ΕΑΠ – ΦΥΕ 34

Σύντομες Απαντήσεις στην Εξέταση Ιουνίου 2004 στο μάθημα

«Από την Κλασική στην Σύγχρονη Φυσική»

1) Η σειρά Balmer του γραμμικού φάσματος του ατόμου του υδρογόνου αντιστοιχεί σε μεταβάσεις ηλεκτρονίων που καταλήγουν στην στιβάδα n =2 .

Δείτε παραδείγματα 3.7 , 3.8, Άσκησεις 3, 4, στην σελίδα 119 του Serway.

(α) Το μέγιστο μήκος κύματος της σειράς Balmer είναι :

Α 756 nm

Β 656 nm

Γ 576 nm

Δ 865 nm

Ε 365 nm

ΣΤ Τίποτα απ΄ όλα αυτά. Επεξηγήστε.

(β) Το μικρότερο δυνατό μήκος κύματος της σειράς Balmer είναι :

Α 465 nm

Β 756 nm

Γ 365 nm

Δ 656 nm

Ε 576 nm

ΣΤ Τίποτα απ΄ όλα αυτά. Επεξηγήστε.

Επιλέξατε μια μόνο από τις απαντήσεις, που πιστεύετε ότι ταιριάζει καλύτερα σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Θα πρέπει να φαίνονται οι πράξεις που οδηγούν στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

(γ) Βρείτε την ενέργεια σε eV του φωτονίου της σειράς Balmer, που έχει το μικρότερο μήκος κύματος **3.4 eV**

(με αριθμητική τιμή και μονάδες)

(δ) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις, οι οποίες αφορούν τη συχνότητα *ν* και το μήκος κύματος *λ* μιας φασματικής γραμμής είναι κατά τη γνώμη σας σωστές, όπου λ_1, λ_2 είναι τα μήκη κύματος και ν_1,ν_2 οι συχνότητες δύο άλλων φασματικών γραμμών.

Α το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

Β η συχνότητα ν δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}$

Γ το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}$

Δ η συχνότητα ν δίνεται από τη σχέση $\nu=\nu_2-\nu_1$

Ε το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{\lambda_1}+\frac{c}{\lambda_2}$

ΣΤ Τίποτα απ΄ όλα αυτά. Επεξηγήστε. **Συνδυαστική αρχή, Διατήρηση της ενέργειας**

2) Η κλασσική σχέση για την συνάρτηση φασματικής πυκνότητας u (ν,Τ) δίνεται από τον τύπο: $u(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T$ (σχέση των Rayleigh-Jeans). **Δείτε δεύτερη εργασία**

(α) Εξηγείστε ποιοτικά ότι η σχέση των Rayleigh-Jeans, δεν είναι αποδεκτή και δεν μπορεί να περιγράψει τους πειραματικούς νόμους των Stephan-Boltzmann και Wien (νόμο μετατοπίσεως του Wien). **Υπεριώδης καταστροφή , ν_{max}, Ισχύς Ι $\to\infty$.**

Γι αυτό τον λόγο ο Wien επινόησε τον παρακάτω εμπειρικό τύπο για την συνάρτηση u(ν,Τ) : $u(\nu,T)\cong A\nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{k_B T}}$, όπου A και α αυθαίρετες θετικές σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται εμπειρικά συγκρίνοντας με τις πειραματικές μετρήσεις.

Δείξτε ότι, πράγματι ο τύπος αυτός δεν έχει τα προβλήματα της κλασσικής σχέσης των Rayleigh-Jeans). Δηλαδή δικαιολογεί:

(β) τον πειραματικό νόμο μετατοπίσεως του Wien

$\frac{\partial u(\nu,T)}{\partial \nu}=0$, **Δείτε δεύτερη εργασία**

(γ) καθώς και τον πειραματικό νόμο των Stephan και Boltzmann.

$I\propto\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu \quad \Rightarrow I\propto T^4$ **Δείτε δεύτερη εργασία**

(δ) Εξηγήστε ότι, παρόλα αυτά, η παραπάνω εμπειρική συνάρτηση του Wien δεν είναι αποδεκτή. Γιατί; **Δεν ικανοποιεί την αρχή της αντιστοιχίας για ν $\to 0$**

3) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα για το έργο εξόδου Φ σε eV, βρείτε: **(α)** για το Νάτριο την οριακή συχνότητα κάτω από την οποία δεν παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. **Δείτε δεύτερη εργασία**

$h\nu=\Phi-K$

όταν Κ=0 σταματάει να παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, οπότε:

$\nu = \frac{\Phi}{h} = 6\times10^{14}\,Hz$

Μέταλλο	Φ (eV)	Μέταλλο	Φ (eV)
Al	4.3	K	2.3
Be	5.0	Mn	3.7
Ca	2.9	Na	2.5
Cs	2.1	Ni	5.2
Cu	4.7	Pb	4.3
Fe	4.5	Pt	5.7
Hg	4.5	Zn	4.3

(β) ποια θα ήταν η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που θα μπορούσαν να εκπεμφθούν από μια μεταλλική επιφάνεια Νατρίου (Na), **(γ)** Καισίου (Cs) και **(δ)** Χαλκού (Cu), όταν φωτίζονται με μονοχρωματικό κόκκινο φως (λ= 7500 Å); Τι αλλάζει στην απάντησή σας εάν χρησιμοποιήσουμε μονοχρωματικό κυανό φως (λ= 4000 Å);

Για λ= 7500 Å, K<0 . Άρα δεν μπορεί να συμβεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Για λ= 40000 Å, K_{Na} = 0.6 eV , K_{Cs} = 0.5 eV , K_{Cu} < 0 : Αδύνατο.

