επιφάνειες επίπεδα κάθετα στον άξονα των x. Σημειώνουμε ότι επειδή οι διευθύνσεις των πεδίων είναι σταθερές πάνω στα επίπεδα αυτά, έχουμε γραμμικά πολωμένο κύμα με, όπως αναμένεται, εγκάρσιες συνιστώσες του ΗΜ πεδίου στη διεύθυνση διάδοσης.

Γ) $\vec{P} = c^2\epsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}$

$$\vec{E}\times\vec{B} = \hat{x}(E_yB_z - E_zB_y) + \hat{y}(E_zB_x - E_xB_z) + \hat{z}(E_xB_y - E_yB_x)$$

$$= \hat{x}E_yB_z = -\hat{x}\frac{5}{1+(x+ct)^2}\frac{1}{c}\frac{5}{1+(x+ct)^2} = -\frac{1}{c}\frac{25\hat{x}}{[1+(x+ct)^2]^2}$$

Άρα $\vec{P} = -\dfrac{\epsilon_0 c 25\hat{x}}{[1+(x+ct)^2)]^2}$

που δείχνει στη φορά του $-x$

<u>Θέμα 6$^{\text{ο}}$</u> (Μονάδες: 1.5)

Ο τύπος για τις διαθλαστικές επιφάνειες και πρόσπτωση ακτίνων από n_1 προς n_2 είναι:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Εφαρμόζοντας για την πρόσπτωση από την περιοχή 1 (αέρας $n_1 = 1$) προς την περιοχή 2 (γυαλί $n_2 = 1.6$). Εδώ $p = 120cm$ και $R = 0.20m$ οπότε βρίσκουμε

$$\frac{1}{1.20} + \frac{1.6}{q} = \frac{1.6-1}{0.20} \Rightarrow \frac{1.6}{q} = \frac{1.6-1}{0.20} - \frac{1}{1.20} \Rightarrow q \approx 74\text{cm}$$

Το είδωλο δηλαδή βρίσκεται 74cm στα δεξιά της επιφάνειας 1 δηλαδή 74cm-50cm=24cm δεξιά της επιφάνειας 2. Το είδωλο αποτελεί δηλαδή φανταστικό αντικείμενο για την επιφάνεια 2 με $p = -0.24m$. Τώρα οι ακτίνες πέφτουν από το γυαλί $n_1 = 1.6$ προς τον αέρα $n_2 = 1$

$$\frac{1.6}{-0.24} + \frac{1}{q} = \frac{1-1.6}{0.4} \Rightarrow q = 12cm$$

Επομένως το είδωλο βρίσκεται 12cm δεξιά της επιφάνειας 2. Καθώς $q > 0$ το είδωλο είναι πραγματικό .

.

Χρησιμοποιείστε όπου απαιτείται σταθερές από τα βιβλία σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