Λύσεις Κυματικής Ιουνίου 2004

1) Α) Το Η/Μ πεδίο διαδίδεται κατά την διεύθυνση

$\vec{E} \times \vec{B} \sim \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ 1

$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}$ 1

$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ η οποία 1

$\frac{\partial B}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \varepsilon_0 \mu_0 = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$ 1

Ομοίως $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t}$ 2

Είναι εξίσωση κύματος της μορφής $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ όπου $v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ 1

Σχόλιο:

Η ταχύτης $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \text{σταθ} = c$ 2

Β) Σε μονωτικό μέσον ισότροπο και ομογενές με διηλεκτρική σταθερά ε και μαγνητική διαπερατότητα μ, τα αντίστοιχα ε_0, μ_0 αντικαθίστανται από τα ε και μ. 2

Σε αγώγιμο μέσον, στο εσωτερικό του, το $\vec{E} = 0$, εκτός αν 1
η εναλλαγή γίνεται τόσο γρήγορα (συχνότητα τόσο μεγάλη) ώστε να μην προλαβαίνουν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να ισορροπήσουν στην επιφάνεια. Τότε συμπεριφέρεται ως μονωτής 1

Γ) $c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_p^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$. Αν $\psi = e^{i(\omega t - kx)}$ $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = +i\omega\psi$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi$ 1

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi$ 1

$\Rightarrow -c^2 k^2 \psi - \omega_p^2 \psi = -\omega^2 \psi \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$ 1

Για μεγάλα μήκη κύματος (μικρά k) η $\omega \simeq \omega_p$ 1
δηλ. διαδίδονται με τη συχνότητα πλάσματος

Για μικρά μήκη κύματος (μεγάλα k) η $\omega \simeq ck$ 1
δηλ. οι μεγάλες συχνότητες π.χ. ακτίνες x ή ακτίνες γ περνούν ανεμπόδιστες μέσα στο πλάσμα.

2) Είναι $x(t) = A_{ελ} \cos \omega t + A_{απ} \sin \omega t$ στη μόνιμη κατάσταση (όπου η ιδιοσυχνότητα του έχει ήδη αποσβεσθεί) 1 ✓

Η στιγμιαία απορροφούμενη ισχύς $P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$ 1

Η μέση $\bar{P} = \overline{\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\, dt$ 1

$$\left.\begin{aligned} F &= F_0 \cos \omega t \\ \upsilon &= -A_{ελ} \omega \sin \omega t + A_{απ} \omega \cos \omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow F \cdot \upsilon = -A_{ελ} \omega F_0 \sin \omega t \cos \omega t + A_{απ} \omega F_0 \cos^2 \omega t$$ 1

Αλλά $\int_{t=0}^{T} \sin \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \int_{x=0}^{2\pi} \sin x \, d(\sin x) = \left. \frac{\sin^2 x}{2} \right|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$ 1

και $\int_{t=0}^{T} \cos^2 \omega t \, d(\omega t) = \int_{t=0}^{T} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} d(\omega t) = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{T} d(\omega t) + \frac{1}{2} \int_{t=0}^{T} \cos(2\omega t) \frac{d(2\omega t)}{2}$

$= \frac{1}{2} \omega (T - 0) + \frac{1}{4} \int_{x=0}^{2 \cdot 2\pi} \cos x \, dx = \frac{\omega T}{2} + \frac{1}{4}(0 - 0)$ 1

Άρα $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T A_{απ} \omega F_0 \cos^2 \omega t - 0 = \frac{1}{T} A_{απ} \omega F_0 \frac{T}{2} = \frac{A_{απ} \omega F_0}{2}$ 1

Β) Είναι θεώρημα στο βιβλίο

Για N ταλαντώσεις γίνεται $y = A \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \cos\left(\omega t + (N-1)\frac{\delta}{2}\right)$ 1

Εφαρμογή στην συμβολή, στα εναλλασσόμενα ρεύματα κτλ.

