



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φορμαλισμός BSSN στην Αριθμητική Γενική
Σχετικότητα

Γεώργιος Τακούσης

Φεβρουάριος 2025

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

Καθηγητής

Τομέας Φυσικής



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φορμαλισμός BSSN στην Αριθμητική Γενική
Σχετικότητα

Γεώργιος Τακούσης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24η Φεβρουαρίου 2025.

Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ
(Επιβλέπων)

Κούβαρης Χριστόφορος
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ
(Μέλος)

Φαράκος Φώτης
Επ. Καθηγητής ΣΕΜΦΕ
(Μέλος)

Αθήνα, Φεβρουάριος 2025

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο για την υποστήριξη που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Είμαι ευγνώμων για την επιστημονική (και όχι μόνο) καθοδήγηση, τις υποδείξεις και συμβουλές που μου παρείχε. Ο κ. Αναγνωστόπουλος ήταν από τους ανθρώπους που με ενέπνευσαν να ασχοληθώ με την υπολογιστική και θεωρητική φυσική, όντας υπόδειγμα επιστήμονα, καθηγητή και προπάντων ανθρώπου.

Ευχαριστώ όλη την οικογένεια και τους φίλους μου, ιδιαίτερα τους γονείς μου Εύα και Δημήτρη και την αδερφή μου, για την αμέριστη αγάπη και την αδιάκοπη στήριξη που μου προσφέρουν όλα αυτά τα χρόνια. Τα ερεθίσματα που μου έδωσαν ήταν καθοριστικά στην ανάπτυξη μου ως άνθρωπος αλλά και στην επιλογή μου να ασχοληθώ με τις επιστήμες.

Οφείλω να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους μου στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. που έκαναν την εμπειρία μου στη σχολή, αλλά και εκτός αυτής, ευχάριστη. Τους ευχαριστώ για όλες τις χαρούμενες στιγμές και τις εποικοδομητικές συζητήσεις περί φυσικής και όχι μόνο.

Τέλος ευχαριστώ όλους τους καθηγητές μου στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. για τη μετάδοση των γνώσεων που αποτέλεσαν βάση για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αριθμητική σχετικότητα είναι ο κλάδος της γενικής σχετικότητας που στόχο έχει την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων πεδίου του Einstein, για την υπολογιστική μελέτη χωρόχρονων που παρουσιάζουν (αστρο)φυσικό ενδιαφέρον και των οποίων η μετρική δεν υπολογίζεται με αναλυτικές μεθόδους. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, απαιτείται ένας φορμαλισμός που αναδιατυπώνει τις εξισώσεις Einstein ενός φυσικού συστήματος ώστε να λάβουν δυναμική μορφή, ξεκινώντας από τη συναλλοίωτη και υπολογιστικά μη-υλοποιήσιμη μορφή που είναι γραμμένες. Σε πρώτο στάδιο γίνεται αποσύζευξη του χρόνου από τον χώρο, μέσω του "3+1" διαχωρισμού του τετραδιάστατου χωρόχρονου σε χωροειδείς τριδιάστατες υπερεπιφάνειες και στις γραμμές του χρόνου. Μια τέτοια διαμέριση είναι πάντοτε εφικτή με την παραδοχή ότι οι χωρόχρονοι που μελετώνται είναι καθολικά υπερβολικοί. Η γεωμετρία κάθε υπερεπιφάνειας περιγράφεται από τη χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$ που επάγεται από τη Lorentzian μετρική του χωρόχρονου, και την εξωτερική καμπυλότητα $K_{\alpha\beta}$ της, οι οποίες αποτελούν τις δυναμικές μεταβλητές, ενώ το lapse α και οι συνιστώσες του shift vector β^i αποτελούν συναρτήσεις βαθμίδας που σχετίζονται με την επιλογή συντεταγμένων (διαμέρισης) και καθορίζονται από μια (αυθαίρετη) επιλογή βαθμίδας. Στα πλαίσια του 3+1 διαχωρισμού οι εξισώσεις Einstein μετασχηματίζονται στις ισοδύναμες εξισώσεις ADM-York ή 3+1 εξισώσεις, που απαρτίζονται από τις εξισώσεις των περιορισμών (Χαμιλτονιανός - ορμής) οι οποίες δεν περιέχουν χρονικές παραγώγους των δυναμικών μεταβλητών και πρέπει να ικανοποιούνται από αυτές ανά πάσα στιγμή, καθώς και τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης. Οι εξισώσεις ADM-York είναι εξέχουσας σημασίας καθότι παρέχουν το πλαίσιο για τη διατύπωση και επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Cauchy) για τις εξισώσεις Einstein. Τα αρχικά δεδομένα για το πρόβλημα Cauchy πρέπει αφενός να ικανοποιούν τις εξισώσεις των περιορισμών και αφετέρου να αποτυπώνουν το υπό μελέτη (αστρο)φυσικό σύστημα. Η κατασκευή τους γίνεται θεωρώντας μια σύμμορφη αποδόμηση των δυναμικών μεταβλητών κατά York-Lichnerowicz και έπειτα εφαρμόζοντας το λεγόμενο CTT decomposition, ή εναλλακτικά το CTS/XCTS decomposition. Γνωστά παραδείγματα αρχικών δεδομένων για συστήματα μελανών οπών χωρίς αρχική ορμή και στροφορμή είναι τα αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist και Misner, ενώ για μελανές οπές με ορμή και στροφορμή τα αρχικά δεδομένα Bowen-York. Οι εξισώσεις ADM-York χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1990 παρότι παρουσίαζαν μεγάλη αριθμητική αστάθεια, η οποία αποδίδεται στο γεγονός ότι το σύστημα των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης είναι ασθενώς υπερβολικό και μη-καλά τοποθετημένο. Οι Baumgarte, Shapiro, Shibata και Nakamura με τον ομώνυμο BSSN φορμαλισμό τροποποίησαν τις αρχικές εξισώσεις ADM-York εισάγοντας τις βοηθητικές δυναμικές μεταβλητές "Gammas" ώστε να προκύψει ένα ισχυρά υπερβολικό και άρα καλά τοποθετημένο σύστημα εξισώσεων, το οποίο να είναι υπολογιστικά ευσταθές. Ο BSSN φορμαλισμός και οι διάφορες παραλλαγές του αποτελούν σήμερα το καθιερωμένο σύστημα εξισώσεων στην αριθμητική σχετικότητα για την προσομοίωση κάθε είδους χωρόχρονου.

ABSTRACT

Numerical relativity is the branch of general relativity that aims to solve Einstein's field equations numerically on the computer, in order to study spacetimes of (astro)physical interest for which the exact metric cannot be obtained analytically. To achieve this goal, a dynamical reformulation of Einstein's equations must be employed given that, in their original covariant form, the equations cannot be solved numerically. Time and space must therefore be treated distinctly, which is achieved through the 3+1 decomposition of four-dimensional spacetime into a family of spacelike three-dimensional hypersurfaces, each labeled by a global time function and threaded by a congruence of time lines. Such a foliation can always be performed for globally hyperbolic spacetimes. The geometry of each hypersurface is described by its spatial metric $\gamma_{\alpha\beta}$ induced by the Lorentzian spacetime metric, and its extrinsic curvature $K_{\alpha\beta}$; these constitute the dynamical variables. In contrast, the lapse function α and the components of the shift vector β^i are gauge functions associated with our choice of coordinates (how our spacetime is foliated) and are determined arbitrarily by imposing gauge conditions. Within the framework of the 3+1 decomposition, Einstein's equations are recast into the ADM-York or 3+1 equations. This system of equations consists of the constraints (the Hamiltonian and momentum constraints), which do not contain time derivatives of the dynamical variables and must be satisfied at all times, as well as the evolution equations. The ADM-York equations play an important role in formulating and subsequently solving an initial value (Cauchy) problem for Einstein's equations. When constructing initial data for the Cauchy problem, one must solve the constraint equations whilst ensuring that the data obtained represent a snapshot of the physical system under consideration. The York-Lichnerowicz decomposition is used to separate the degrees of freedom that can be determined by the constraints; the dynamical variables are further decomposed by applying the CTT decomposition or its alternatives, namely the CTS/XCTS decompositions. For multiple black holes in a moment of time symmetry, commonly used initial data are provided by the Brill-Lindquist and Misner solutions, while for multiple boosted and/or spinning black holes the Bowen-York solution is employed. The ADM-York equations were implemented in 3+1 simulations up until the mid-1990s, although they exhibited significant numerical instabilities. These instabilities can be traced to the fact that the ADM-York evolution equations are only weakly hyperbolic and thus ill-posed. Baumgarte, Shapiro, Shibata, and Nakamura modified the original ADM-York equations by introducing auxiliary dynamical "Gamma" variables resulting in the so-called BSSN formalism which is a strongly hyperbolic, and hence well-posed, system of equations. Nowadays, the BSSN system and its variants are considered the de facto standard in the field of numerical relativity, for the simulation of all types of spacetimes.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	10
2	Στοιχεία Γενικής Σχετικότητας	12
2.1	Πολλαπλότητες - Manifolds	12
2.2	Διανύσματα - Vectors	15
2.3	Διαφορικές μορφές πρώτης τάξης - 1-forms	19
2.4	Τανυστές - Tensors	20
2.4.1	Συστολές δεικτών - Contractions	21
2.4.2	(Αντι-)Συμμετρικοποίηση τανυστών - (Anti-)Symmetrisation of tensors	22
2.5	Ειδική Σχετικότητα - Special Relativity	23
2.5.1	Σχετικιστική Κινηματική - Relativistic Kinematics	28
2.5.2	Σχετικιστική Δυναμική - Relativistic Dynamics	28
2.6	Μετρική - Metric	30
2.6.1	Τοπικά Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς - Local Inertial Frames	32
2.7	Αιτιακή Δομή - Causal Structure	33
2.7.1	Αιτιακή Δομή Υπερεπιφανειών - Causal Structure of Hypersurfaces	36
2.7.2	Επιφάνεια Cauchy & Υπερβολικότητα - Cauchy Surface & Hyperbolicity	37
2.8	Παράγωγος Lie - Lie Derivative	45
2.8.1	Συμμετρίες & Διανύσματα Killing - Symmetries & Killing vectors	49
2.9	Συναλλοιώτη Παράγωγος - Covariant Derivative	50
2.9.1	Σύνδεση Levi-Civita - Levi-Civita Connection	54
2.9.2	Σύμβολα Christoffel - Christoffel Symbols	56
2.9.3	Παράλληλη Μεταφορά - Parallel Transport	56
2.10	Γεωδαισιακές Καμπύλες- Geodesics	60
2.10.1	Στασιμοποίηση Ιδιόχρονου - Extremizing proper time	62
2.10.2	Λαγκρατζιανή του ελεύθερου σωματιδίου - Free particle Lagrangian	64
2.10.3	Σταθερές της Κίνησης σε Γεωδαισιακές - Constants of Geodesic motion	65
2.11	Καμπυλότητα - Curvature	67
2.11.1	Συνιστώσες του τανυστή Riemann - Components of the Riemann tensor	69
2.11.2	Γεωμετρική Ερμηνεία του τανυστή Riemann - Geometric Interpretation of the Riemann Tensor	69
2.11.3	Συμμετρίες του τανυστή Riemann - Symmetries of the Riemann Tensor	73
2.11.4	Συστολές του τανυστή Riemann - Contractions of the Riemann Tensor	74
2.12	Τανυστής Ενέργειας-Ορμής - Stress-Energy Tensor	75
2.13	Εξισώσεις πεδίου του Einstein - Einstein field equations	79
2.13.1	Επιλογή συνθηκών βαθμίδος - Fixing the Gauge	82

2.14	Χωρόχρονος Schwarzschild - Schwarzschild Spacetime	83
2.14.1	Μελανή Οπή Schwarzschild - Schwarzschild Black Hole	85
2.14.2	Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres - Kruskal-Szekeres Coordinates	90
3	Φορμαλισμός 3+1 - Χωρόχρονος στην Αριθμητική Σχετικότητα	95
3.1	Διαχωρισμός 3+1 του χωρόχρονου - 3+1 Splitting of spacetime	95
3.2	Προβολικοί τελεστές - Projection operators	102
3.3	Επαγόμενη μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$ στις Σ - Induced metric $\gamma_{\alpha\beta}$ on Σ	104
3.3.1	Διάνυσμα χρόνου, κάθετο διάνυσμα και shift σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες - Time vector, normal vector and shift in adapted coordinates	105
3.3.2	Μετρική σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες - Metric in adapted coordinates	105
3.3.3	Χωρική Συναλλοίωτη Παράγωγος - Spatial Covariant Derivative	107
3.3.4	Χωρικός τανυστής Riemann - Spatial Riemann tensor	109
3.4	Εξωγενής Καμπυλότητα - Extrinsic Curvature	111
3.5	Εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi και Ricci	114
3.5.1	Συστολές των εξισώσεων Gauss-Codazzi & Codazzi-Mainardi - Contracted Gauss- Codazzi & Codazzi-Mainardi equations	118
4	Εξισώσεις Einstein σε μορφή 3+1	120
4.1	Εξισώσεις Einstein ως πρόβλημα Cauchy - Einstein's equations as a Cauchy problem	120
4.2	Πρόβλημα Cauchy στον 3+1 φορμαλισμό - Cauchy problem in the 3+1 formalism	122
4.3	Εξισώσεις περιορισμού (δεσμοί) - Constraint equations	123
4.4	Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης - Time evolution equations	125
4.5	Εξισώσεις ADM-York - ADM-York Equations	127
4.6	Διατήρηση των περιορισμών κατά τη χρονική εξέλιξη - Conservation of constraints under the evolution equations	131
4.7	Τεχνικές χρονικής εξέλιξης - Evolution schemes	135
5	Κατασκευή Αρχικών Δεδομένων	138
5.1	Σύμμορφοι μετασχηματισμοί - Conformal transformations	140
5.2	Σύμμορφη αποδόμηση κατά York-Lichnerowicz - York-Lichnerowicz conformal de- composition	141
5.2.1	Σύμμορφη σύνδεση - Conformal connection	141
5.2.2	Σύμμορφος τανυστής Ricci & βαθμωτό Ricci - Conformal Ricci tensor & Ricci scalar	142
5.2.3	Σύμμορφη αποδόμηση της εξωτερικής καμπυλότητας - Conformal decomposi- tion of the extrinsic curvature	144
5.3	Conformal transverse-traceless (CTT) decomposition	147

5.3.1	CTT εκδοχή των περιορισμών - CTT form of the constraints	149
5.4	Αρχικά δεδομένα που περιγράφουν μελανές οπές - Black Hole Initial Data	150
5.4.1	Αρχικά δεδομένα μελανής οπής Schwarzschild - Schwarzschild black hole initial data	150
5.4.2	Αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist & Misner - Brill-Lindquist & Misner initial data	54
5.4.3	Αρχικά δεδομένα Bowen-York - Bowen-York initial data	157
5.4.4	Φυσική ερμηνεία των παραμέτρων της λύσης Bowen-York - Physical interpretation of the Bowen-York solution parameters	162
5.4.5	Λύση του Χαμιλτονιανού περιορισμού: Puncture method	164
5.5	Conformal thin-sandwich (CTS) decomposition	166
5.5.1	CTS εκδοχή των περιορισμών - CTS form of the constraints	169
5.6	Extended Conformal Thin-Sandwich (XCTS) decomposition	170
5.6.1	Εφαρμογή του XCTS: Χωρόχρονος Schwarzschild	172
6	Φορμαλισμός BSSN	175
6.1	Καλή τοποθέτηση συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων - Well-posedness of a system of partial differential equations	175
6.2	Υπερβολικότητα - Hyperbolicity	176
6.3	Φορμαλισμός BSSN των 3+1 εξισώσεων - BSSN Formulation of the 3+1 equations .	177
6.3.1	Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης - Time evolution equations	179
6.3.2	Βοηθητικές μεταβλητές "Gammas" - Auxiliary "Gamma" variables	181
6.3.3	Εξισώσεις των περιορισμών - Constraint equations	184
6.4	Εξισώσεις BSSN - The BSSN Equations	186
6.5	Ευστάθεια εξισώσεων BSSN σε υπολογιστικές προσομοιώσεις - Stability of the BSSN equations in computational implementations	189
	Appendices	194
	Appendix A Παράγωγος Lie του προβολικού τελεστή - Lie derivative of the projector	194
	Appendix B 3+1 Ανάλυση τανυστών 2ης τάξης - 3+1 Decomposition of 2nd rank tensors	196
	Appendix C Χαμιλτονιανός φορμαλισμός της γενικής σχετικότητας κατά ADM - ADM Hamiltonian formulation of GR	197
	Βιβλιογραφία	204

1

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια εισαγωγή στην αριθμητική γενική σχετικότητα (ή απλά αριθμητική σχετικότητα - numerical relativity) η οποία αποσκοπεί στην επίλυση των εξισώσεων πεδίου του Einstein μέσω υπολογιστικών μεθόδων. Η αριθμητική σχετικότητα είναι ένα εξαιρετικά ενεργό ερευνητικό πεδίο καθότι οι υπολογιστικές προσομοιώσεις καθοδηγούν τους πειραματικούς φυσικούς και αστρονόμους (π.χ. στο LIGO ή Virgo) στη μελέτη και ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων, ιδιαίτερα αυτών που εκπέμπονται από τη συγχώνευση μελανών οπών. Επιπλέον παρέχει αριθμητικές λύσεις για τη γεωμετρία (τη μετρική) σύνθετων χωρόχρονων στους οποίους λαμβάνουν χώρα ενδιαφέροντα αστροφυσικά φαινόμενα (π.χ. κοσμικός πληθωρισμός στο πρώιμο σύμπαν, black hole binaries - mergers, καταρρέοντα άστρα κτλ.), ειδικά όταν η εύρεση αναλυτικών λύσεων είναι αδύνατη, κάτι που συμβαίνει σχεδόν πάντοτε στη γενική σχετικότητα λόγω της μη-γραμμικότητας και πολυπλοκότητας των εξισώσεων Einstein.

