ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΦΥΕ 34 - Θεωρία Σχετικότητας
Εξετάσεις Ιουλίου 2004
Διάρκεια 2 ώρες.

Απαγορεύεται η χρήση βιβλίων, σημειώσεων, ασκήσεων, κινητών τηλεφώνων ή άλλων βοηθητικών μέσων. Επιτρέπεται μόνον η χρήση του υπογεγραμμένου τυπολογίου και ηλεκτρονικής αριθμομηχανής. Το τυπολόγιο θα παραδοθεί μαζί με το γραπτό.

Θέμα 1. α) Ένας μοτοσυκλετιστής κινούμενος με ταχύτητα 0.8c περνά δίπλα από ακίνητο παρατηρητή. Αν ο μοτοσυκλετιστής πετάξει μια μπάλα μάζας ηρεμίας m = 0.1 kg προς την κατεύθυνση κίνησής του με ταχύτητα 0.6c ως προς τον εαυτό του, πόση θα είναι η μάζα και η ταχύτητα της μπάλας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή;
β) Εάν ο μοτοσυκλετιστής εκπέμψει μια φωτεινή δέσμη που απομακρύνεται από αυτόν με ταχύτητα c σε κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας της μοτοσυκλέτας, πόση θα έπρεπε να είναι η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας ώστε η φωτεινή δέσμη να κινείται ως προς τον ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα c;

Θέμα 2. α) Ένα κωνικό διαστημόπλοιο κινείται, ως προς έναν παρατηρητή ακίνητο στη Γή, με ταχύτητα 0.95c κατά τη διεύθυνση x. Όταν το διαστημόπλοιο ηρεμεί, το ύψος του, L_x, και η ακτίνα της κυκλικής βάσης, L_y, έχουν μήκη 50m και 20m αντίστοιχα. Πόσες είναι οι αντίστοιχες διαστάσεις, L_x', L_y', του διαστημοπλοίου για τον ακίνητο παρατηρητή;
β) Αν στο τέλος του ταξιδιού τα χρονόμετρα του διαστημοπλοίου έχουν προχωρήσει κατά 4 μήνες από τότε που ξεκίνησε από τη Γη, πόσο θα δείχνουν τα χρονόμετρα στη Γή;

Θέμα 3. Σε πόση ταχύτητα πρέπει να επιταχύνουμε πρωτόνια μάζας ηρεμίας $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg για να αποκτήσουν **α)** την κινητική ενέργεια, **β)** την ορμή, **γ)** την ολική ενέργεια ηλεκτρονίων μάζας ηρεμίας $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg και ταχύτητας 0.90 c; Δώστε εξηγήσεις.
δ) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της άσκησης, γράψτε μια μαθηματική έκφραση για ένα φυσικό μέγεθος που έχει την ίδια αριθμητική τιμή ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και δώστε εξηγήσεις.

Θέμα 4. α) Αν φασματοσκοπικές μετρήσεις απομακρυσμένου γαλαξία δίνουν σχετική μετατόπιση των φασματικών γραμμών προς το ερυθρό, $\delta\lambda/\lambda = 5\%$, πόση είναι η ταχύτητα σχετική του γαλαξία;
β) Αν η σχετική μετατόπιση των φασματικών γραμμών ήταν προς το κυανούν, τι θα συμπεραίνατε για την σχετική ταχύτητα του γαλαξία; Δώστε εξηγήσεις.

Θέμα 5. Ηλεκτρόνιο κινείται παράλληλα προς ευθύγραμμο ρευματοφόρο σύρμα απείρου μήκους (γύρω από το οποίον αναπτύσσεται μαγνητικό πεδίο **B**, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι κάθετοι στο σύρμα, με φορά δεξιόστροφη κατά την συμβατική φορά του ρεύματος). Η ταχύτητα, **v**, του ηλεκτρονίου είναι ίση προς την ταχύτητα ολισθήσεως των κινουμένων ηλεκτρονίων του σύρματος. Παρατηρείται ότι το ηλεκτρόνιο έλκεται προς το σύρμα («παράλληλα ρεύματα έλκονται»). Δοθέντος οτι η δύναμη Lorentz επί του κινουμένου ηλεκτρονίου είναι $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, ερμηνεύστε ποιοτικά την παραπάνω έλξη, **α)** από το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, και **β)** από το σύστημα αναφοράς του κινουμένου ηλεκτρονίου. **γ)** Πόση είναι η ταχύτητα του κινουμένου ηλεκτρονίου ως προς το σύστημα του ερωτήματος (β);