Γ) Σε μια περίοδο της ταλάντωσης x γίνονται 3 περίοδοι της y. Άρα $\omega_y = 3\omega_x$ 1

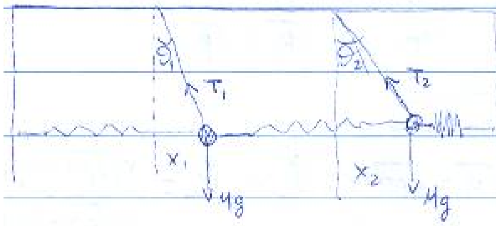
Σημ. Αποδ. του Β: $y = A\left(\cos \omega t + \cos(\omega t + \delta) + \dots \cos(\omega t + (N-1)\delta)\right)$

$= A \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \delta)} + \dots e^{i(\omega t + (N-1)\delta)}\right) = A \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1}\right)$

$= A \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} e^{i\frac{N-1}{2}\delta} \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta} - e^{-i\frac{N}{2}\delta}}{e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}}\right) = A \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right)} \frac{2i \sin \frac{N}{2}\delta}{2i \sin \frac{\delta}{2}}\right)$ 1

$= A \cos\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right) \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\cdots}$

10



Τραβάω τό ② δεξιά και τό ① παρασύρεται, και μετά αφήνω να κινηθούν. Σε τυχαία τη στιγμή (αρχική) οι δυνάμεις είναι:

1

Το ελατήριο ① τραβάει το σώμα ① προς τα αριστερά: $-kx_1$ 1

〃 〃 ② 〃 〃 〃 ① 〃 〃 δεξιά: $+k(x_2-x_1)$ 1

Η x-συνιστώσα της T_1 τραβάει το ① προς τα αριστερά: $-T_{1x}$ 1

Άρα $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2-x_1) - T_{1x}$ 1

Η y-συνιστώσα της $T_1 \approx Mg$ και $T_{1x} = T_{1y}\tan\theta \approx Mg\frac{x_1}{L}$ 1

Άρα $m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 + \frac{Mg}{L}x_1 = 0$ (A) 1

2. Το ελατήριο ② τραβάει το σώμα ② προς τα αριστερά: $-k(x_2-x_1)$

〃 〃 ③ σπρώχνει 〃 〃 ② 〃 〃 〃: $-kx_2$

Η x-συνιστώσα της T_2 τραβάει το ② 〃 〃 〃: $-T_{2x}$ 1

Άρα $m\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1) - kx_2 - T_{2x}$ 1

Ομοίως $T_{2x} \approx \frac{Mg}{L}x_2$ 1

Άρα $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 + \frac{Mg}{L}x_2 = 0$ (B) 1

Έστω $x_1 = \mathcal{X}_1\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$ και $x_2 = \mathcal{X}_2\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$

$$(A),(B) \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\left(-M\omega^2 + 2k + \frac{Mg}{L}\right)x_1 - k\,x_2 = 0 \\ &-k\,x_1 + \left(-M\omega^2 + 2k + \frac{Mg}{L}\right)x_2 = 0 \end{aligned}\right\} (\Gamma)$$

Ομογενές σύστημα έχει λύση της μορφής $x = \frac{0}{|\Delta|} \neq 0$ όταν $|\Delta| = 0$ 1

$|\Delta| = 0 \Rightarrow \left(-M\omega^2 + 2k + \frac{Mg}{L}\right)^2 - (-k)^2 = 0$ 1

$\Rightarrow -M\omega^2 + 2k + \frac{Mg}{L} = \pm k \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{M} + \frac{g}{L}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{M} + \frac{g}{L}$ 1 1

Αντικαθιστώ στο (Γ): $(\omega_1\ldots) = +k \Rightarrow kx_1 = kx_2 \Rightarrow \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ 1

$\ldots$ $R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{T\mu_1} - \sqrt{T\mu_2}}{\sqrt{T\mu_1} + \sqrt{T\mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$ 1

$Z = \mu v, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow Z = \sqrt{T\mu}$ 1

$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\overbrace{\rho \pi r^2 L}^{\text{όγκος}}}{L} = \rho \pi r^2 \Rightarrow \sqrt{\mu} = \sqrt{\rho\pi}\, r$ Άρα $R_{12} = \frac{r_1\sqrt{\rho\pi} - r_2\sqrt{\rho\pi}}{r_1\sqrt{\rho\pi} + r_2\sqrt{\rho\pi}}$ 1 1 1 1