Η ανάγκη χρήσης υπολογιστικών-αριθμητικών μεθόδων για την εύρεση λύσεων στις εξισώσεις πεδίου του Einstein αναγνωρίστηκε ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 1950 από τους J. Wheeler και J. von Neumann. Λίγα χρόνια αργότερα, τον Ιανουάριο του 1957 στο συνέδριο GR1 με θέμα "Role of Gravitation in Physics" στο πανεπιστήμιο της North Carolina, Chapel Hill, οι B. DeWitt και C. W. Misner πρότειναν επίσημα τη χρήση υπολογιστών για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων του Einstein. Ο Misner συνόψισε τη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε σε μια συνεδρίαση ως εξής:

"First we assume that you have a computing machine better than anything we have now, and many programmers and a lot of money, and you want to look at a nice pretty solution of the Einstein equations. The computer wants to know from you what are the values of $g_{\mu\nu}$ and $\partial g_{\mu\nu}/\partial t$ at some initial surface, say at $t = 0$. Now, if you don't watch out when you specify these initial conditions, then either the programmer will shoot himself or the machine will blow up. In order to avoid this calamity you must make sure that the initial conditions which you prescribe are in accord with certain differential equations in their dependence on x, y, z at the initial time. These are what are called the 'constraints'".

Με την πάροδο των χρόνων αποδείχθηκε ότι στην πράξη το εγχείρημα της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων του Einstein είναι ακόμη πιο περίπλοκο από τις αρχικές ανησυχίες που εξέφρασε ο Misner. Προκειμένου να διαφανούν οι προκλήσεις αλλά και οι δυνατότητες που διαθέτει η αριθμητική σχετικότητα, ένα μεγάλο μέρος της εργασίας αυτής επικεντρώνεται στη θεμελίωση της αριθμητικής σχετικότητας με απαρχή τον 3+1 διαχωρισμό του χωρόχρονου. Ο διαχωρισμός του χωρόχρονου σε χώρο και χρόνο οδήγησε στις πρώτες υπολογιστικά υλοποιήσιμες εξισώσεις οι οποίες εξελίχθηκαν σταδιακά στον σύγχρονο BSSN φορμαλισμό. Ο φορμαλισμός BSSN είναι ο κατ' εξοχήν πιο βελτιωμένος και διαδεδομένος φορμαλισμός που χρησιμοποιείται σήμερα στις υπολογιστικές προσομοιώσεις μιας πληθώρας διαφορετικών χωρόχρονων, οι οποίοι είτε περιέχουν ύλη-ενέργεια είτε όχι. Οφείλει το όνομά του στους Baumagte, Shapiro, Shibata και Nakamura και αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα, στα τέλη της δεκαετίας του 1990. Αποτελεί ουσιαστικά μια τροποποίηση του αρχικού ADM φορμαλισμού η οποία εξασφαλίζει βελτιωμένη αριθμητική ευστάθεια. Κώδικες που υλοποιούν τον BSSN φορμαλισμό

αξιοποιούνται κατά κόρον από ερευνητικές ομάδες που ασχολούνται με τη βαρύτητα, την κοσμολογία, τη σχετικιστική αστροφυσική και τη σχετικιστική μαγνητοϋδροδυναμική και μάλιστα διατίθενται ελεύθερα στο διαδίκτυο (βλ. *Einstein Toolkit* και *IllinoisGRMHD* του Illinois Numerical Relativity Group). Απώτερος στόχος της εργασίας αυτής είναι η επεξήγησή του, αφού πρώτα συζητηθούν οι αρχές της αριθμητικής σχετικότητας με έμφαση στην εξαγωγή των εξισώσεων ADM-York γνωστών και ως 3+1 εξισώσεων. Οι εξισώσεις ADM-York ήταν ουσιαστικά οι πρώτες που οδήγησαν στη διατύπωση των εξισώσεων Einstein υπό τη μορφή ενός υπολογιστικά υλοποιήσιμου προβλήματος αρχικών τιμών - προβλήματος Cauchy (το οποίο όπως θα δούμε ήταν μη-καλά τοποθετημένο, πράγμα που οδήγησε στην αναδιαμόρφωσή του κατά BSSN και όχι μόνο).

Ειδικότερα, η διπλωματική εργασία ακολουθεί την εξής δομή: στο **κεφάλαιο 2** γίνεται μια λεπτομερής εισαγωγή στις αρχές της γενικής σχετικότητας, όπου παρουσιάζονται βασικές έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας και αναλύεται η δομή του χωροχρόνου. Στόχος του κεφαλαίου είναι να θεμελιώσει όλα τα φυσικά μεγέθη, τους (διαφορικούς) τελεστές, τις εξισώσεις και τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται στη γενική σχετικότητα, καθότι αποτελούν βάση για τη μελέτη της αριθμητικής σχετικότητας η οποία ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια. Στο **κεφάλαιο 3** επεξηγείται ο 3+1 διαμερισμός του χωρόχρονου σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες (Cauchy) και στις γραμμές του χρόνου, που αποτελεί το πρώτο βήμα για τη δυναμική αναδιατύπωση των εξισώσεων Einstein. Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται κυρίως με τη γεωμετρία των χωροειδών επιφανειών, ορίζοντας τα μεγέθη που απαιτούνται για την περιγραφή της εσωτερικής και εξωτερικής γεωμετρίας τους και συσχετίζοντας τα μεγέθη αυτά με τις τις προβολές του τετραδιάστατου τανυστή Riemann. Στο **κεφάλαιο 4** οι γεωμετρικές σχέσεις που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 3, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, οδηγούν στις περιφημες 3+1 εξισώσεις ή εξισώσεις ADM-York οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις Einstein αλλά είναι γραμμένες στη γλώσσα του 3+1 φορμαλισμού. Οι 3+1 εξισώσεις μελετώνται από τη σκοπιά ενός προβλήματος αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) υπό περιορισμούς (constraints), οι οποίοι αποτελούν ολοκληρωτικές συνθήκες για την ενσωμάτωση των υπερεπιφανειών στον περιβάλλοντα χωρόχρονο. Το **κεφάλαιο 5** πραγματεύεται την επίλυση των περιορισμών αυτών για την κατασκευή ενός κατάλληλου συνόλου αρχικών δεδομένων, αναλόγως του αστροφυσικού συστήματος που μελετάται. Για τον σκοπό αυτό εισάγεται ένας σύμμορφος μετασχηματισμός της χωρικής μετρικής και μια αντίστοιχη σύμμορφη αποδόμηση των υπόλοιπων δυναμικών μεγεθών. Στη συνέχεια οι εξισώσεις των περιορισμών γράφονται με σύμμορφους όρους και επιλύονται για χωρόχρονους που περιέχουν συστήματα μελανών οπών. Η μελέτη των εξισώσεων της αριθμητικής σχετικότητας ολοκληρώνεται στο **κεφάλαιο 6**, όπου παρουσιάζεται το σύστημα εξισώσεων BSSN που είναι σήμερα το πιο διαδεδομένο στις προσομοιώσεις. Πραγματοποιείται μια σύντομη εισαγωγή σε έννοιες των μετρικών διαφορικών εξισώσεων όπως η υπερβολικότητα και η καλή τοποθέτηση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων, ώστε να αιτιολογηθεί η αριθμητική αστάθεια των 3+1 εξισώσεων η οποία αποδίδεται εν τέλει στην ασθενή υπερβολικότητα των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης. Εντοπίζονται οι ανεπιθύμητοι όροι που καθιστούν το σύστημα ασθενώς υπερβολικό και έπειτα επεξηγείται η διαδικασία που ακολουθείται στον BSSN φορμαλισμό ώστε να απορροφηθούν οι όροι αυτοί σε νέες δυναμικές μεταβλητές (gammas), οδηγώντας σε ένα ισχυρά υπερβολικό και άρα αριθμητικά ευσταθές σύστημα, ικανό να προσομοιώσει παντός είδους χωρόχρονους.

2

Στοιχεία Γενικής Σχετικότητας

2.1 Πολλαπλότητες - Manifolds

Η γενική σχετικότητα στηρίζεται πάνω σε βασικές ιδέες της διαφορικής γεωμετρίας. Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής ο χωρόχρονος, ο οποίος είναι εν γένει καμπυλωμένος, αντιμετωπίζεται ως μια 4-διάστατη Lorentzian διαφορίσιμη πολλαπλότητα (differentiable manifold). Προκειμένου να επεξηγήσουμε αυτή τη γεωμετρική δομή, χρειάζεται να διατυπώσουμε ορισμένες χρήσιμες μαθηματικές έννοιες.

Ορισμός 2.1: Ομοιομορφισμός (homeomorphism)

Έστω M, N δύο τοπολογικοί χώροι και $\varphi : M \rightarrow N$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση φ λέγεται ομοιομορφισμός αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. φ είναι 1-1 και επί (αντιστρέψιμη)
2. φ είναι συνεχής
3. $\varphi^{-1} : N \rightarrow M$ είναι συνεχής

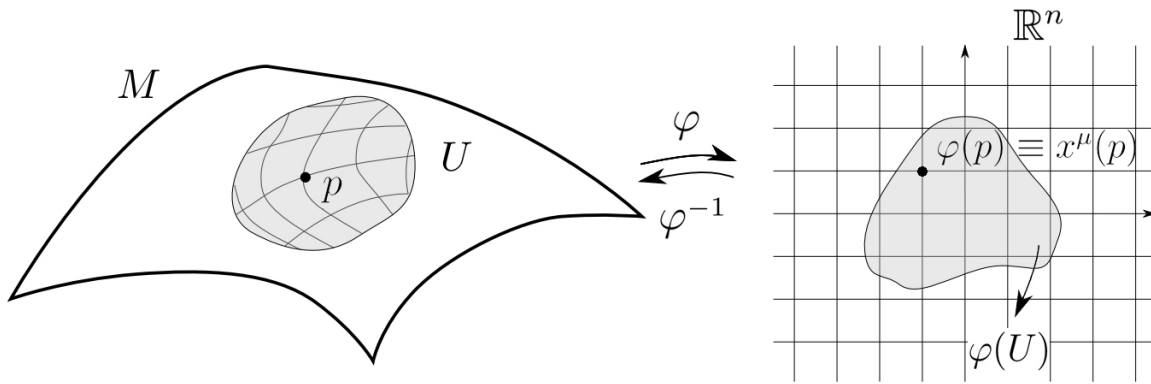
Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : M \rightarrow N$ τότε οι χώροι M και N λέγονται ομοιομορφικοί ή τοπολογικά ισοδύναμοι και αυτό συμβολίζεται γράφοντας $M \cong N$.

Χρησιμοποιώντας ομοιομορφισμούς, μπορούμε να ορίσουμε χάρτες σε έναν τοπολογικό χώρο M οι οποίοι καθιστούν τις γειτονίες γύρω από σημεία του M ομοιομορφικές με τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n . Απεικονίζουν δηλαδή με μοναδικό τρόπο σημεία του M σε σημεία του \mathbb{R}^n τα οποία, κατά τα γνωστά, ταυτοποιούνται χρησιμοποιώντας συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες αυτές, λόγω του ομοιομορφισμού, "κληρονομούνται" και από το αρχικό σημείο του M , ορίζοντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Ορισμός 2.2: Χάρτης (chart), Σύστημα συντεταγμένων, Συντεταγμένες

Έστω M ένας τοπολογικός χώρος. Ονομάζουμε n -διάστατο χάρτη (chart) του M το ζεύγος (U, φ) όπου $U \subseteq M$ ανοικτό υποσύνολο του M και φ ομοιομορφισμός με $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ όπου $\varphi(U)$ ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Ισχύει δηλαδή $U \cong \varphi(U)$.

Ο ομοιομορφισμός φ ορίζει ένα (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων στο $U \subseteq M$. Αν $p \in U$ τότε $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \equiv x^\mu(p)$ με τις πραγματικές συναρτήσεις x^1, x^2, \dots, x^n να λέγονται (τοπικές) συντεταγμένες του σημείου p στον χάρτη (U, φ) .



Σχήμα 2.1.1: Χάρτης (U, φ) όπου $U \subseteq M$ ανοιχτό υποσύνολο του χώρου M και φ ένας ομοιομορφισμός με $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Το σημείο $p \in U$ απεικονίζεται στο ομοιομορφικό του $\varphi(p) \in \varphi(U)$ και ταυτοποιείται με τις συντεταγμένες $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \equiv x^\mu(p)$.

Προκειμένου να περιγράψουμε όλα τα σημεία του τοπολογικού χώρου χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων, επεκτείνουμε την έννοια του χάρτη σε μια συλλογή χαρτών η οποία αποτελείται από ανοιχτά υποσύνολα $\{U_a\}$ (μαζί με τους αντίστοιχους ομοιομορφισμούς $\{\varphi_a\}$) που καλύπτουν όλη την έκταση του τοπολογικού χώρου. Οι χάρτες αυτοί αλληλοεπικαλύπτονται, οπότε το ίδιο σημείο του M μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικές συντεταγμένες που προέκυψαν από διαφορετικούς ομοιομορφισμούς. Η επιλογή χάρτη ισοδυναμεί με επιλογή συστήματος συντεταγμένων και είναι δυνατό να μεταφερθούμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο μέσω των απεικονίσεων μετάβασης. Αυτές δεν είναι τίποτα άλλο παρά μετασχηματισμοί συντεταγμένων (οι οποίοι αναπαρίστανται από έναν Ιακωβιανό πίνακα) που συσχετίζουν τις συντεταγμένες σημείων που ανήκουν στην τομή δύο υποσυνόλων του M .