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \dots \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t' = \gamma(t - \beta x/c) = \gamma(t - vx/c^2) = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad y' = y \quad \text{αν } \vec{v} = v\hat{x}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad z' = z$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Χωροχρονική απόσταση δυο χωροχρονικών σημείων $\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \mathcal{X}^0 \\ \mathcal{X}^1 \\ \mathcal{X}^2 \\ \mathcal{X}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}$:

$$\Phi = c^2(t^2 - T^2) - (x-\mathcal{X})^2 - (y-\mathcal{Y})^2 - (z-\mathcal{Z})^2$$
$$= c^2(x^0-\mathcal{X}^0)^2 - (x^1-\mathcal{X}^1)^2 - (x^2-\mathcal{X}^2)^2 - (x^3-\mathcal{X}^3)^2$$

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1v_2/c^2} \qquad \Delta t = \gamma\Delta\tau \quad (c^2d\tau^2 = c^2d\tau^2 - 0^2 - 0^2 - 0^2) \text{ δηλ. } \tau = \text{ο ιδιόχρονος}$$
$$= \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta l = \gamma^{-1}\Delta l_0 = \Delta l_0\sqrt{1-v^2/c^2} \longleftarrow \Delta l_0 = \text{το ιδιομήκος}$$

Αν κινούμενη πηγή Σ', με ταχύτητα $v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$, εκπέμπει φως περιόδου T' και μήκους κύματος λ' τότε $\lambda = \lambda'\dfrac{1 + v_r/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$u_1 = \frac{dx}{dt} \quad u_2 = \frac{dy}{dt} \quad u_3 = \frac{dz}{dt} \qquad u_1' = \frac{dx'}{dt'} \quad u_2' = \frac{dy'}{dt'} \quad u_3' = \frac{dz'}{dt'}$$

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - u_1v/c^2} \qquad u_2' = \frac{u_2}{\gamma(1 - u_1v/c^2)} \qquad u_3' = \frac{u_3}{\gamma(1 - u_1v/c^2)} \qquad \text{για } \vec{v} = v\hat{x}$$

$$a_1 = \frac{du_1}{dt} \quad a_2 = \frac{du_2}{dt} \quad a_3 = \frac{du_3}{dt} \qquad a_1' = \frac{du_1'}{dt'} \quad a_2' = \frac{du_2'}{dt'} \quad a_3' = \frac{du_3'}{dt'}$$

$$a_1' = \frac{a_1}{\gamma^3(1-u_1v/c^2)^3} \qquad a_2' = \frac{a_2}{\gamma^2(1-u_1v/c^2)^2} + \frac{a_1u_2v}{c^2\gamma^2(1-u_1v/c^2)^3} \qquad a_3' = \frac{a_3}{\gamma^2(1-u_1v/c^2)^2} + \frac{a_1u_3v}{c^2\gamma^2(1-u_1v/c^2)^3}$$

$$m = \gamma m_0 \qquad E = mc^2 = m_0c^2 + K \qquad K = (\gamma-1)m_0c^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad u^0 = \gamma \qquad u^1 = \gamma v_1 \qquad u^2 = \gamma v_2 \qquad u^3 = \gamma v_3 \qquad p^\mu = m_0u^\mu \qquad a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \qquad F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

$$p^\mu = (m, p_x, p_y, p_z) = (E/c^2, \vec{p}) = (\gamma m_0, \gamma m_0\vec{v}) \qquad F^\mu = (\gamma\,\vec{v}\cdot\vec{F}/c^2, \gamma\vec{F}) \qquad \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p^{0\,2}c^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 - \vec{p}^{\,2}$$

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$$

<u>Φωτόνια</u>: $E = hf = pc$, $p = mc$

$$E_x' = E_x \quad E_y' = \gamma(E_y - vB_z) \quad E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \qquad \text{αν } \vec{v} = v\hat{x}$$
$$B_x' = B_x \quad B_y' = \gamma(B_y + vE_z) \quad B_z' = \gamma(B_z - vB_y)$$

Λύσεις Σχετικότητας Ιουνίου 2004

1) α) Ο μοτοσυκλετιστής κινείται με ταχύτητα $v_{\text{μοτοσυκλετιστή ως προς Γη}} = v_Γ^Μ = (+)0,8c$

Η μπάλα κινείται με ταχύτητα $v_{\text{σφαίρας ως προς μοτοσυκλετιστή}} = v_Μ^Σ = +0,6c$