(ε) Αναφέρετε ένα κριτήριο με βάση το οποίου να αξιολογήσετε ποιο (ή ποια) από τα στοιχεία του πίνακα θα ήταν καταλληλότερο, κατά την γνώμη σας, για την κατασκευή φωτοηλεκτρικών στοιχείων. Ποιο θα ήταν το λιγότερο κατάλληλο;

Το Cs το οποίο έχει το μικρότερο έργο εξόδου.

4) Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην χαμηλότερη στάσιμη ενεργειακή κατάσταση, περιορισμένο μέσα σε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού («κουτί») εύρους L=1Å.

(α) Δείξτε, με όποια μέθοδο επιθυμείτε, ότι οι ενεργειακές καταστάσεις του σωματιδίου δίνονται από τη σχέση $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$, $n = 1,2,3,\cdots$

Στάσιμο κύμα de Broglie , της μορφής $\Psi(x) = A\sin(kx), \quad \Psi(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$ **.**

$\Psi(0)=0\,,\Psi(L)=A\sin(kL)=0$. **Άρα kL=nπ** , $\Rightarrow E=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m} \quad \Rightarrow E_n=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2\,,\, n=1,2,3,\cdots$

ή $E_n=\dfrac{h^2}{8mL^2}n^2$

(β) Ποια είναι η αβεβαιότητα στη θέση και την ενέργεια του σωματιδίου; **Δx ≅ L =1Å, ΔE=0 (καθορισμένη ενέργεια, σύμφωνα με την $E_n=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$, αλλά μη καθορισμένη ορμή, $\pm\hbar k$).**

(γ) Για να προσδιορίσουμε την θέση του ηλεκτρονίου μέσα στο κουτί με δεκαπλάσια ακρίβεια, χρησιμοποιούμε φωτόνια μήκους κύματος **λ = 0.1 Å** (συμπληρώστε τα κενά).

(δ) Ποια θα είναι μετά την μέτρηση η αβεβαιότητα στην ενέργεια του;

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου πριν την μέτρηση θα είναι:

$$E_1=\frac{h^2}{8mL^2}=\frac{(hc)^2}{8(mc^2)L^2}=\frac{(12400\,eV\cdot \overset{o}{A})^2}{8(0.511\times10^6\,eV)\cdot(0.1\,\overset{o}{A})^2}=38\,eV$$

Η αβεβαιότητα στην τιμή αυτή της ενέργειας (εφόσον έχουμε ένα σταθερό σωμάτιο, στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση και δεν κάνουμε κάποια μέτρηση ώστε να το διαταράξουμε) είναι μηδέν (ενέργεια απόλυτα καθορισμένη, στις στάσιμες καταστάσεις).

Η αβεβαιότητα *ΔE_1* στην ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την μέτρηση θα είναι όση και η ενέργεια του φωτονίου E_Φ μήκους κύματος λ=0.1Å . Δηλαδή:

$$\Delta E_1=\frac{12400\,eV\cdot\overset{o}{A}}{0.1\,\overset{o}{A}}=1.24\times10^5\,eV$$

(ε) Σε ποιες ενεργειακές καταστάσεις θα μπορούσε να βρεθεί το ηλεκτρόνιο μετά τη μέτρηση;

Το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε κατάσταση *n* όπου $E_n\cong\Delta E_1$, ή:

$$n^2\cdot E_1\cong\Delta E_1 \quad , \quad \Rightarrow n\cong\sqrt{\frac{\Delta E_1}{E_1}}\cong\sqrt{\frac{1.24\times10^5\,eV}{38\,eV}}\cong 56\ .$$

5) (α) Επαληθεύσατε ότι η συνάρτηση $\psi(x)=Ae^{-ax^2}$,

όπου A και α θετικές σταθερές, περιγράφει την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους καταστάσεως ενός αρμονικού ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω.

Η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση:

$V(x)=\frac{1}{2}Dx^2 \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ **, όπου ω η (ιδιο)συχνότητα του ταλαντωτή.**

Άρα η (χρονοανεξάρτητη) εξίσωση του Schrödinger γράφεται:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{2mE}{\hbar^2}-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi(x)=0.$$

Έχουμε: $\psi(x)=Ce^{-ax^2}$ **,** $\frac{d\psi(x)}{dx}=C(-2ax)e^{-ax^2}$ **και** $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=C(-2a+4a^2x^2)e^{-ax^2}$**.**

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Schrödinger βρίσκουμε:

$$Ce^{-ax^2}\left\{(-2a+4a^2x^2)+\left[\frac{2mE}{\hbar^2}-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\right\}=0$$

Για να ικανοποιείται αυτή η εξίσωση για κάθε τιμή του x θα πρέπει το άθροισμα των σταθερών όρων καθώς και των όρων που είναι ανάλογοι προς x^2 να ίσο με μηδέν. Δηλαδή: $2a=\frac{2mE}{\hbar^2}$ **και** $(2a)^2=\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$**.**

(β) Βρείτε την τιμή της σταθεράς α και την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως του αρμονικού ταλαντωτή συναρτήσει των χαρακτηριστικών ποσοτήτων του ταλαντωτή m και ω. **Άρα:** $a=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)$ **και** $E=\frac{1}{2}\hbar\omega$**.**

(δ) Δώστε μια μαθηματική έκφραση από την οποία θα μπορούσε να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς A.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\Psi(x)\right|^2 dx=1 \quad , \quad |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2x^4}dx=1$$

(ε) Δώστε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο από την θέση $x=0$ έως την θέση $x=x_0$.

$$P(0,x_0)=\int_0^{x_0}\left|\Psi(x)\right|^2 dx=|A|^2\int_0^{x_0}e^{-a^2x^4}dx.$$