Ορισμός 2.3: Άτλαντας (atlas), Απεικόνιση μετάβασης (transition map)

Έστω M ένας τοπολογικός χώρος και A ένα σύνολο δεικτών. Η συλλογή από n -διάστατους χάρτες του M :

$$S = \{(U_a, \varphi_a), a \in A\}$$

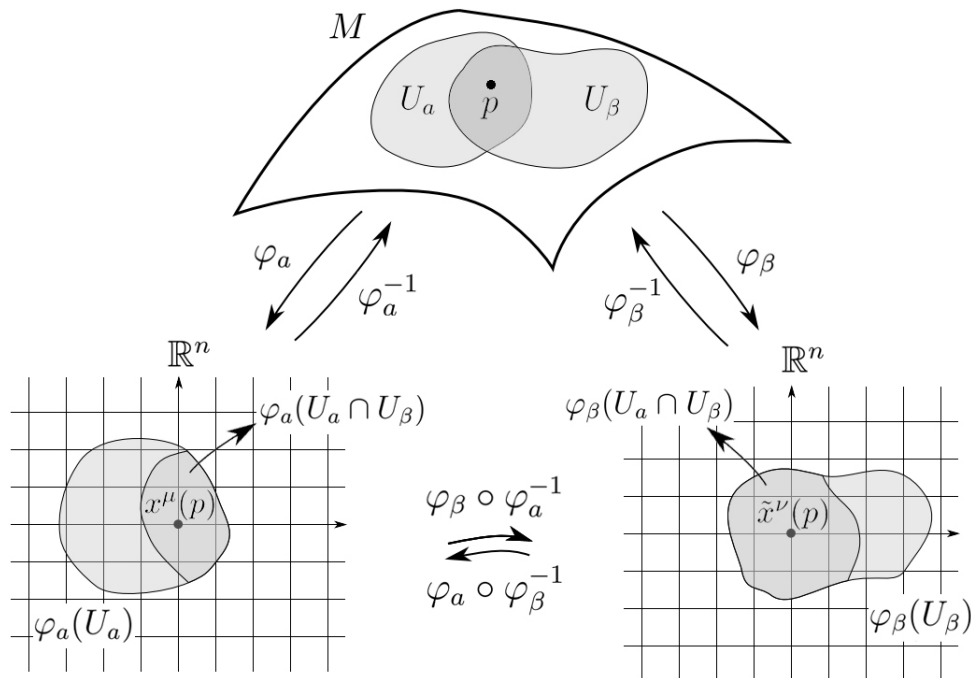
θα ονομάζεται C^r άτλαντας στον M αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $\cup_a U_a = M$ δηλαδή τα υποσύνολα $U_a \subseteq M$ καλύπτουν τον M
2. Αν $U_a \cap U_\beta \neq \emptyset$ τότε $\varphi_\beta \circ \varphi_a^{-1}$ είναι C^r διαφορίσιμες συναρτήσεις με C^r διαφορίσιμο αντίστροφο για κάθε $a, \beta \in A$. (όπου C^r η οικογένεια των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους μέχρι και r τάξης).

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι χάρτες (U_a, φ_a) και (U_β, φ_β) είναι C^r συμβατοί.

Οι ομοιομορφισμοί $\varphi_\beta \circ \varphi_a^{-1} : \varphi_a(U_a \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_a \cap U_\beta)$ λέγονται απεικονίσεις μετάβασης (transition maps) ή μετασχηματισμοί συντεταγμένων (coordinate transformations).

Αν οι $\varphi_\beta \circ \varphi_a^{-1}$ είναι απείρως διαφορίσιμες, δηλαδή C^∞ , τότε ο S είναι C^∞ άτλαντας ή αλλιώς διαφορίσιμος/λείος άτλαντας (smooth atlas) του M . Ισχύει ότι κάθε λείος άτλαντας περιέχεται σε έναν μοναδικό μεγιστικό λείο άτλαντα, όπου με τον όρο μεγιστικός εννοούμε ότι ο άτλαντας αυτός περιέχει κάθε χάρτη της M που είναι διαφορικά (C^∞) συμβατός με τον αρχικό.



Σχήμα 2.1.2: Απεικονίσεις μετάβασης $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ και $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ με πεδία ορισμού $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ και $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ αντίστοιχα. Παριστάνουν τον μετασχηματισμό συντεταγμένων ενός σημείου $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Η πρώτη απεικόνιση αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu = \tilde{x}^\nu(x^\mu)$ και η δεύτερη στον αντίστροφο $\tilde{x}^\nu \rightarrow x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$.

Ορισμός 2.4: Διαφορίσιμη Πολλαπλότητα (Differentiable manifold)

Μια n -διάστατη, διαφορίσιμη (C^∞), πραγματική πολλαπλότητα M ορίζεται ως ο τοπολογικός χώρος ο οποίος:

1. Είναι **Hausdorff**, δηλαδή διακριτά σημεία του M ανήκουν σε ξένες μεταξύ τους γειτονίες:
 $\forall p_1, p_2 \in M, p_1 \neq p_2$ υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα του M , τα $U \ni p_1$ και $V \ni p_2$, τέτοια ώστε $U \cap V = \emptyset$
2. Είναι **δεύτερος αριθμήσιμος** (second countable), έχει δηλαδή αριθμήσιμη τοπολογική βάση
3. Επιδέχεται **μεγιστικό διαφορίσιμο (C^∞) άτλαντα** (επιδέχεται δηλαδή **διαφορική δομή**)

Οι δύο πρώτες ιδιότητες του ορισμού (2.4) είναι περισσότερο τεχνικές, ώστε να αποφύγουμε ιδιαίζουσες τοπολογίες. Η τελευταία ιδιότητα είναι και η πιο σημαντική διότι κάνει την n -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M να μοιάζει τοπικά με τον \mathbb{R}^n , παρόλο που σε μεγαλύτερη κλίμακα η M μπορεί να έχει πολύ πιο πολύπλοκη τοπολογία. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με τη διαφορική δομή της πολλαπλότητας επιτρέπει να ορίσουμε στην M γεωμετρικά αντικείμενα όπως διανύσματα, 1-forms και ταυσιές.

Συνοψίζοντας, οι σημαντικές ιδιότητες που έχει μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι:

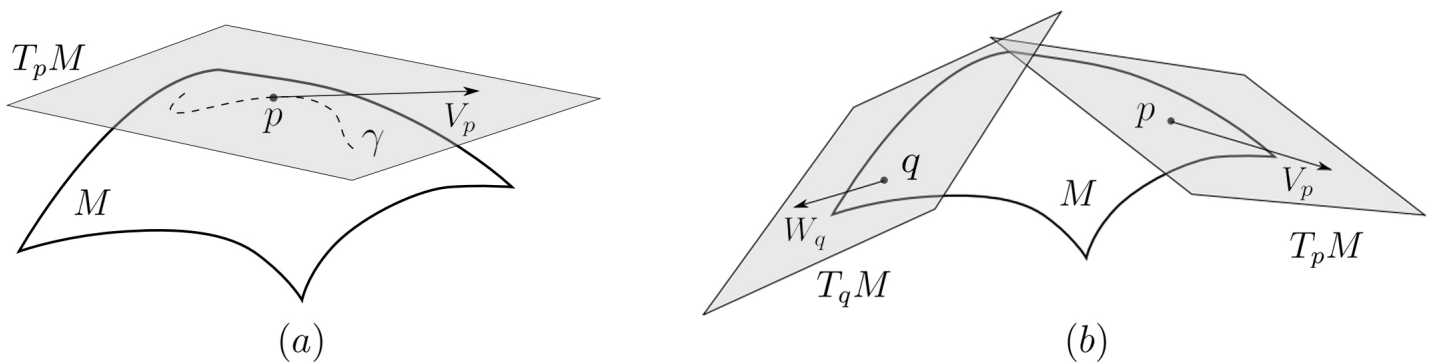
- (A) Κάθε σημείο $p \in M$ ανήκει σε ένα τουλάχιστον ανοιχτό υποσύνολο $U_\alpha \subseteq M$ το οποίο απεικονίζεται μέσω του ομοιομορφισμού φ_α σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$.

(B) Αν δύο υποσύνολα δεν είναι ξένα $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση μετάβασης $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ παριστάνει μια διαφορίσιμη (C^∞) συνάρτηση που συνδέει τα σημεία του συνόλου $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ με τα σημεία του $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \varphi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$

Ένα εγγενές λοιπόν κομμάτι της γενικής σχετικότητας είναι η **ελευθερία στην επιλογή συντεταγμένων** (coordinate freedom) που απορρέει από το γεγονός ότι τα σημεία της διαφορίσιμης πολλαπλότητας ανήκουν σε περισσότερους από έναν χάρτες.

2.2 Διανύσματα - Vectors

Τα διανύσματα είναι γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται πάντα σε ένα συγκεκριμένο σημείο p μιας n -διάστατης διαφορίσιμης πολλαπλότητας M . Ζουν στον λεγόμενο εφαπτόμενο χώρο (tangent space) της M στο σημείο p ο οποίος έχει επίσης διάσταση n και συμβολίζεται $T_p M$. Οι εφαπτόμενοι χώροι $T_p M$ και $T_q M$ δύο διαφορετικών σημείων $p \neq q$ της M είναι διαφορετικοί διανυσματικοί χώροι οπότε δεν υπάρχει φυσικός τρόπος με τον οποίο να συγκρίνουμε διανύσματα που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Η συλλογή όλων των εφαπτόμενων χώρων όλων των σημείων της πολλαπλότητας M ονομάζεται εφαπτόμενη δέσμη (tangent bundle) με σύμβολο TM .



Σχήμα 2.2.1: (a) Εφαπτόμενο διάνυσμα V_p στην καμπύλη γ στο σημείο της p . Το V_p ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$. (b) Οι εφαπτόμενοι χώροι $T_p M$ και $T_q M$ σε δύο διαφορετικά σημεία $p \neq q$ της πολλαπλότητας είναι διαφορετικοί άρα δεν υπάρχει νόημα στο να ορίσουμε πράξεις ανάμεσα στα αντίστοιχα διανύσματα V_p και W_q .

Ορισμός 2.5: Διάνυσμα (vector)

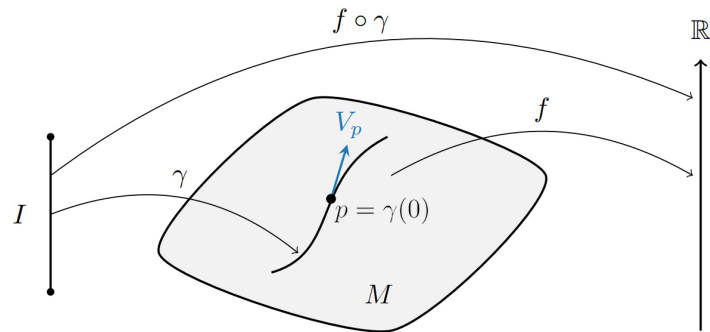
Διάνυσμα (vector) είναι ένας τελεστής ο οποίος όταν δράσει σε κάποια λεία βαθμωτή συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, με $f \in C^\infty(M) \equiv \mathcal{F}(M)$, δίνει την παράγωγό της κατά μήκος μιας λείας καμπύλης $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ σε ένα σημείο p πάνω στην καμπύλη. Αν η καμπύλη παραμετροποιείται από τη μεταβλητή $t \in I$ με $\gamma(t) \in M$ και $p = \gamma(0)$, τότε το διάνυσμα V_p ορίζεται:

$$V_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad V_p(f) = \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \gamma)(t)] \right|_p = \left. \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \right|_{t=0} \quad (2.2.1)$$

Η σύνθεση $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ο **περιορισμός της συνάρτησης f πάνω στην καμπύλη γ** .

Το V_p λέγεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** στην καμπύλη γ στο σημείο p . Εξ' ορισμού το V_p είναι μια "παραγωγήση" (derivative), διαθέτει δηλαδή τις εξής δύο ιδιότητες:

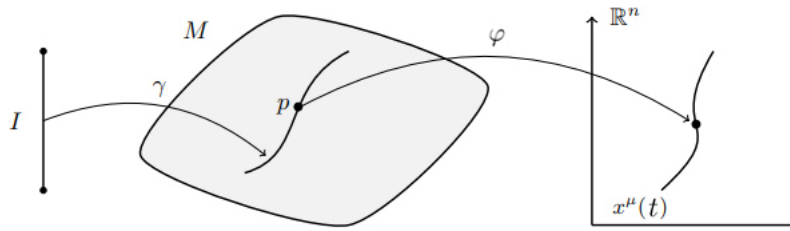
1. Γραμμικότητα (Linearity): $V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g)$ με $f, g \in \mathcal{F}(M)$ και $a, b = \text{const}$
2. Κανόνας Leibniz (Leibnizarity): $V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$



Σχήμα 2.2.2: Λεία καμπύλη $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ με παράμετρο t και λεία πραγματική συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Η σύνθεση $(f \circ \gamma)(t)$ δίνει τις τιμές της f κατά μήκος της γ και η παράγωγός της ως προς t υπολογισμένη στο σημείο $p = \gamma(0)$ αναπαρίσταται από το διάνυσμα $V_p(f)$.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^1, x^2, \dots, x^n) που καθορίζεται από έναν ομοιομορφισμό φ , μπορούμε να περιγράψουμε την καμπύλη γ μέσω παραμετρικών εξισώσεων, δηλαδή μιας n -άδας συντεταγμένων όπου κάθε μία είναι συνάρτηση της παραμέτρου t :

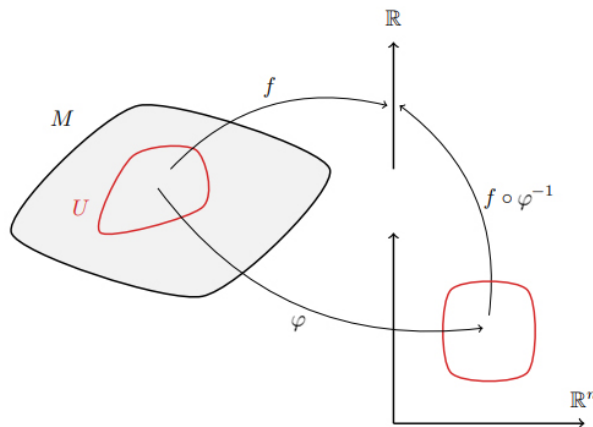
$$(\varphi \circ \gamma)(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \equiv x^\mu(t) \tag{2.2.2}$$



Σχήμα 2.2.3: Μέσω του ομοιομορφισμού φ η λεία καμπύλη $\gamma : I \rightarrow M$ αναπαρίσταται από τις παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων $(\varphi \circ \gamma)(t) \equiv x^\mu(t)$.

Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε την f ως συνάρτηση των συντεταγμένων, με πεδίο ορισμού στον \mathbb{R}^n :

$$(f \circ \varphi^{-1})(x^\nu) \equiv f(x^\nu) \tag{2.2.3}$$



Σχήμα 2.2.4: Μέσω του ομοιομορφισμού φ η συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ γράφεται ως συνάρτηση των συντεταγμένων $(f \circ \varphi^{-1})(x^\nu) \equiv f(x^\nu)$.

Επομένως γράφουμε:

$$V_p(f) = \frac{d}{dt} [(f \circ \gamma)(t)] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{(f \circ \varphi^{-1})}_{f(x^\nu)} \circ \underbrace{\varphi \circ \gamma}_{x^\mu(t)}(t) \right] \Big|_{t=0} = \frac{\partial f(x^\nu)}{\partial x^\mu} \Big|_{x^\nu(0)} \frac{dx^\mu(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.2.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα παραγωγίσης σύνθετων συναρτήσεων, υπονοώντας ότι ισχύει η σύμβαση Einstein που προνοεί άθροιση των άνω και κάτω επαναλαμβανόμενων δεικτών. Η πιο πάνω σχέση ισχύει για κάθε αυθαίρετη συνάρτηση f οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$V_p = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \frac{d}{dt} \Big|_p \quad (2.2.5)$$

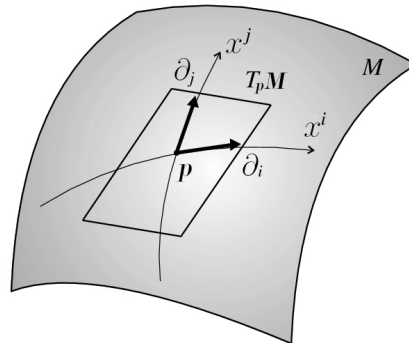
όπου

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.2.6)$$

είναι ο τελεστής κατευθυνόμενης παραγωγίσης (directional derivative operator) κατά μήκος της $\gamma(t)$. Με άλλα λόγια, το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p μιας καμπύλης $\gamma(t)$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο τελεστής της κατευθυνόμενης παράγωγου κατά μήκος της $\gamma(t)$, στο σημείο p .