$R_{12} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r - 1,5r}{r + 1,5r} = -\frac{1,5-1}{1,5+1} = -\frac{0,5}{2,5} = -\frac{1}{5}$ 1

$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx)$ 1

$P(t) = Z\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \sqrt{T\rho\pi}\, r \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx) \equiv P_0 \sin^2(\omega t - kx)$ 1

$\overline{P(t)} = P_0 \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - kx)\, dt = \frac{P_0}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 r \sqrt{T\rho\pi}$ 2

$\frac{P_{R_{12}}}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}(R_{12}A)^2 \omega^2 r_1 \sqrt{T\rho\pi}}{\frac{1}{2}A^2 \omega^2 r_1 \sqrt{T\rho\pi}} = R_{12}^2 = \frac{1}{25}$ 1

...πό το Δ δεν έχουμε ανάκλαση. Για να μην έχουμε ανάκλαση ...ό τό Β και Γ (1) αρκεί $Z_3 = \sqrt{Z_1 Z_2}$ και $L_3 = \frac{\lambda_3}{4}(2n+1)$ 2

$Z_3^2 = \sqrt{T\mu_3}^2 = \sqrt{T\mu_1}\sqrt{T\mu_2} \Rightarrow \mu_3 = \sqrt{\mu_1\mu_2} \Rightarrow \sqrt{\rho_3\pi}\, r_3 = \sqrt{\sqrt{\rho_1\pi\rho_2\pi}\, r_1 r_2} \Rightarrow r_3 = \sqrt{r_1 r_2}\frac{\sqrt[4]{\rho_1\rho_2}}{\sqrt{\rho_3}}$

$r_3 = r\sqrt{1,5}\frac{3}{\sqrt{8}} = r\frac{3}{4}\sqrt{3} \simeq 1,3r$

$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{2\pi\nu}{v_3} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{v_3}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{\nu}\frac{\sqrt{T}}{r_3\sqrt{\rho_3\pi}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\nu r}\sqrt{\frac{T}{3\pi\rho_3}}$ 2

$= \frac{4}{3}\frac{1}{100\,Hz}\frac{1}{0,5\times10^{-3}\,m}\sqrt{\frac{50\,N}{3\pi\, 8\, 10^{-3}\,kg/(10^{-2})^3\,m^3}} = 0,69\,m = 69\,cm$ 2

Άρα $L_3 = \frac{\lambda_3}{4}(2n+1) \Rightarrow L_3 = (2n+1)\times 17,2\,cm$ 3

...επειδή να κινεί το χέρι του 100 φορές το δευτερόλεπτο ...αδύνατον 5

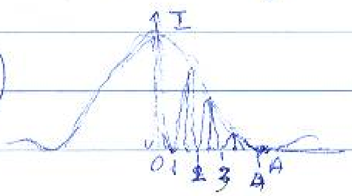
30

Θεωρία: Για να αναιρείται στο μέσον (1) η ανάκλαση στο Β από την ανάκλαση στο Γ (και περαιτέρω διάδοση από το (2) στο...

γ) Το [illegible] η κόρη [illegible] έχει [illegible]
και η περίθλαση είναι σημαντική
Από το φως του ενός φαναριού το 1° ελάχιστο (όπου πρέπει να είναι το κεντρικό μέγιστο του άλλου φαναριού για να αρχίσουν να διακρίνονται) είναι σε $\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta = 1{,}22\pi$ (το 1,22 επειδή η κόρη είναι κυκλική) $\Rightarrow \sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{b} = 1{,}22 \cdot \frac{5{,}9\times10^{-7}\,m}{3\times10^{-3}\,m} \simeq 2{,}4\times10^{-4}$

Η γωνία 10^{-4} είναι πολύ μικρή, άρα $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta = \frac{D}{L}$
όπου D το εύρος και L η απόσταση του αυτοκινήτου
Άρα $L = \frac{D}{\theta} = \frac{1{,}5\,m}{2{,}4\,10^{-4}} \sim 6\,km \qquad L = \frac{Db}{1{,}22\lambda}$ 1