Άρα η ταχύτητα της σφαίρας ως προς την Γη θα είναι (σύνθεση ταχυτήτων $v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$)

$$v = v_Γ^Σ = v_Μ^Σ \oplus v_Γ^Μ = \frac{v_Μ^Σ + v_Γ^Μ}{1+\frac{v_Μ^Σ v_Γ^Μ}{c^2}} = \frac{0.8c+0,6c}{1+0.8\times 0.6} = \frac{1,4c}{1+0,48} = 0,946\,c$$ (3) (2)

$\uparrow$ σύνθεση

Η μάζα της σφαίρας ως προς την Γη θα είναι $m_Γ^Σ = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow$ (3)

$$\Rightarrow m = \frac{0,1\ kg}{\sqrt{1-0,946^2}} = 0,43\ kg$$ (2)

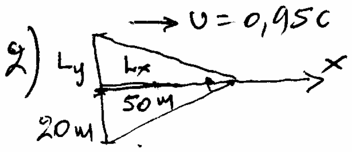
β) Το φως ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, άρα και ως προς την Γη, έχει ταχύτητα c ανεξάρτητως της ταχύτητας της πηγής (δηλ. της μοτοσυκλέτας).

Άρα η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας μπορεί να είναι οποιαδήποτε (5)

20

---

2) α)



Το L_x συστέλλεται κατά Lorentz $L_x' = L_x\sqrt{1-v^2/c^2}$ 2

$\Rightarrow L_x' = 50m\sqrt{1-0,95^2} = 50m\times 0,3122 = 15,61\ m$ 2

Το L_y παραμένει $L_y' = L_y = 20\ m$ 2

β) Ο ιδιόχρονος του διαστημοπλοίου είναι $T_0 = 4\mu secs$ 2

Άρα ως προς την Γη $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{4\mu secs}{\sqrt{1-0,95^2}} = 4\mu secs\times 3,20 = 12,80\mu secs$ 2

10

(2)

3) Τα ηλεκτρόνια μάζας ηρεμίας $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg και ταχύτητας $v_e = 0{,}9c$

έχουν: κινητική ενέργεια $K_e = (\gamma_e - 1) m_e c^2$ 2

ορμή $P_e = \gamma_e m_e v_e$ 2

ολική ενέργεια $E_e = \gamma_e m_e c^2$ 2

όπου $\gamma_e = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} = 2{,}294$ 2

Άρα $K_e = 1{,}294 \times 9{,}11\, 10^{-31}\,\text{kg}\, c^2 = 11{,}79\, 10^{-31}\,\text{kg}c^2$

$P_e = 2{,}294 \times 9{,}11\, 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 0{,}9c = 18{,}81\, 10^{-31}\,\text{kg}c$ 2

$E_e = 2{,}294 \times 9{,}11\, 10^{-31}\,\text{kg}\, c^2 = 20{,}90\, 10^{-31}\,\text{kg}\, c^2$

α) Τα πρωτόνια, για να αποκτήσουν την ίδια κιν. ενεργ. $K_p = K_e$

πρέπει να αποκτήσουν γ_p : $K_p = (\gamma_p - 1) m_p c^2 = K_e \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_p = 1 + \dfrac{K_e}{m_p c^2} = 1 + \dfrac{11{,}79\, 10^{-31}\,\text{kg}c^2}{1{,}67\, 10^{-27}\,\text{kg}c^2} = 1 + 7{,}06\, 10^{-4} = 1{,}000706$ 2

Άρα $\gamma_p = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}} \Rightarrow \dfrac{v_p}{c} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma_p^2}} = 0{,}0376 \Rightarrow v_p = 0{,}0376\, c = 11{,}266\, \dfrac{\text{km}}{\text{sec}}$ 2

β) Για ίδια ορμή: $P_p = m_p \gamma_p v_p = P_e \Rightarrow \gamma_p v_p = \dfrac{P_e}{m_p} = \dfrac{18{,}81\, 10^{-31}\,\text{kg}c}{1{,}67\, 10^{-27}\,\text{kg}} = 1{,}126\, 10^{-3}\, c$ 2

Για ευκολία χρησιμοποιώ $\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2}$

Άρα $\dfrac{v_p}{c} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma_p^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{1 + \gamma_p^2 \beta_p^2}} = \dfrac{\gamma_p \beta_p}{\sqrt{1 + \gamma_p^2 \beta_p^2}} = \dfrac{1{,}126\, 10^{-3} c}{\sqrt{1 + (1{,}126\, 10^{-3})^2}} = 1{,}126 \times 10^{-3} c =$ 2