Αποδεικνύεται ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι κατά μήκος όλων των καμπυλών που διέρχονται από ένα σημείο $p \in M$ συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο, τον οποίο ταυτοποιούμε με τον $T_p M$. Αφότου επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων (x^1, \dots, x^n) , παρατηρούμε από την (2.2.5) ότι οι τελεστές μερικής παραγωγίσης $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \equiv \partial_\mu \Big|_p$ σχηματίζουν βάση για τον $T_p M$. Τα διανύσματα ∂_μ λέγονται coordinate vectors και η αντίστοιχη βάση $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$ που δημιουργούν καλείται coordinate basis ή holonomic basis. Ουσιαστικά οι τελεστές μερικής παραγωγίσης είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα - τελεστές κατευθυνόμενης παραγωγίσης κατά μήκος των γραμμών των συντεταγμένων (coordinate lines), που είναι καμπύλες στις οποίες μια συγκεκριμένη συντεταγμένη μεταβάλλεται και χρησιμοποιείται ως παράμετρος ενώ οι υπόλοιπες μένουν σταθερές. Πράγματι, η ∂_κ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην coordinate line με παράμετρο τη συντεταγμένη $x^\kappa = t$ ενώ $x^\mu = const, \mu \neq \kappa$ δηλαδή στην καμπύλη $(x^1, \dots, x^{\kappa-1}, t, x^{\kappa+1}, \dots, x^n)$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx^\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\kappa \partial_\mu = \partial_\kappa \quad (2.2.7)$$



Σχήμα 2.2.5: Οι τελεστές μερικής παραγωγίσης ∂_μ ως coordinate vectors του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$.

Γενικεύουμε αυτά τα συμπεράσματα για διανυσματικά πεδία V (tensor fields) τα οποία απεικονίζουν οποιοδήποτε σημείο $p \in M$ στο αντίστοιχο διάνυσμα V_p . Δηλαδή αν f μια λεία συνάρτηση το διανυσματικό πεδίο V ορίζεται $V(f) : p \rightarrow V_p(f)$. Συνεπώς:

$$V = \frac{d}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \frac{dx^\mu}{dt} \partial_\mu \quad (2.2.8)$$

Δεδομένου λοιπόν ενός συστήματος συντεταγμένων (x^1, x^2, \dots, x^n) οι συνιστώσες (components) του διανυσματικού πεδίου V ως προς τη βάση διανυσμάτων $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$ είναι $V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$. Έτσι το V εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στη βάση αυτή σαν ο γραμμικός συνδυασμός:

$$V = V^\mu \partial_\mu \quad (2.2.9)$$

Η καμπύλη $\gamma(t)$ της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο p είναι το V_p καλείται **ολοκληρωτική καμπύλη** του διανυσματικού πεδίου V . Αν $x^\mu(t)$ η παραμετρική μορφή της ολοκληρωτικής καμπύλης και V^μ γνωστά, τότε η ολοκληρωτική καμπύλη προκύπτει από την επίλυση του (αυτόνομου) συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d}{dt} x^\mu(t) = V^\mu(x^\kappa(t)) \quad (2.2.10)$$

Δεδομένου κάποιου αρχικού σημείου p_0 με συντεταγμένες $x_{p_0}^\mu$ από το οποίο διέρχεται η καμπύλη για $t = 0$, δηλαδή $x^\mu(0) = x_{p_0}^\mu$, η (2.2.10) έχει μοναδική λύση, την $\gamma_{p_0}(t)$. Αν δεν προσδιορίσουμε αρχικές συνθήκες, λαμβάνουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια - **congruence** ολοκληρωτικών καμπυλών που δεν τέμνονται και γεμίζουν την περιοχή της πολλαπλότητας στην οποία ορίζεται το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο.

Μετασχηματισμός συνιστωσών διανύσματος

Εφόσον τα διανύσματα είναι γεωμετρικά αντικείμενα, δεν αλλάζουν κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Αλλάζουν όμως οι συνιστώσες τους διότι αλλάζουν τα διανύσματα βάσης. Συγκεκριμένα, κάτω από την αλλαγή συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu(x^\mu)$ τα διανύσματα της νέας βάσης $\{\tilde{e}_\nu\} = \{\tilde{\partial}_\nu\}$ σχετίζονται με αυτά της παλιάς $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$ μέσω της παρακάτω σχέσης, που προκύπτει από τον κανόνα αλυσίδας (chain rule):

$$\tilde{\partial}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\mu \quad (2.2.11)$$

Η αναλλοιώτητα του V ($V = V^\mu \partial_\mu = \tilde{V}^\nu \tilde{\partial}_\nu$) κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων οδηγεί στην κάτωθι σχέση που συνδέει τις συνιστώσες του V στη νέα βάση \tilde{V}^ν με τις συνιστώσες στην παλιά βάση V^μ :

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (2.2.12)$$

Το αντικείμενο $\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}$ στη σχέση (2.2.12) αναπαρίσταται από έναν $n \times n$ πίνακα που έχει ως στοιχεία τις μερικές παραγώγους των νέων συντεταγμένων ως προς τις παλιές και ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας. Ο πίνακας $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \right)^{-1}$ που εμφανίζεται στη (2.2.11) είναι ο αντίστροφος του Ιακωβιανού πίνακα.

2.3 Διαφορικές μορφές πρώτης τάξης - 1-forms

Τα δυϊκά (dual) γεωμετρικά αντικείμενα των διανυσμάτων λέγονται διαφορικές μορφές 1ης τάξης ή 1-forms ή συνδιανύσματα (covectors). Ορίζονται σε ένα συγκεκριμένο σημείο p και σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο που ονομάζεται συνεφαπτόμενος χώρος (cotangent space) με σύμβολο T_p^*M , ο οποίος είναι δυϊκός στον εφαπτόμενο χώρο T_pM και ίδιας διάστασης μ' αυτόν. Φορμαλιστικά, τα 1-forms ω είναι γραμμικές απεικονίσεις που δρουν σε ένα διάνυσμα V και δίνουν ένα πραγματικό αριθμό:

$$\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R} \quad (2.3.1)$$

Έστω $\{e_\mu\}$ μια βάση διανυσμάτων του χώρου T_pM και $\{\theta^\nu\}$ η δυϊκή της βάση, δηλαδή η βάση των 1-forms του χώρου T_p^*M . Η δυϊκή βάση ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\theta^\nu(e_\mu) = \delta^\nu_\mu \quad (2.3.2)$$

Το 1-form ω γράφεται με μοναδικό τρόπο στη βάση $\{\theta^\nu\}$ ως ο γραμμικός συνδυασμός:

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu \quad (2.3.3)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί ω_μ είναι οι συνιστώσες του ω στη βάση $\{\theta^\nu\}$ και σύμφωνα με την (2.3.2) προκύπτουν από τη δράση του 1-form στα αντίστοιχα διανύσματα βάσης e_μ του T_pM :

$$\omega(e_\mu) = \omega_\nu \theta^\nu(e_\mu) = \omega_\nu \delta^\nu_\mu = \omega_\mu \quad (2.3.4)$$

Το **διαφορικό**/κλίση (differential ή gradient) df μιας λείας συνάρτησης $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $p \in M$, είναι επίσης ένα 1-form δηλαδή $df : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ άρα $df \in T_p^*M$. Η δράση του df σε ένα διάνυσμα $V \in T_pM$ ορίζεται:

$$df(V) = V(f) = \frac{df}{dt} \quad (2.3.5)$$

όπου t η παράμετρος της καμπύλης στην οποία το V είναι εφαπτόμενο. Αν λοιπόν έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (x^1, x^2, \dots, x^n) στη γειτονιά του p , μπορούμε να επιλέξουμε ως συνάρτηση κάποια συγκεκριμένη συντεταγμένη $f = x^\kappa$ και να εξετάσουμε πως δρα το διαφορικό της σε ένα coordinate vector $e_\mu = \partial_\mu$ του T_pM :

$$dx^\kappa(\partial_\mu) = \partial_\mu(x^\kappa) = \delta^\kappa_\mu \quad (2.3.6)$$

Επομένως τα διαφορικά των συντεταγμένων ικανοποιούν τη συνθήκη δυϊκότητας (2.3.2). Έτσι το σύνολο $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\} \equiv \{dx^\nu\}$ αποτελεί βάση των 1-forms η οποία είναι δυϊκή στην $\{\partial_\mu\}$ γι' αυτό λέγεται dual coordinate basis. Οπότε ένα 1-form ω γράφεται σ' αυτή τη βάση:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (2.3.7)$$

Σημείωση: Η δυϊκότητα $\{e_\mu\} \leftrightarrow \{\theta^\mu\}$ (ή $\{\partial_\mu\} \leftrightarrow \{dx^\mu\}$ για την coordinate basis) συνεπάγεται ότι τα διανύσματα μπορούν να ειπωθούν ως απεικονίσεις $V : T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$ που δρουν σε 1-forms. Υπό αυτή την έννοια ισχύει, κατ' αναλογία με την (2.3.2), ότι:

$$e_\mu(\theta^\nu) = \delta_\mu^\nu \quad (2.3.8)$$

Βάσει του πιο πάνω ορισμού:

$$V(\omega) = \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R} \quad (2.3.9)$$

Μετασχηματισμός συνιστωσών 1-form

Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu(x^\mu)$, τα 1-forms της βάσης μετασχηματίζονται ως:

$$d\tilde{x}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.3.10)$$

Εφόσον το ω μένει αναλλοίωτο, εξάγουμε ότι οι συνιστώσες του στη νέα βάση γράφονται:

$$\tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \omega_\mu \quad (2.3.11)$$

2.4 Τανυστές - Tensors

Ένας τανυστής τάξης (r, s) ή $\binom{r}{s}$ όπου $r, s \in \mathbb{N}_0$ ορίζεται ως το γεωμετρικό αντικείμενο που δρα πάνω σε r 1-forms και s διανύσματα και δίνει έναν πραγματικό αριθμό. Φορμαλιστικά, ορίζεται ως η πιο κάτω πλειογραμμική (multilinear) απεικόνιση:

$$T : \underbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_r \times \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_s \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad T(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1, \dots, V_s) \in \mathbb{R} \quad (2.4.1)$$

Με άλλα λόγια, ένας τανυστής T τάξης (r, s) δέχεται σαν όρισμα r το πλήθος 1-forms $\omega_1, \dots, \omega_r$ και s το πλήθος διανύσματα V_1, \dots, V_s και τα απεικονίζει στον πραγματικό αριθμό $T(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1, \dots, V_s)$. Οι τανυστές τάξης (r, s) στο σημείο p δημιουργούν έναν διανυσματικό χώρο που συμβολίζεται $T_p^{(r,s)}M$ και έχει διάσταση n^{r+s} με $n = \dim M$.

Σημείωση: Τα διανύσματα αποτελούν παράδειγμα τανυστή τάξης $(1, 0)$ ενώ τα 1-forms είναι τανυστές τάξης $(0, 1)$. Τα βαθμωτά μεγέθη (scalars) είναι τανυστές τάξης $(0, 0)$.

Δεδομένης μιας βάσης $\{e_\mu\}$ του χώρου T_pM των διανυσμάτων και μιας βάσης $\{\theta^\mu\}$ του χώρου T_p^*M των 1-forms, οι συνιστώσες του τανυστή T ως προς αυτές τις βάσεις ορίζονται:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T(\theta^{\mu_1}, \dots, \theta^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_s}) \quad (2.4.2)$$

Σημείωση: Τανυστές τάξης $(r, 0)$ λέγονται ανταλλοίωτοι (contravariant) τανυστές r -τάξης και οι συνιστώσες τους έχουν μόνο άνω δείκτες, ενώ τανυστές τάξης $(0, s)$ λέγονται συναλλοίωτοι (covariant) τανυστές s -τάξης και έχουν μόνο κάτω δείκτες. Ο αριθμός των άνω (contravariant) δεικτών που έχουν οι συνιστώσες είναι ο αριθμός των 1-forms, ενώ ο αριθμός των κάτω (covariant) δεικτών είναι ο αριθμός των διανυσμάτων, που δέχεται στο όρισμά του ο τανυστής.

Ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει από τη δράση του T είναι:

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1, \dots, V_s) &= T(\omega_{\mu_1} \theta^{\mu_1}, \dots, \omega_{\mu_r} \theta^{\mu_r}, V^{\nu_1} e_{\nu_1}, \dots, V^{\nu_s} e_{\nu_s}) \\ &= \omega_{\mu_1} \dots \omega_{\mu_r} V^{\nu_1} \dots V^{\nu_s} T(\theta^{\mu_1}, \dots, \theta^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_s}) \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \omega_{\mu_1} \dots \omega_{\mu_r} V^{\nu_1} \dots V^{\nu_s} \end{aligned}$$

Αν S είναι τανυστής τάξης (k, l) και T τανυστής τάξης (r, s) τότε το τανυστικό τους γινόμενο $S \otimes T$ ορίζεται ως ο τανυστής τάξης $(k + r, l + s)$ με:

$$(S \otimes T)(\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_{k+r}, V_1, \dots, V_l, \dots, V_{l+s}) = S(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_l)T(\omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+r}, V_{l+1}, \dots, V_{l+s}) \quad (2.4.3)$$

Η βάση του T τάξης (r, s) σχηματίζεται από το τανυστικό γινόμενο (συμβ. \otimes) r στοιχείων της βάσης του $T_p M$ και s στοιχείων της δυικής της, δηλαδή της βάσης του $T_p^* M$. Συνήθως οι βάσεις αυτές είναι η coordinate basis $\{\partial_\mu\}$ των διανυσμάτων και η δυική της $\{dx^\mu\}$ των 1-forms οπότε ο T γράφεται:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \quad (2.4.4)$$

Μετασχηματισμός συνιστωσών τανυστή τάξης (r, s)

Έστω $\{\partial_\mu\}$, $\{\tilde{\partial}_\nu\}$ δύο βάσεις του $T_p M$ και $\{dx^\mu\}$, $\{d\tilde{x}^\nu\}$ οι αντίστοιχες δυικές τους βάσεις στον $T_p^* M$. Κάτω από την αλλαγή συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu(x^\mu)$ οι συνιστώσες του τανυστή T μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial \tilde{x}^{\beta_s}} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (2.4.5)$$

2.4.1 Συστολές δεικτών - Contractions

Δεδομένου ενός τανυστή T τάξης (r, s) μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν νέο τανυστή S τάξης $(r - 1, s - 1)$ συστέλλοντας δύο δείκτες του αρχικού. Η συστολή (contraction) ισοδυναμεί με την αντικατάσταση του k -οστού ($k = 1, \dots, r$) 1-form στο όρισμα του T με το 1-form βάσης θ^μ ενώ ταυτόχρονα το l -οστό διάνυσμα ($l = 1, \dots, s$) αντικαθίσταται από το αντίστοιχο δυικό διάνυσμα βάσης e_μ . Για παράδειγμα, το contraction του πρώτου 1-form με το πρώτο διάνυσμα στο όρισμα ενός τανυστή T τάξης $(3, 2)$ δίνει έναν καινούργιο τανυστή S τάξης $(2, 1)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$S(\omega, \eta, V) = T(\theta^\mu, \omega, \eta, e_\mu, V) \quad (2.4.6)$$

και η πιο πάνω σχέση ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων αφού $T(\tilde{\theta}^\mu, \omega, \eta, \tilde{e}_\mu, V) = T(\theta^\mu, \omega, \eta, e_\mu, V)$.

Με όρους συνιστωσών, ο ορισμός του contraction συνεπάγεται ότι ο k -οστός άνω δείκτης εξισώνεται με τον l -οστό κάτω δείκτη οπότε νοείται άθροιση στον επαναλαμβανόμενο άνω και κάτω δείκτη. Στο παράδειγμά μας, οι συνιστώσες του S προκύπτουν θέτοντας τον πρώτο άνω δείκτη και τον πρώτο κάτω δείκτη των συνιστωσών του T ίσους με μ και αφού ο μ επαναλαμβάνεται, αθροίζουμε στο εύρος τιμών του $\mu = 1, \dots, n$ όπου $n = \dim M$:

$$S^{\alpha\beta}_{\gamma} = T^{\mu\alpha\beta}_{\mu\gamma} = T^{1\alpha\beta}_{1\gamma} + T^{2\alpha\beta}_{2\gamma} + \dots + T^{n\alpha\beta}_{n\gamma} \quad (2.4.7)$$

Σημείωση: Η θέση του δείκτη που αθροίζεται έχει σημασία, καθώς το τανυστικό γινόμενο δεν υπακούει στην αντιμεταθετική ιδιότητα. Γενικά δηλαδή:

$$S(\omega, \eta, V) = T(\theta^\mu, \omega, \eta, e_\mu, V) \neq T(\omega, \eta, \theta^\mu, e_\mu, V) = R(\omega, \eta, V) \quad (2.4.8)$$

Με όρους δεικτών η πιο πάνω σχέση διατυπώνεται: $S^{\alpha\beta}_{\gamma} = T^{\mu\alpha\beta}_{\mu\gamma} \neq T^{\alpha\beta\mu}_{\mu\gamma} = R^{\alpha\beta}_{\gamma}$.