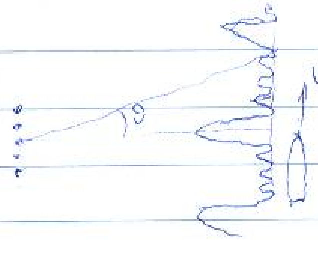
B)



Η μέσα συνάρτηση είναι το $\cos^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)$ 1
λόγω της συμβολής από τις δύο σχισμές
Η περιβάλλουσα είναι το $\left(\frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\right)^2$ από 1
την περίθλαση λόγω του εύρους a των σχισμών
Αφού υπάρχουν μέχρι το A (1° μηδενισμό της περιβάλλουσας)
3 κροσσοί εκατέρωθεν του κεντρικού, άρα το A είναι ο 4ος μηδενισμός
του $\cos^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) \Rightarrow \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta = \frac{7\pi}{2}$ 2
Και είναι ταυτόχρονα ο 1ος μηδενισμός του $\sin\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = \sin\pi \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = \pi$ $\Big\}\ \frac{b}{a}$ 2

Γ) Το φως από την πηγή μέχρι τα μάτια μας σκεδάζεται από τα μόρια του αέρα καθ' οδόν. Για ίση ακτινοβολία κόκκινου ή μπλε η μέση σκεδαζόμενη ισχύς από κάθε μόριο $\bar{P} \sim \frac{1}{\lambda^4}$.
Άρα το μεγαλύτερο μήκος κύματος (κόκκινο) σκεδάζεται λιγότερο από το μικρότερο (μπλε) (πολύ λιγότερο λόγω της 4ης δύναμης)
Άρα φθάνει μακρύτερα (ως κίνδυνος, να φαίνεται από μακριά)
2

6)



Από τις 5 κεραίες εκπέμπονται κύματα εν φάσει τα οποία συμβάλλουν. Σε κάθε σημείο που με ενδιαφέρει βρίσκω το άθροισμα κατά πλάτος και τετραγωνίζω για να βρω την ένταση.

Το άθροισμα κατά ~~μήκος~~ τη διεύθυνση της γωνίας θ είναι $\psi_0 \dfrac{\sin\left(5\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$ 2

Άρα η ένταση ~ τετράγωνο αυτού.

A) Τα κύρια μέγιστα: $\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta_M\right) = 0 = \sin(n\pi) \Rightarrow \sin\theta_M = n\frac{\lambda}{d} = \frac{n}{5}$ $n = 1, 2, \ldots$ 2

B) Τα κύρια ελάχιστα: $\sin\left(\frac{5\pi d}{\lambda}\sin\theta_{ελ}\right) = 0 = \sin(m\pi) \Rightarrow \sin\theta_{ελ} = \frac{m}{5}\frac{\lambda}{d} = \frac{m}{25}$ $m = 1, 2, \ldots$ 2

A') Τα δευτερεύοντα μέγιστα ανάμεσα στα ελάχιστα είναι περίπου (όχι ακριβώς) στο μέσον μεταξύ των ελαχίστων $\Rightarrow$ ~~$\sin\theta_\mu$~~ =

$\sin\left(\frac{5\pi d}{\lambda}\sin\theta_\mu\right) \simeq \pm 1 = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\theta_\mu \simeq \frac{m+\frac{1}{2}}{5}\frac{\lambda}{d} = \frac{m+\frac{1}{2}}{25}$ 2

Γ) Σε κύριο μέγιστο το E (ή B) είναι $\psi_0 \dfrac{\sin(5n\pi)}{\sin(n\pi)} = \dfrac{0}{0} =$ (με τον κανόνα του Hospital) $= \psi_0 \dfrac{5\cos(n\pi)}{\cos(n\pi)} = 5\psi_0$ 2

Άρα η ένταση $I \sim 25\psi_0^2 = 25 I_0$ 2

Δ) Καθώς κινείται το πλοίο παράλληλα προς τις κεραίες, σαρώνει τις υπάρχουσες αυξομειώσεις κατά μήκος της ευθείας της πορείας του (όπως φαίνονται στο σχήμα) τις οποίες αντιλαμβάνεται ως αυξομειώσεις στη λήψη του σήματος 6

20