$= 337{,}9\, \dfrac{\text{km}}{\text{sec}}$

γ) Για ίδια ολική ενέργεια θα έπρεπε $E_e = \gamma_e m_e c^2 = E_p = \gamma_p m_p c^2$ 2

$\Rightarrow \gamma_p = \dfrac{\gamma_e m_e}{m_p} = \dfrac{20{,}90 \times 10^{-31}\,\text{kg}}{1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}} = 1{,}25\, 10^{-3} < 1$ Αλλά $\gamma < 1$ αδύνατον 2

δ) Μια αναλλοίωτη συνάρτηση των δεδομένων (μαζών, ορμών, ενεργειών)

είναι το μέτρο του τετρανύσματος της ορμής $E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4$

Πράγματι το $m_0^2 c^4$ (ή τιμή του $E^2 - p^2 c^2$) είναι αναλλοίωτη σταθερά

$\dfrac{8}{30}$

4) Αν κινούμενη πηγή Σ', με ταχύτητα $U=\sqrt{U_r^2+U_t^2}$, εκπέμπει φως ιδιομήκους κύματος λ' τότε το παρατηρούμενο $\lambda = \lambda' \frac{1+U_r/c}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$ 4

Εδώ η μετατόπιση είναι προς το ερυθρό, άρα $\lambda > \lambda'$ 4

Υποθέτουμε μόνο ακτινική ταχύτητα (αγνοώντας την διαστολή του σύμπαντος) $U=U_r$, $1-U^2/c^2=(1-U/c)(1+U/c) \Rightarrow \lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+U/c}{1-U/c}}$

$\frac{\delta\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda-\lambda'}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\lambda'} - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \simeq (1+\beta)-1 = \beta = \frac{U}{c}$ η σχετική μετατόπιση 4

$\Rightarrow U \simeq \frac{\delta\lambda}{\lambda'} c \simeq 5\% c = 0{,}05c = 15000 \frac{km}{sec}$ ταχύτητα απομάκρυνσης 4

β) Αν η μετατόπιση ήταν προς το κυανούν $\lambda < \lambda'$

τότε $U \simeq \frac{\delta\lambda}{\lambda'} c = -5\% c = -0{,}05c = -15000 \frac{km}{sec}$ ο γαλαξίας θα πλησίαζε 4

20

5) Το θέμα είχε δοθεί στις εργασίες

α) Ως προς το εργαστήριο η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι $\vec{U}$ το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B}$, όπως δεν εκφώνηση, και η δύναμη επί του ηλεκτρονίου, ανάλογη το εξωτερ. γινόμενο $\vec{U}\times\vec{B}$, 4

$\vec{F}=-e\vec{U}\times\vec{B}$ είναι ελκτική προς το σύρμα ("παράλληλα ρεύματα έλκονται")

Από το ουδέτερο σύρμα ηλεκτροστατική δύναμη $=0$, Άρα $F=q(\vec{E}+\vec{U}\times\vec{B}) = q(0+\vec{U}\times\vec{B})$

β) Ως προς το κινούμενο ηλεκτρόνιο τα (παράλληλως κινούμενα ηλεκτρόνια) φαίνονται ακίνητα, τα πρωτόνια φαίνονται κινούμενα (με ταχύτητα $-\vec{U}$) άρα υφίστανται συστολή του μήκους, άρα σε κάθε μήκος Δl 4

περιέχονται περισσότερα πρωτόνια από τα ηλεκτρόνια, άρα το ηλεκτρόνιο έλκεται από τα πρωτόνια περισσότερο από ότι απωθείται από τα ηλεκτρόνια, άρα συνολικά έλκεται ("το παράλληλα ρεύματα έλκονται" ερμηνεύεται ως ηλεκτροστατική έλξη από φορτισμένο σύρμα.) 4

γ) Ως προς τον εαυτό του το ηλεκτρόνιο είναι ακίνητο $U^e_{ως\ προς\ e}=0$ 8

Λόγω της κινήσεως των πρωτονίων (με ταχύτητα $-\vec{U}$) αναπτύσσεται και μαγνητικό πεδίο B' (ως προς το ηλεκτρόνιο) αλλά αυτό αισθάνεται δύναμη Lorentz $F'=e\vec{U}^e_e\times\vec{B}'=e\cdot 0\cdot B'=0$ 20

Άρα η έλξη που αισθάνεται στο σύστημά του το ηλεκτρόνιο, είναι μόνον ηλεκτροστατική διότι $\vec{F}=q(\vec{E}'+\vec{U}\times\vec{B}')=q(\vec{E}'+0)$