Σημείωση: Η συστολή των δύο δεικτών T^μ_ν ενός τανυστή τάξης (1,1) δίνει έναν πραγματικό αριθμό που συμβολίζεται T και ονομάζεται **ίχνος (trace)** του τανυστή.

$$T \equiv T^\lambda_\lambda \quad (2.4.9)$$

2.4.2 (Αντι-)Συμμετρικοποίηση τανυστών - (Anti-)Symmetrisation of tensors

Ένας τανυστής τάξης (r, s) είναι **συμμετρικός (symmetric)** / **αντισυμμετρικός (antisymmetric)** στον k -οστό και l -οστό άνω (contravariant) δείκτη του αν κάτω από την εναλλαγή των δύο αυτών δεικτών οι συνιστώσες του παραμένουν ίδιες / παίρνουν ένα πρόσημο $(-)$:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \beta \mu_{l+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \beta \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \alpha \mu_{l+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \Rightarrow T \text{ συμμετρικός} \quad (2.4.10)$$

$$T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \beta \mu_{l+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = -T^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \beta \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \alpha \mu_{l+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \Rightarrow T \text{ αντισυμμετρικός} \quad (2.4.11)$$

Ομοίως ορίζουμε έναν τανυστή (αντι)συμμετρικό στον k -οστό και l -οστό κάτω (covariant) δείκτη.

Σημείωση: Αν ο τανυστής παραμένει ίδιος κάτω από την εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο δεικτών (ίδιου τύπου - και οι 2 άνω ή και οι 2 κάτω) τότε λέγεται **πλήρως συμμετρικός (totally symmetric)**. Αν ο τανυστής παίρνει πρόσημο $(-)$ κάτω από την εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο δεικτών (ίδιου τύπου) τότε λέγεται **πλήρως αντισυμμετρικός (totally antisymmetric)** π.χ. Levi-Civita symbol ε_{ijk} .

Μπορούμε να συμμετρικοποιήσουμε έναν γενικό τανυστή ως προς ένα υποσύνολο n δεικτών του (ίδιου τύπου) αθροίζοντας τις συνιστώσες που προκύπτουν από όλες τις δυνατές μεταθέσεις των συγκεκριμένων δεικτών και διαιρώντας με το πλήθος $n!$ των μεταθέσεων. Οι δείκτες που συμμετρικοποιούνται μπαίνουν σε παρένθεση $()$. Για παράδειγμα:

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad (2.4.12)$$

$$T^{(\mu\nu\rho)}_\sigma = \frac{1}{3!}(T^{\mu\nu\rho}_\sigma + T^{\rho\mu\nu}_\sigma + T^{\nu\rho\mu}_\sigma + T^{\nu\mu\rho}_\sigma + T^{\rho\nu\mu}_\sigma + T^{\mu\rho\nu}_\sigma) \quad (2.4.13)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αντισυμμετρικοποιήσουμε έναν τανυστή, όπου τώρα στο άθροισμα οι άρτιες μεταθέσεις δεικτών έχουν θετικό πρόσημο ενώ οι περιττές αρνητικό. Οι δείκτες που αντισυμμετρικοποιούνται μπαίνουν σε αγκύλη $[]$. Για παράδειγμα:

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (2.4.14)$$

$$T^\mu_{[\nu\rho\sigma]\lambda} = \frac{1}{3!}(T^\mu_{\nu\rho\sigma\lambda} + T^\mu_{\sigma\nu\rho\lambda} + T^\mu_{\rho\sigma\nu\lambda} - T^\mu_{\rho\nu\sigma\lambda} - T^\mu_{\sigma\rho\nu\lambda} - T^\mu_{\nu\sigma\rho\lambda}) \quad (2.4.15)$$

Αν οι δείκτες που επιθυμούμε να (αντι)συμμετρικοποιήσουμε δεν βρίσκονται ο ένας δίπλα στον άλλο, τοποθετούμε τους δείκτες που εξαιρούνται από την (αντι)συμμετρικοποίηση ανάμεσα σε δύο κατακόρυφες γραμμές. Λόγου χάρη:

$$T^\mu_{[\nu|\rho|\sigma]} = \frac{1}{2!}(T^\mu_{\nu\rho\sigma} - T^\mu_{\sigma\rho\nu}) \quad (2.4.16)$$

Σημείωση: Το contraction του ζεύγους συμμετρικών δεικτών ενός τανυστή με το ζεύγος αντισυμμετρικών δεικτών ενός άλλου τανυστή δίνει αποτέλεσμα μηδέν. Δηλαδή $T^{(\mu\nu)}S_{[\mu\nu]} = 0$.

2.5 Ειδική Σχετικότητα - Special Relativity

Η ειδική σχετικότητα (special relativity) είναι μια θεωρία που εισήγαγε ο A. Einstein το 1905 βασισμένος στο γεγονός ότι οι Εξισώσεις του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτες κατά τη μετάβαση από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο. Είναι χρήσιμο να αναλυθεί καθότι σε μια αρκούντως μικρή περιοχή γύρω από οποιοδήποτε σημείο του χωρόχρονου, είναι δυνατό να θεωρήσουμε έναν παρατηρητή Lorentz που εκτελεί ελεύθερη πτώση, για τον οποίο τοπικά οι νόμοι της φυσικής λαμβάνουν τη μορφή που προβλέπει η ειδική σχετικότητα.

Οι νόμοι της ειδικής σχετικότητας ισχύουν μόνο για μια ειδική κατηγορία συστημάτων αναφοράς - παρατηρητών που λέγονται **αδρανειακά συστήματα αναφοράς (inertial frames of reference) ή αδρανειακοί παρατηρητές**. Αδρανειακά συστήματα είναι εκείνα ως προς τα οποία ένα ελεύθερο σώμα (σώμα στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη εξωτερική δύναμη) παραμένει ακίνητο ή κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Με άλλα λόγια τα αδρανειακά συστήματα είναι μη-επιταχυνόμενα συστήματα στα οποία ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα της κλασικής μηχανικής. Αν υπάρχει ένα τέτοιο σύστημα τότε υπάρχουν άπειρα, τα οποία κινούνται με σταθερές σχετικές ταχύτητες μεταξύ τους.

Οι δύο βασικές υποθέσεις-αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι:

Αξιώματα (Postulates) Ειδικής Σχετικότητας

1. **Παγκοσμιότητα της ταχύτητας του φωτός (Einstein):** "Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς."

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας του φωτός είναι σταθερό και ανεξάρτητο από την κίνηση της πηγής που το εκπέμπει και του αδρανειακού παρατηρητή που το λαμβάνει. Η ακριβής τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό είναι $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

2. **Αρχή της σχετικότητας (Galileo-Einstein):** "Οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και εκφράζονται με τις ίδιες μαθηματικές σχέσεις."

Πανομοιότυπα πειράματα που εκτελούνται από διαφορετικούς αδρανειακούς παρατηρητές δίνουν τα ίδια αποτελέσματα, έτσι είναι αδύνατο κάποιος αδρανειακός παρατηρητής να καθορίσει αν είναι ακίνητος ή κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι ο χωρόχρονος στην ειδική σχετικότητα είναι ισοτροπικός και ομογενής και δεν υπάρχει κάποιος "προνομιακός-απόλυτος" παρατηρητής ως προς τον οποίο να ορίζονται με απόλυτο τρόπο ο χρόνος, οι θέσεις και οι ταχύτητες των σωμάτων.

Στο εξής για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιούμε φυσικές μονάδες, στις οποίες η ταχύτητα του φωτός τίθεται ίση με τη μονάδα, οπότε ο χρόνος αποκτά διαστάσεις μήκους ($1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$):

$$c = 1 \quad (2.5.1)$$

Ο χωρόχρονος στην ειδική σχετικότητα ο μοντελοποιείται από έναν επίπεδο (χωρίς καμπυλότητα και άρα χωρίς βαρύτητα) τετραδιάστατο διανυσματικό χώρο στον οποίο δεν υπάρχει ύλη και ενέργεια, που ονομάζεται **χωρόχρονος Minkowski** και συχνά συμβολίζεται $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{3+1}$.

Ορισμός 2.6: Χωρόχρονος Minkowski

Ο χωρόχρονος Minkowski, που συμβολίζεται με (\mathcal{M}, η) , ορίζεται ως η διαφορίσιμη πολλαπλότητα $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ εφοδιασμένη με τη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (καρτεσιανό σύστημα: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$).

Ο χωρόχρονος Minkowski συνδυάζει τις τρεις χωρικές συντεταγμένες $\{x^i\} = \{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$ (σε καρτεσιανό σύστημα) του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 με τη μία διάσταση του χρόνου $x^0 = t \in \mathbb{R}$ σε μια ενιαία, συνεχή δομή (spacetime continuum). Ένας τέτοιος χώρος χαρακτηρίζεται ως ψευδο-Ευκλείδειος διότι η μετρική είναι $\eta_{\mu\nu}$ και όχι αυτή του τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου $\delta_{\mu\nu}$. Φορμαλιστικά, ο χωρόχρονος Minkowski αποτελεί το απλούστερο παράδειγμα μιας τετραδιάστατης Λορεντζιανής διαφορίσιμης πολλαπλότητας, καθώς η μετρική έχει υπογραφή $(3, 1)$ και ακολουθεί τη σύμβαση προσήμου $(-, +, +, +)$. Σε κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $n \geq 2$ με υπογραφή του τύπου $(n - 1, 1)$ ή ισοδύναμα $(1, n - 1)$, μπορεί να οριστεί τοπικά (βάσει του θεωρήματος 2.1) και ενδεχομένως καθολικά, όπως στην περίπτωση του χωρόχρονου Minkowski, αιτιακή δομή.

Με βάση τα πιο πάνω, ένα σημείο P που ανήκει στον χωρόχρονο ορίζει ένα **γεγονός/συμβάν** και περιγράφεται από τέσσερις μεταβλητές $\{x^\mu\} = \{t, x, y, z\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ που για τον χωρόχρονο Minkowski λέγονται παγκόσμιες αδρανειακές συντεταγμένες (global inertial coordinates), οπότε γράφουμε $P \equiv P(t, x, y, z)$. Οι συντεταγμένες $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ενός γεγονότος μπορούν να καταχωρηθούν ως συνιστώσες σε ένα αντικείμενο 4 συνιστωσών που λέγεται **τετραδιάνυσμα θέσης** με συνιστώσες x^μ . Η εξέλιξη ενός γεγονότος ή ισοδύναμα η αλληλουχία χωροχρονικών σημείων που διαγράφει ένα σωματίδιο, αναπαρίσταται γενικά με μία καμπύλη στον χωρόχρονο, η οποία ονομάζεται **κοσμική γραμμή** (worldline). Η κοσμική γραμμή εκφράζεται συνήθως σε παραμετρική μορφή, όπου κάθε σημείο της $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την τιμή της παραμέτρου λ .

Θεωρούμε τώρα δύο αδρανειακά συστήματα/παρατηρητές O και O' των οποίων οι άξονες είναι παράλληλοι και οι αρχές τους $(0, 0, 0)$ συμπίπτουν την κοινή χρονική στιγμή $t = t' = 0$. Ο τονούμενος παρατηρητής O' κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ ως προς τον O . Έστω ένα γεγονός P το οποίο στο αδρανειακό σύστημα O εκφράζεται με τις χωροχρονικές συντεταγμένες (t, x, y, z) ενώ στο O' με (t', x', y', z') . Σύμφωνα με τα αξιώματα (1) & (2) προκύπτουν οι ακόλουθες γραμμικές σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ των συντεταγμένων που αποδίδει ο κάθε παρατηρητής στο P , γνωστές ως **μετασχηματισμοί Lorentz**:

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{2.5.2}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{2.5.3}$$

$$y' = y \tag{2.5.4}$$

$$z' = z \tag{2.5.5}$$

όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ ο παράγοντας Lorentz. Θεωρώντας τις συντεταγμένες ενός γεγονότος ως συνιστώσες του τετραδιανύσματος θέσης x^μ όπου $\mu = 0, 1, 2, 3$ μπορούμε να γράψουμε τον μετασχηματισμό Lorentz σε συμπαγή πινακοποιημένη μορφή. Αν ο παρατηρητής O καταγράφει τετραδιάνυσμα x^μ ενώ ο O' καταγράφει x'^μ τότε ο μετασχηματισμός Lorentz μεταξύ τους γράφεται:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.5.6}$$

όπου $\Lambda^\mu{}_\nu$ τα στοιχεία του συμμετρικού πίνακα Λ που αναπαριστά προωθήσεις Lorentz (Lorentz boost

matrix). Η σχέση (2.5.6) είναι μια ιδιότητα που ικανοποιούν εξ' ορισμού όλα τα τετραδιανύσματα. Θεωρώντας ότι η κίνηση του O' γίνεται κατά τον άξονα x ο πίνακας Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.7)$$

Ένας γενικός μετασχηματισμός Lorentz περιλαμβάνει προωθήσεις (boosts) σε τυχαία διεύθυνση $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ όπου \vec{v} η σχετική ταχύτητα του O' ως προς τον O , καθώς και περιστροφές (rotations) γύρω από τους τρεις άξονες του χώρου. Για ευκολία, θέτουμε $v_i = \tanh \varphi_i$ (φ_i η ωκύτητα-rapidity στον x^i άξονα) έτσι ο Λ γράφεται ως γινόμενο πινάκων προωθήσεων και (αριστερόστροφων) περιστροφών:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_x & -\sinh \varphi_x & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_x & \cosh \varphi_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi_y & 0 & -\sinh \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_y & 0 & \cosh \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi_z & 0 & 0 & -\sinh \varphi_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \varphi_z & 0 & 0 & \cosh \varphi_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ 0 & \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.8)$$

Αναλυτικότερα, ο πίνακας Lorentz Λ των προωθήσεων και περιστροφών ανήκει σε μια ομάδα Lie που λέγεται ομάδα Lorentz και είναι υποομάδα της ομάδας Poincaré. Ισχύει δηλαδή $\Lambda \in O(3, 1)$, με την ιδιότητα:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \Leftrightarrow \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (2.5.9)$$

Το **διάστημα (interval)** ανάμεσα σε δύο γεγονότα P_1 και P_2 που απέχουν χρονικά κατά $\Delta t = t_2 - t_1$ και χωρικά κατά $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ στις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα, ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.5.10)$$

όπου $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική Minkowski και $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Σε διαφορική μορφή, η πιο πάνω σχέση ορίζει το στοιχείο μήκους του χωρόχρονου Minkowski που εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο απειροστά κοντινών γεγονότων:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5.11)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Lorentz (2.5.6) τις συντεταγμένες προκύπτει, με χρήση της (2.5.9), ότι η τιμή του διαστήματος είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 \quad (2.5.12)$$

Όλοι δηλαδή οι αδρανειακοί παρατηρητές των οποίων οι συντεταγμένες συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού Lorentz συμφωνούν στην αριθμητική τιμή που υπολογίζουν για το $(\Delta s)^2 \equiv \Delta s^2$, η οποία μπορεί να είναι θετική, μηδέν ή αρνητική. Η αναλλοιώτητα του διαστήματος επιτρέπει να ορίσουμε αιτιακή δομή ανάμεσα στα γεγονότα:

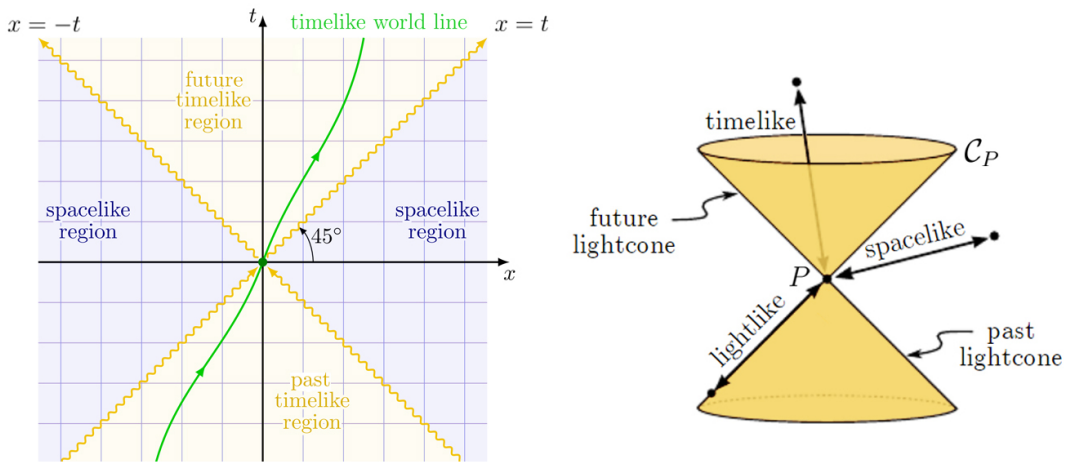
1. $\Delta s^2 < 0$: **Χρονοειδές** (timelike) διάστημα. Δύο χρονοειδώς χωρισμένα γεγονότα P_1, P_2 μπορούν να επικοινωνήσουν και να επηρεάσουν το ένα το άλλο μέσω σωματιδίου με μάζα (αιτιακά συνδεδεμένα). Υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς όπου τα γεγονότα P_1 και P_2 συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο.

2. $\Delta s^2 = 0$: **Φωτοειδές** (lightlike/null) διάστημα. Δύο φωτοειδώς χωρισμένα γεγονότα P_1, P_2 μπορούν να επικοινωνήσουν και να επηρεάσουν το ένα το άλλο με μια ακτίνα φωτός (αιτιακά συνδεδεμένα).
3. $\Delta s^2 > 0$: **Χωροειδές** (spacelike) διάστημα. Δύο χωροειδώς χωρισμένα γεγονότα P_1, P_2 δεν μπορούν να επικοινωνήσουν ούτε να επηρεάσουν το ένα το άλλο (αιτιακά ασύνδετα). Υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς όπου τα γεγονότα P_1 και P_2 συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Ο **κώνος φωτός** C_P ενός σημείου/γεγονότος P ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των γεγονότων που είναι φωτοειδώς χωρισμένα από το P τα οποία σχηματίζουν μία τρισδιάστατη κωνική υπερεπιφάνεια με κορυφή το P στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Δηλαδή, οι γενέτειρες του κώνου φωτός ενός γεγονότος είναι οι φωτεινές ακτίνες (φωτοειδείς κοσμικές γραμμές) που ξεκινούν από το γεγονός μία δεδομένη χρονική στιγμή. Στην πραγματικότητα ο κώνος φωτός είναι ένας διπλός κώνος, που αποτελείται από τον μελλοντικό κώνο φωτός ο οποίος δείχνει προς την κατεύθυνση όπου η χρονική συντεταγμένη αυξάνεται (δημιουργείται από φωτεινές ακτίνες που εξέρχονται από το P) και τον συμμετρικό του που δείχνει προς την αντίθετη κατεύθυνση και λέγεται παρελθοντικός κώνος φωτός (δημιουργείται από φωτεινές ακτίνες που συγκλίνουν στο P). Σημεία που είναι χρονοειδώς χωρισμένα από το P κείτονται εντός του κώνου φωτός, σημεία που είναι χωροειδώς χωρισμένα από το P εκτός του κώνου φωτός (και άρα απροσπέλαστα) ενώ σημεία που είναι φωτοειδώς χωρισμένα από το P βρίσκονται εξ' ορισμού πάνω στον κώνο φωτός. Συνάγουμε λοιπόν ότι ο κώνος φωτός ενός γεγονότος οριοθετεί τις περιοχές του χωρόχρονου που επηρεάζουν (βρίσκονται στο αιτιακό παρελθόν) και επηρεάζονται (βρίσκονται στο αιτιακό μέλλον) από το γεγονός και τις ξεχωρίζει από τις αιτιακά ασύνδετες περιοχές που δεν έχουν επιρροή στο γεγονός.

Τα γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στον χωροχρόνο αναπαρίστανται ως σημεία του λεγόμενου χωροχρονικού διαγράμματος Minkowski στο οποίο παριστάνεται επίσης η κίνηση των σωματιδίων μέσω καμπυλών-κοσμικών γραμμών. Στο χωροχρονικό διάγραμμα Minkowski (t, x) (οι διαστάσεις y, z δεν σχεδιάζονται) οι φωτεινές ακτίνες ταξιδεύουν σε ευθείες με κλίση ± 1 άρα οι γενέτειρες του κώνου σχηματίζουν γωνία $\pm 45^\circ$ με την κατακόρυφο:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm 1 \tag{2.5.13}$$



Σχήμα 2.5.1: Χωροχρονικό διάγραμμα Minkowski (t, x) , όπου απεικονίζεται ο κώνος φωτός C_P του γεγονότος P ο οποίος αποτελείται από τον μελλοντικό και παρελθοντικό κώνο φωτός. Σημεία στο εσωτερικό του κώνου φωτός είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα με το P , σημεία στο εξωτερικό του είναι χωροειδώς χωρισμένα με το P και δεν επικοινωνούν μαζί του ενώ σημεία επί του κώνου είναι φωτοειδώς χωρισμένα με το P .

Ο **ιδιόχρονος** τ (proper time) μετρά το μήκος μιας χρονοειδούς καμπύλης, είναι δηλαδή ο χρόνος που μετράει το ρολόι ενός σωματιδίου που ταξιδεύει πάνω σε μια χρονοειδή κοσμική γραμμή (wristwatch time) ή ισοδύναμα ο χρόνος που μετράει ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται μαζί με το σωματίδιο και βλέπει όλα τα σημεία/γεγονότα που διατρέχει το σωματίδιο να συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο (ως προς αυτόν το σωματίδιο ηρεμεί, γι' αυτό ο ιδιόχρονος είναι επίσης γνωστός ως χρόνος ηρεμίας). Ο απειροστός ιδιόχρονος $d\tau$ που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο απειροστά κοντινά γεγονότα ισούται με τον συντεταγμένο χρόνο dt_{REST} που καταγράφεται στο σύστημα ηρεμίας, όπου τα γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση ($dx = dy = dz = 0$):

$$d\tau^2 = dt_{REST}^2 \quad (2.5.14)$$

Εφόσον στο σύστημα ηρεμίας $dt_{REST}^2 = -ds^2$ και το ds^2 είναι ίδιο σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, έπεται ότι και ο ιδιόχρονος είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα. Μπορούμε επομένως να δώσουμε έναν ορισμό του ιδιόχρονου που είναι εμφανώς ανεξάρτητος του παρατηρητή. Συγκεκριμένα, ο απειροστός ιδιόχρονος $d\tau^2$ ισούται με μείον το στοιχείο μήκους $ds^2 < 0$ δύο γειτονικών χρονοειδώς χωρισμένων σημείων:

$$d\tau^2 = -ds^2 \quad (2.5.15)$$

Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί μια χρονοειδή κοσμική γραμμή με αρχή το γεγονός A και πέρας το γεγονός B . Ο ιδιόχρονος που μετράει το σωματίδιο ανάμεσα στα γεγονότα A, B στο δικό του σύστημα αναφοράς - σύστημα ηρεμίας είναι τ_{AB} . Ως προς ένα αδρανειακό σύστημα με συντεταγμένες (t, x, y, z) που βλέπει το σωματίδιο να κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα γεγονότα A, B είναι t_{AB} .

$$\begin{aligned} \tau_{AB} &= \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \int_A^B \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \vec{u}(t)^2} \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Η πιο πάνω σχέση γράφεται ως σχέση διαφορικών ως:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{u}(t)^2} = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad (2.5.17)$$

Αν η σχετική ταχύτητα \vec{u} του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς είναι σταθερή, τότε:

$$\tau_{AB} = \frac{1}{\gamma} \int_{t_A}^{t_B} dt = \frac{t_{AB}}{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad t_{AB} = \gamma \tau_{AB} \quad (2.5.18)$$

Συνεπώς ο χρόνος t_{AB} ανάμεσα σε δύο γεγονότα όπως μετράται από έναν παρατηρητή που βλέπει το σύστημα ηρεμίας των γεγονότων να κινείται, είναι μεγαλύτερος από τον ιδιόχρονο τ_{AB} που μετράει το σύστημα ηρεμίας κατά έναν παράγοντα $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{u}^2}} > 1$. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **διαστολή του χρόνου** (time dilation).

2.5.1 Σχετικιστική Κινηματική - Relativistic Kinematics

Η **τετραταχύτητα** U ενός σωματιδίου με μάζα έχει συνιστώσες u^μ και ορίζεται ως η παράγωγος του τετραδιανύσματος θέσης $x^\mu = x^\mu(\tau)$ ως προς τον ιδιόχρονο που καταγράφει το σωματίδιο:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.5.19)$$

Σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς (t, x, y, z) μπορούμε να εκφράσουμε την τετραταχύτητα συναρτήσει του συνηθισμένου τρι-διανύσματος ταχύτητας $u^i = dx^i/dt$, $i = 1, 2, 3$ που έχει το σωματίδιο στο σύστημα αυτό. Ο χρόνος dt που καταγράφει το σύστημα αναφοράς συνδέεται με τον ιδιόχρονο του σωματιδίου μέσω της σχέσης διαστολής του χρόνου: $dt = \gamma d\tau$ όπου $\gamma \equiv \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{u}^2}}$ με $\vec{u}^2 = (u^x)^2 + (u^y)^2 + (u^z)^2$ το μέτρο της τρι-ταχύτητας του σωματιδίου. Άρα έχουμε:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \gamma(1, u^x, u^y, u^z) = (\gamma, \gamma \vec{u}) \quad (2.5.20)$$

Το τετράγωνο του μέτρου της τετραταχύτητας προκύπτει σταθερό:

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} \stackrel{2.5.15}{=} -1 \quad (2.5.21)$$

Αυτή είναι η σχέση κανονικοποίησης της τετραταχύτητας που αναφέρει ότι εξ' ορισμού η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου με μάζα είναι ένα μοναδιαίο χρονοειδές τετραδιάνυσμα.

Η **τετραεπιτάχυνση** A ενός σωματιδίου με μάζα έχει συνιστώσες α^μ και ορίζεται ως η παράγωγος της τετραταχύτητας ως προς τον ιδιόχρονο που καταγράφει το σωματίδιο:

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (2.5.22)$$

Από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας είναι εύκολο να δειχθεί ότι η τετραεπιτάχυνση είναι κάθετη (ορθογώνια) στην τετραταχύτητα: $\alpha^\mu u_\mu = 0$. Σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς (t, x, y, z) μπορούμε να εκφράσουμε την τετραεπιτάχυνση συναρτήσει της τρι-ταχύτητας \vec{u} και της τρι-επιτάχυνσης $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ που έχει το σωματίδιο στο σύστημα αυτό. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $d\gamma/dt = \gamma^3 \vec{u} \cdot \vec{a}$ λαμβάνουμε:

$$\alpha^\mu = (\gamma^4 \vec{u} \cdot \vec{a}, \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{u}) \quad (2.5.23)$$

2.5.2 Σχετικιστική Δυναμική - Relativistic Dynamics

Η σχετικιστική μηχανική στην ειδική σχετικότητα διέπεται από έναν νόμο κίνησης που αποτελεί τη σχετικιστική γενίκευση του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα στην κλασική μηχανική. Σωματίδιο μάζας (ηρεμίας) m που στο σύστημα ηρεμίας του δέχεται τετραδύναμη f (γνωστή και ως δύναμη Minkowski) έχει εξίσωση κίνησης που δίνεται από την σχετικιστικά αναλλοίωτη εκδοχή του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα:

$$f^\mu = m\alpha^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d(mu^\mu)}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (2.5.24)$$

Στην παραπάνω σχέση ορίσαμε την **τετραορμή** p του σωματιδίου ως το τετραδιάνυσμα με συνιστώσες:

$$p^\mu = mu^\mu \quad (2.5.25)$$

Σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς (t, x, y, z) ως προς το οποίο το σωματίδιο έχει ταχύτητα \vec{u} και υπενθυμίζοντας ότι $\gamma \equiv \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, η τετραορμή έχει συνιστώσες:

$$p^\mu = (m\gamma, m\gamma\vec{u}) \equiv (E, \vec{p}) \quad (2.5.26)$$

Η p^0 συνιστώσα της τετραορμής αντιστοιχεί στην **ολική σχετικιστική ενέργεια** (ή απλά ενέργεια) E του σωματιδίου στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που θεωρήσαμε, η οποία ορίζεται:

$$E = m\gamma \quad (2.5.27)$$

Σημείωση: Παρατηρητής (όχι κατ' ανάγκη αδρανειακός) που βρίσκεται στο σημείο O με τετραταχύτητα v^μ μετράει την ενέργεια του σωματιδίου, που βρίσκεται στο σημείο A και έχει τετραορμή p^μ , ως:

$$E_{obs} = -p^\mu(A)v_\mu(O) = -\eta_{\mu\nu}p^\mu(A)v^\nu(O) \quad (2.5.28)$$

Επιπλέον, η **σχετικιστική κινητική ενέργεια** K του σωματιδίου μάζας m κινούμενου με ταχύτητα \vec{u} ορίζεται ως η ολική σχετικιστική ενέργεια E μείον την ενέργεια ηρεμίας $E_0 = m$ (ενέργεια ενός ακίνητου σώματος, δηλαδή $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \gamma = 1$):

$$K = E - m = m\gamma - m = m(\gamma - 1) \quad (2.5.29)$$

Ακόμη, η p^i συνιστώσα της τετραορμής αντιστοιχεί στην i -συνιστώσα της **σχετικιστικής ορμής** \vec{p} του σωματιδίου στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που θεωρήσαμε, η οποία ορίζεται:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{u} \quad (2.5.30)$$

Η σχέση ενέργειας-ορμής συνδέει την ολική ενέργεια E με τη σχετικιστική ορμή \vec{p} καθώς και τη μάζα (ηρεμίας) m ενός σωματιδίου. Προκύπτει άμεσα από την κανονικοποίηση της τετραορμής του σωματιδίου:

$$\left. \begin{aligned} p^\mu p_\mu &= m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 \\ p^\mu p_\mu &= \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + (p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2 = -E^2 + \vec{p}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \quad (2.5.31)$$

Είναι συνήθως χρησιμότερο να διατυπώσουμε τον σχετικιστικό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (2.5.24) σε ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα (t, x, y, z) ως προς το οποίο το σωματίδιο έχει ταχύτητα \vec{u} , αντί στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου. Στο σύστημα αυτό το σωματίδιο έχει σχετικιστική διανυσματική ορμή \vec{p} και δέχεται συνηθισμένη (διανυσματική) δύναμη \vec{F} , οπότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα συσχετίζει τον ρυθμό μεταβολής της \vec{p} με τη δύναμη \vec{F} που ασκείται στο σωματίδιο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.5.32)$$

Στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς η τετραδύναμη εκφράζεται συναρτήσει της ταχύτητας \vec{u} και της (τρι)δύναμης \vec{F} ως εξής:

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \left(\gamma \frac{dE}{dt}, \gamma \vec{F} \right) = (\gamma \vec{F} \cdot \vec{u}, \gamma \vec{F}) \quad (2.5.33)$$

Στην ειδική σχετικότητα, όταν ένα σύστημα σωματιδίων είναι απομονωμένο ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η τετραδύναμη που δέχεται το σύστημα σωματιδίων μηδενίζεται στο σύστημα αυτό

αλλά και κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ο λόγος είναι ότι στο σύστημα δεν εξασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, άρα η τετραδύναμη στο σύστημα μηδενίζεται ταυτοτικά: $f = 0$. Ως εκ τούτου, η συνολική τετραορμή p_{tot} του συστήματος διατηρείται σε κάθε αδρανειακό σύστημα:

$$(p_{tot})_i = (p_{tot})_f \quad (2.5.34)$$

Από τον ορισμό της τετραορμής, είναι φανερό πως η διατήρηση της ολικής τετραορμής ενός συστήματος είναι ισοδύναμη με τη διατήρηση της ολικής σχετικιστικής ορμής \vec{p}_{tot} του συστήματος καθώς και της ολικής σχετικιστικής του ενέργειας E_{tot} . Ο νόμος διατήρησης της σχετικιστικής ορμής ($d\vec{p}_{tot}/dt = 0$) και ενέργειας ($dE_{tot}/dt = 0$) ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

$$(p_{tot})_i = (p_{tot})_f \Rightarrow \begin{cases} (E_{tot})_i = (E_{tot})_f \\ (\vec{p}_{tot})_i = (\vec{p}_{tot})_f \end{cases} \quad (2.5.35)$$

2.6 Μετρική - Metric

Η μετρική είναι μια επιπρόσθετη δομή με την οποία εφοδιάζεται μια πολλαπλότητα η οποία περιγράφει τη γεωμετρία της. Παρέχει έναν τρόπο για τη μέτρηση αποστάσεων ανάμεσα σε δύο σημεία της πολλαπλότητας και κατ' επέκταση εμβαδών, όγκων, γωνιών μεταξύ διανυσμάτων κτλ. Κύριος στόχος της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι ο υπολογισμός της μετρικής του χωρόχρονου, δεδομένης της ύλης και ενέργειας που περιέχει, με επίλυση των εξισώσεων του Einstein.

Ορισμός 2.7: Μετρική (Metric)

Ο μετρικός τανυστής ή απλά μετρική, είναι ένας τανυστής τάξης $(0, 2)$ ο οποίος δρα σε ένα ζεύγος διανυσμάτων V, W που ορίζονται στο σημείο $p \in M$ και δίνει έναν πραγματικό αριθμό, το λεγόμενο **εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο** των δύο διανυσμάτων:

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.6.1)$$

με

$$g_p(V, W) = g_p(\partial_\mu, \partial_\nu) V^\mu W^\nu = g_{\mu\nu}(x^\kappa(p)) V^\mu W^\nu \in \mathbb{R} \quad (2.6.2)$$

Επιλέγοντας ως βάση τη δυική coordinate basis η μετρική στο σημείο $p \in M$ γράφεται:

$$g_p = g_{\mu\nu}(x^\kappa(p)) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.6.3)$$

Η μετρική σε pseudo-Riemannian πολλαπλότητες διαθέτει τις εξής δύο ιδιότητες:

1. **Συμμετρική:** $g(V, W) = g(W, V) \quad \forall V, W \in T_p M$ δηλαδή $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
2. **Μη-ιδιάζουσα:** Αν $g(V, W) = 0 \quad \forall W \in T_p M$ τότε $V = 0$ δηλαδή $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$

Σημείωση: Δύο διανύσματα V, W λέγονται ορθογώνια αν το εσωτερικό τους γινόμενο μηδενίζεται:

$$g(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = 0$$

Σημείωση: Το εσωτερικό γινόμενο $g(V, W)$ δύο διανυσμάτων συμβολίζεται επίσης με $\langle V, W \rangle$ ή $V \cdot W$.

Με τη βοήθεια της μετρικής υπολογίζουμε το στοιχείο μήκους, το οποίο ορίζεται ως η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικά σημεία x^κ και $x^\kappa + dx^\kappa$ που βρίσκονται απειροστά κοντά μεταξύ τους:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.6.4)$$

Επιπλέον, το στοιχείο όγκου dV σε μια n -διάστατη πολλαπλότητα δίνεται από τη σχέση:

$$dV = |\det(g_{\mu\nu})|^{1/2} dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad (2.6.5)$$

Η μετρική μας επιτρέπει επίσης να προσδιορίσουμε το μήκος μια καμπύλης που συνδέει δύο σημεία p και q . Έστω λεία καμπύλη $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ όπου $\gamma(a) = p$ και $\gamma(b) = q$ η οποία έχει εφαπτόμενο διάνυσμα V . Το μήκος της καμπύλης με αρχή το p και πέρασ το q δίνεται από τον τύπο:

$$s = \int_a^b dt \sqrt{|g(V, V)|_{\gamma(t)}} = \int_a^b dt \sqrt{|g_{\mu\nu}(\gamma(t)) V^\mu(t) V^\nu(t)|} \quad (2.6.6)$$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η καμπύλη παραμετροποιείται με την παράμετρο $t \in (a, b)$ και περιγράφεται από τις συντεταγμένες $\gamma(t) \equiv x^\mu(t)$, το εφαπτόμενο διάνυσμα έχει συνιστώσες $V^\mu = \frac{dx^\mu(t)}{dt}$ οπότε το μήκος της καμπύλης γράφεται:

$$s = \int_a^b dt \sqrt{\left| g_{\mu\nu}(x^\alpha(t)) \frac{dx^\mu(t)}{dt} \frac{dx^\nu(t)}{dt} \right|} \quad (2.6.7)$$

Τα στοιχεία της μετρικής γράφονται ως συναρτήσεις των συντεταγμένων που επιλέξαμε. Ωστόσο το πλήθος των θετικών (p), αρνητικών (q) και μηδενικών (r) ιδιοτιμών της μετρικής δεν εξαρτάται από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων (**Sylvester's law**) και ονομάζεται **υπογραφή** (signature) της μετρικής. Συμβολίζεται με (p, q, r) και υπακούει στον περιορισμό $p + q + r = n = \dim M$.

Αν όλες οι ιδιοτιμές της μετρικής είναι θετικές, δηλαδή $p = n$ και άρα $q = r = 0$, τότε η μετρική καθώς επίσης και η αντίστοιχη πολλαπλότητα λέγονται **Riemannian**. Αν χαλαρώσουμε την παραπάνω συνθήκη ώστε η μετρική να είναι απλώς μη-ιδιάζουσα, δηλαδή $r = 0$, τότε η υπογραφή γράφεται $(p, n - p)$ και η μετρική αλλά και η αντίστοιχη πολλαπλότητα ονομάζονται **pseudo-Riemannian**. Στη γενική σχετικότητα ενδιαφέρον παρουσιάζει μια υποκατηγορία των pseudo-Riemannian πολλαπλοτήτων που καλούνται **Lorentzian** στις οποίες η μετρική διαθέτει μία μόνο αρνητική ιδιοτιμή οπότε η υπογραφή λαμβάνει τη μορφή $(n - 1, 1)$ (στη φυσική υψηλών ενεργειών χρησιμοποιείται η σύμβαση $(1, n - 1)$ με μία μόνο θετική ιδιοτιμή). Συγκεκριμένα, η βασική υπόθεση της γενικής σχετικότητας είναι πως ο χωρόχρονος περιγράφεται σύμφωνα με τον κάτωθι ορισμό:

Ορισμός 2.8: Χωρόχρονος - Spacetime

Ο χωρόχρονος (M, g) στη γενική σχετικότητα μοντελοποιείται ως μια τετραδιάστατη (συνεκτική και χρονικά-προσανατολίσιμη) Lorentzian διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Η μετρική χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του μήκους/μέτρου (norm) ενός διανύσματος. Το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος V δίνεται από τη σχέση:

$$|V|^2 = g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V^\mu V_\mu \quad (2.6.8)$$

Σημείωση: Το τετράγωνο του μήκους σε μια pseudo-Riemannian πολλαπλότητα, όπου η μετρική δεν είναι θετικά ορισμένη (σε αντίθεση με μια Riemannian πολλαπλότητα), μπορεί να λαμβάνει θετική, αρνητική ή μηδενική τιμή.

Επιπρόσθετα, μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε τη γωνία θ που σχηματίζουν δύο μη-μηδενικά διανύσματα V, W που ορίζονται στο ίδιο σημείο. Στην περίπτωση όπου το τετράγωνο του μήκους των δύο διανυσμάτων είναι θετικό (τα δύο διανύσματα είναι χωροειδή) έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{g(V, W)}{|V||W|} = \frac{g(V, W)}{\sqrt{g(V, V)}\sqrt{g(W, W)}} \quad (2.6.9)$$

Η ιδιότητα 2 αναφέρει ότι η μετρική είναι μη-ιδιάζουσα (non-singular/non-degenerate) το οποίο συνεπάγεται ότι ισχύει $r = 0$ και κατά συνέπεια η μετρική αντιστρέφεται. Ο αντίστροφος τανυστής της μετρικής g^{-1} είναι συμμετρικός, τάξης $(2, 0)$ και οι συνιστώσες του συμβολίζονται $(g^{-1})^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ με:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \quad (2.6.10)$$

Η μετρική ορίζει **ισομορφισμό** $g : T_p M \rightarrow T_p^* M$ ανάμεσα σε διανύσματα και 1-forms. Το αντικείμενο που προκύπτει από τη δράση της g πάνω σε ένα διάνυσμα, με το άλλο όρισμα να αφήνεται κενό, αποτελεί ένα 1-form που σχετίζεται με το διάνυσμα αφού εξαρτάται ρητά από αυτό. Συγκεκριμένα, έστω διάνυσμα $V \in T_p M$ τότε το αντίστοιχο του 1-form είναι $\tilde{V} \equiv g(V, \cdot) \in T_p^* M$ με συνιστώσες:

$$V_{\mu} \equiv \tilde{V}_{\mu} = \tilde{V}(\partial_{\mu}) = g(V, \cdot)(\partial_{\mu}) = g(V, \partial_{\mu}) = g(V^{\nu} \partial_{\nu}, \partial_{\mu}) = V^{\nu} g(\partial_{\nu}, \partial_{\mu}) = g_{\mu\nu} V^{\nu} \quad (2.6.11)$$

Αντίστροφα, η δράση της g^{-1} πάνω σε ένα 1-form δίνει το αντίστοιχο του διάνυσμα με συνιστώσες:

$$V^{\mu} = g^{\mu\nu} \tilde{V}_{\nu} \quad (2.6.12)$$

Οι πράξεις αυτές είναι γνωστές ως ανέβασμα/κατέβασμα δεικτών (index raising/lowering) και επεκτείνονται άμεσα σε τανυστές οποιασδήποτε τάξης.

2.6.1 Τοπικά Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς - Local Inertial Frames

Η μετρική σε κάθε πολλαπλότητα μπορεί τοπικά να λάβει την κανονική της μορφή, δηλαδή να γραφεί ως διαγώνιος πίνακας με στοιχεία ± 1 και 0, με χρήση κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων. Στον χωρόχρονο, αυτό σημαίνει πως η μετρική μπορεί να γραφεί ως η μετρική Minkowski του επίπεδου χωρόχρονου της ειδικής σχετικότητας, με τις διορθώσεις να είναι δεύτερης τάξης ως προς τις συντεταγμένες αφού οι δεύτερες παράγωγοι της μετρικής εν γένει δεν μηδενίζονται σε κάποιον αυθαίρετο χωρόχρονο. Επομένως είναι πάντοτε δυνατή η κατασκευή ενός τοπικά αδρανειακού συστήματος αναφοράς (σύστημα αναφοράς Lorentz) όπου με τον όρο τοπικά εννοούμε σε κάθε σημείο του χωρόχρονου ξεχωριστά και ενδεχομένως σε μια αρκούντως μικρή χωρική και χρονική περιοχή γύρω από αυτό. Το σύστημα συντεταγμένων για το οποίο αυτό καθίσταται εφικτό εξαρτάται από το σημείο έτσι εν γένει δεν μπορεί να βρεθεί ενιαίο σύστημα ως προς το οποίο ο χωρόχρονος να είναι παντού επίπεδος, εκτός αν καθολικά έχει μηδενική καμπυλότητα. Η δυνατότητα να προσεγγίσουμε τον καμπυλωμένο χωρόχρονο ως τοπικά επίπεδο ερμηνεύεται, με όρους κλασικής μηχανικής, από το γεγονός ότι αν περιοριστούμε σε μικρές περιοχές του χωρόχρονου το βαρυτικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ομογενές σε πρώτη τάξη και μάλιστα αμελητέο, με τις διορθώσεις δεύτερης τάξης να αντιστοιχούν στις "παλιρροϊκές δυνάμεις" (tidal forces). Οι δυνάμεις αυτές προκύπτουν ως αποτέλεσμα της καμπυλότητας του χωρόχρονου που έχει ως συνέπεια να μην μηδενίζονται οι δεύτερες παράγωγοι της μετρικής.

Θεώρημα 2.1: Τοπικά Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς (LIFs)

Σε κάθε σημείο $p \in M$ του χωρόχρονου (και γενικότερα κάθε πολλαπλότητας) υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων $\{x^{\hat{\mu}}\}$ στο οποίο η μετρική διαγωνοποιείται στην κανονική της μορφή, δηλαδή:

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x^{\hat{\kappa}}(p)) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \mathcal{O}[(x^{\hat{\kappa}}(p))^2] \quad (2.6.13)$$

όπου $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική Minkowski.

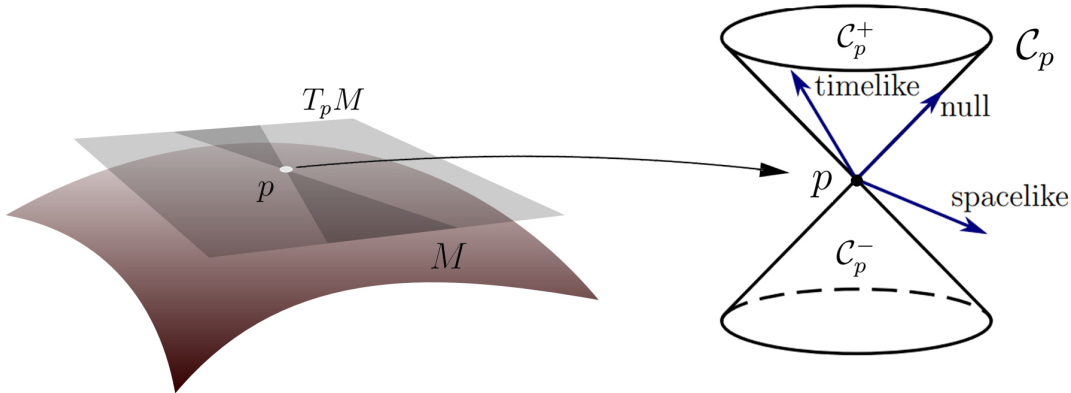
Η σχέση (2.6.13) είναι ισοδύναμη με τις συνθήκες $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x^{\hat{\kappa}}(p)) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ και $\partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_{x^{\hat{\kappa}}(p)} = 0$, ωστόσο εν γένει $\partial_{\hat{\sigma}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_{x^{\hat{\kappa}}(p)} \neq 0$. Οι συντεταγμένες $x^{\hat{\kappa}}$ καλούνται **τοπικά αδρανειακές συντεταγμένες** (locally inertial coordinates) και τα αντίστοιχα διανύσματα βάσης δημιουργούν το λεγόμενο **τοπικό αδρανειακό/Lorentz σύστημα αναφοράς** (local inertial/Lorentz frame ή LIF).

2.7 Αιτιακή Δομή - Causal Structure

Το γεγονός ότι τοπικά ο χωρόχρονος μοιάζει με τον χωρόχρονο Minkowski εισάγει αιτιακή δομή στην πολλαπλότητα. Συγκεκριμένα, ένα διάνυσμα $V_p \in T_p M$ στο σημείο $p \in M$ χαρακτηρίζεται ως:

1. **Χωροειδές** (Spacelike) αν $g_p(V_p, V_p) > 0$
2. **Φωτοειδές** (Lightlike/Null) αν $g_p(V_p, V_p) = 0$
3. **Χρονοειδές** (Timelike) αν $g_p(V_p, V_p) < 0$

Αιτιακά (causal) ονομάζονται τα διανύσματα με $g_p(V_p, V_p) \leq 0$ δηλαδή τα χρονοειδή και φωτοειδή διανύσματα. Τα φωτοειδή διανύσματα στο σημείο p βρίσκονται επί των γεννητόρων ενός διπλού κώνου ο οποίος ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$ και έχει κορυφή στο σημείο p , γνωστός ως **κώνος φωτός** (light/null cone) με συμβολισμό \mathcal{C}_p . Ο κώνος αυτός διαχωρίζει τα χρονοειδή από τα χωροειδή διανύσματα στο σημείο p , καθώς διανύσματα που κατευθύνονται στο εσωτερικό του είναι χρονοειδή ενώ αυτά που βρίσκονται εκτός του κώνου είναι χωροειδή. Ο διπλός κώνος φωτός \mathcal{C}_p προκύπτει από την ένωση δύο απλών κώνων φωτός, του \mathcal{C}_p^+ που ονομάζεται μελλοντικός κώνος φωτός και του \mathcal{C}_p^- που καλείται παρελθοντικός κώνος φωτός του σημείου p .



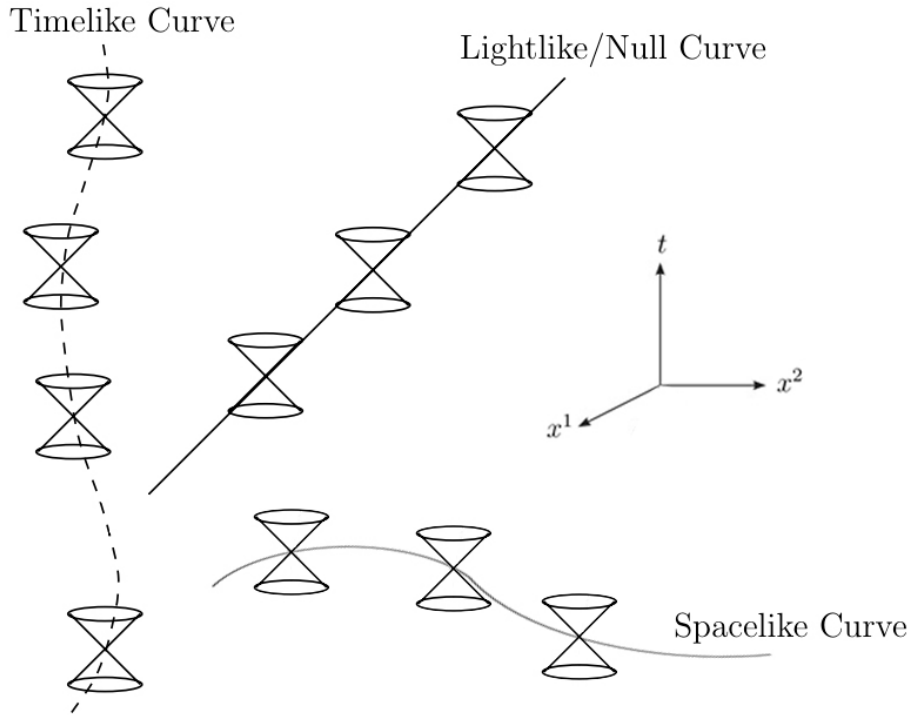
Σχήμα 2.7.1: Διπλός κώνος φωτός \mathcal{C}_p που έχει κορυφή στο σημείο p και ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$. Ο διπλός κώνος φωτός \mathcal{C}_p αποτελείται από την ένωση του μελλοντικού κώνου φωτός \mathcal{C}_p^+ και του παρελθοντικού κώνου φωτός \mathcal{C}_p^- .

Στη γενική σχετικότητα μελετάμε συνήθως αστροφυσικούς χωρόχρονους, αποκλείοντας παθολογικούς μη-αιτιακούς χωρόχρονους (π.χ. αυτούς που περιέχουν κλειστές αιτιακές καμπύλες - closed casual curves). Αξιώνουμε επομένως ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε με συνεχή τρόπο έναν μελλοντικό και παρελθοντικό κώνο φωτός σε κάθε σημείο του χωρόχρονου (δηλαδή να ορίσουμε το βέλος του χρόνου) οπότε λέμε ότι ο χωρόχρονος είναι **χρονικά-προσανατολίσιμος** (time-orientable). Πιο φορμαλιστικά, μια Lorentzian πολλαπλότητα είναι χρονικά-προσανατολίσιμη αν και μόνο αν επιδέχεται ένα λείο, μη-μηδενικό χρονοειδές διανυσματικό πεδίο T . Επιλέγοντας ένα τέτοιο χρονοειδές διανυσματικό πεδίο T καθορίζουμε αυτομάτως την κατεύθυνση του άξονα του χρόνου, εκλέγουμε δηλαδή χρονικό προσανατολισμό (time orientation). Ένα αιτιακό διάνυσμα V λέγεται μελλοντικά-κατευθυνόμενο (future-pointing) αν βρίσκεται στον ίδιο κώνο φωτός με το διάνυσμα T (δηλαδή $V^\mu T_\mu < 0$) τον οποίο ταυτοποιούμε με τον C_p^+ , αλλιώς αν ανήκει στον άλλο κώνο (δηλαδή $V^\mu T_\mu > 0$), τον οποίο ταυτοποιούμε με τον C_p^- , λέγεται παρελθοντικά-κατευθυνόμενο (past-pointing).

Σημείωση: Η εισαγωγή αιτιακής δομής, δηλαδή η ανάθεση χρονικού προσανατολισμού σε μια πολλαπλότητα, είναι ισοδύναμη με την εισαγωγή **σύμμορφης δομής** (conformal structure). Με τον όρο σύμμορφη δομή εννοούμε μια κλάση από Lorentzian μετρικές $[g]$ όπου οποιεσδήποτε δύο μετρικές $g_1, g_2 \in [g]$ συνδέονται μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού της μορφής $g_1 = \Omega^2 g_2$ όπου $\Omega : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ μια λεία, θετική συνάρτηση (σύμμορφος παράγοντας). Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν τις γωνίες μεταξύ προσανατολισμένων καμπυλών (και μεταξύ διανυσμάτων) άρα διατηρούν τους κώνους φωτός. Επομένως δύο χωρόχρονι των οποίων οι μετρικές συνδέονται με έναν σύμμορφο μετασχηματισμό έχουν ίδια αιτιακή δομή.

Ο χαρακτήρας (character) μιας καμπύλης καθορίζεται από τον τύπο του εφαπτόμενου διανύσματος σ' αυτή. Τοπικά, μια καμπύλη $\gamma(t)$ χαρακτηρίζεται ως χωροειδής/φωτοειδής/χρονοειδής στο σημείο της p αν το εφαπτόμενο διάνυσμα V_p είναι χωροειδές/φωτοειδές/χρονοειδές αντίστοιχα. Προφανώς, είναι δυνατό μια καμπύλη να έχει διαφορετικό χαρακτήρα σε κάθε σημείο της, λ.χ. μπορεί σε ένα σημείο να είναι χρονοειδής ενώ σε ένα άλλο χωροειδής, με εξαίρεση τις γεωδαισιακές καμπύλες. Μια καμπύλη λέγεται (καθολικά) χωροειδής/φωτοειδής/χρονοειδής αν το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη είναι χωροειδές/φωτοειδές/χρονοειδές σε κάθε σημείο της. Οποιαδήποτε δύο γεγονότα ανήκουν σε μια χρονοειδή καμπύλη είναι χρονοειδώς χωρισμένα, αν βρίσκονται σε μια φωτοειδή καμπύλη είναι φωτοειδώς χωρισμένα ενώ αν βρίσκονται σε μια χωροειδή καμπύλη είναι χωροειδώς χωρισμένα. Έτσι μια χρονοειδής καμπύλη βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό του τοπικού κώνου φωτός κάθε σημείου της, μια φωτοειδής καμπύλη βρίσκεται επί του τοπικού κώνου φωτός και μια χωροειδής καμπύλη βρίσκεται στο εξωτερικό του τοπικού κώνου φωτός. Από φυσικής άποψης αυτό είναι αναμενόμενο, εφόσον τα ελεύθερα σωματίδια με μάζα κινούνται με ταχύτητα μικρότερη από αυτή του φωτός και όπως θα δούμε διατρέχουν χρονοειδείς γεωδαισιακές καμπύλες, πράγμα που σημαίνει ότι η τετραταχύτητά τους πρέπει να βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τοπικού κώνου φωτός.

Αιτιακές (causal) λέγονται οι χρονοειδείς και φωτοειδείς καμπύλες. Οι αιτιακές καμπύλες συνδέουν γεγονότα στον χωρόχρονο τα οποία μπορούν να επηρεάσουν το ένα το άλλο οπότε λέμε ότι τα γεγονότα συνδέονται αιτιακά. Μια αιτιακή καμπύλη χαρακτηρίζεται μελλοντικά/παρελθοντικά προσανατολισμένη (future/past directed) αν και μόνο αν το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της (πεδίο ταχυτήτων) είναι μελλοντικά/παρελθοντικά κατευθυνόμενο. Σε μια Lorentzian διαφορίσιμη πολλαπλότητα (όπως ο χωρόχρονος) το μήκος s μιας χωροειδούς καμπύλης $\gamma(\lambda)$ με συντεταγμένες $x^\mu(\lambda)$



Σχήμα 2.7.2: Οι χρονοειδείς καμπύλες (κοσμικές γραμμές σωματιδίων με μάζα) διέρχονται πάντα από το εσωτερικό του τοπικού κώνου φωτός κάθε σημείου τους, οι φωτοειδείς καμπύλες (κοσμικές γραμμές άμαζων σωματιδίων π.χ. φωτονίων) βρίσκονται επάνω στον τοπικό κώνο φωτός κάθε σημείου τους ενώ οι χωροειδείς καμπύλες διέρχονται πάντα από το εξωτερικό του τοπικού κώνου φωτός κάθε σημείου τους.

που ενώνει δύο σημεία A και B δίνεται από τη σχέση:

$$s = \int_A^B (ds^2)^{1/2} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left(g_{\mu\nu}(x^a(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (2.7.1)$$

Για χρονοειδείς καμπύλες ορίζουμε τον **ιδιόχρονο** (proper time) τ μέσω της σχέσης $d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu > 0$ η οποία συνεπάγεται:

$$\tau = \int_A^B (-ds^2)^{1/2} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left(-g_{\mu\nu}(x^a(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (2.7.2)$$

Σημείωση: Το μήκος και ο ιδιόχρονος είναι ποσότητες που δεν εξαρτώνται από την παραμετροποίηση της καμπύλης. Αναπαραμετροποίηση της καμπύλης αφήνει το μήκος/τον ιδιόχρονο αμετάβλητο.

Ο ιδιόχρονος όντας το μήκος μιας χρονοειδούς καμπύλης αποτελεί μια αναλλοίωτη ποσότητα και όλοι οι παρατηρητές συμφωνούν για την αριθμητική τιμή του. Είναι ουσιαστικά ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι που κινείται μαζί με το σωματίδιο κατά μήκος της χρονοειδούς καμπύλης (wristwatch time). Εναλλακτικά, ο ιδιόχρονος είναι ο χρόνος που καταγράφει το ρολόι ενός συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο το σωματίδιο ηρεμεί.

Οι φωτοειδείς καμπύλες έχουν εξ' ορισμού μηδενικό μήκος, καθώς σε κάθε σημείο τους $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$.

Οι κοσμικές γραμμές των σωματιδίων με μάζα είναι καμπύλες που παραμετροποιούνται από τον ιδιόχρονο τ που καταγράφει το ίδιο το σωματίδιο, συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα σ' αυτές είναι η τετραταχύτητα $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ του σωματιδίου. Ως εκ τούτου, οι κοσμικές γραμμές στον χωρόχρονο των σωματιδίων με μάζα είναι χρονοειδείς καθότι η τετραταχύτητα του σωματιδίου κανονικοποιείται ως:

$$g(u, u) = u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{-d\tau^2}{d\tau^2} = -1 \quad (2.7.3)$$

Από την άλλη, οι κοσμικές γραμμές των άμαζων σωματιδίων είναι φωτεινές, διότι η παράμετρος λ που τις περιγράφει επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα σ' αυτές να είναι η τετραορμή $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ του άμαζου σωματιδίου που έχει μέτρο $g(p, p) = p^\mu p_\mu = -m^2 = 0$.

2.7.1 Αιτιακή Δομή Υπερεπιφανειών - Causal Structure of Hypersurfaces

Συμπληρωματικά, μπορούμε να μελετήσουμε την αιτιακή δομή των υπερεπιφανειών μιας πολλαπλότητας. Μια υπερεπιφάνεια Σ είναι μια $n - 1$ διάστατη εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα (submanifold) μιας n διάστατης πολλαπλότητας M , δηλαδή $\Sigma \subset M$. Εξειδικεύοντας στον χωρόχρονο, οι υπερεπιφάνειες είναι τρισδιάστατες υποπολλαπλότητες του χωρόχρονου. Μπορούμε να ορίσουμε μια υπερεπιφάνεια Σ προσδιορίζοντας μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x^μ της πολλαπλότητας M , που να έχει τη μορφή:

$$f(x^\mu) = 0 \quad (2.7.4)$$

Ο ορισμός (2.7.4) υποδηλώνει ότι η υπερεπιφάνεια Σ είναι η ισοσταθμική/ισοϋψής επιφάνεια (level surface) - εν προκειμένω μηδενικού ύψους - της βαθμωτής συνάρτησης f δηλαδή η Σ αποτελείται από το σύνολο σημείων $\Sigma = \{p \in M : f(x^\mu(p)) = 0\}$. Εξ' ορισμού, η συνάρτηση f παραμένει σταθερή πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη ανήκει στην υπερεπιφάνεια Σ άρα η δράση του διανύσματος V που εφάπτεται στην υπερεπιφάνεια Σ πάνω στη συνάρτηση f δίνει $V(f) = V^\mu \partial_\mu f = 0$ ή ισοδύναμα $df(V) = 0$ δηλαδή η κλίση df είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα V στη Σ . Το συνδιάνυσμα (1-form) $df = \nabla f$ (θα δούμε ότι ο τελεστής ∇ συμπίπτει με το διαφορικό για βαθμωτές συναρτήσεις) έχει συνιστώσες $\partial_\mu f = \nabla_\mu f$ και είναι ορθογώνιο σε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα V στην υπερεπιφάνεια:

$$\nabla_\mu f V^\mu = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} \nabla^\mu f V^\nu = 0 \quad (2.7.5)$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα του $\nabla_\mu f$ που δίνεται από τη σχέση $\nabla^\mu f = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f$ ορίζεται ως το **κάθετο διάνυσμα** N^μ στην υπερεπιφάνεια:

$$N^\mu = \nabla^\mu f = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f \quad (2.7.6)$$

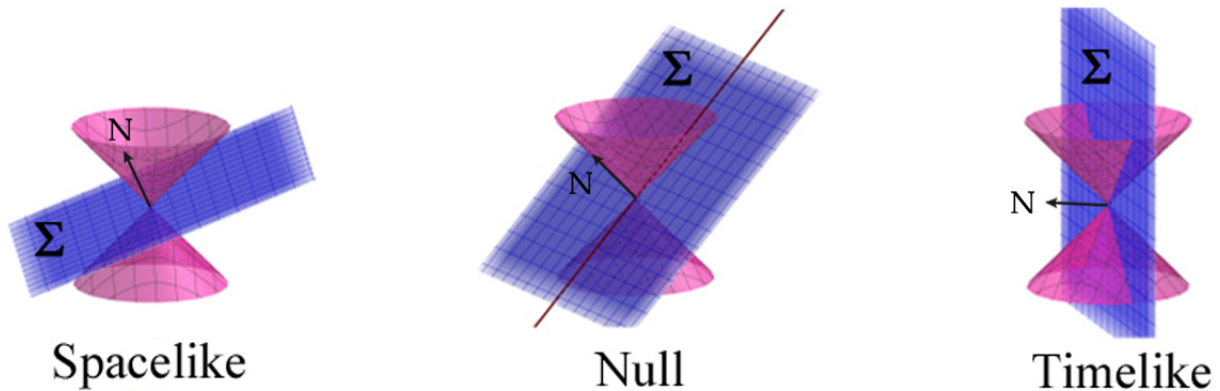
Εξυπακούεται ότι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\Sigma : f(x^\mu) = 0$ είναι κάθετο και στην οικογένεια υπερεπιφανειών $\Sigma_c : f(x^\mu) = c$ όπου c μια σταθερά. Το κάθετο διάνυσμα είναι μοναδικό πέραν του προσανατολισμού του (μελλοντικά/παρελθοντικά κατευθυνόμενο) και του μήκους του. Αν είναι χωροειδές ή χρονοειδές μπορεί να κανονικοποιηθεί με τρόπο ώστε να έχει μοναδιαίο μήκος (με αυθαιρεσία στην επιλογή προσήμου - προσανατολισμού):

$$n^\mu = \pm \frac{N^\mu}{|N^\mu N_\mu|^{1/2}} \quad (2.7.7)$$

Μια υπερεπιφάνεια μπορεί να χαρακτηριστεί ως προς την αιτιακή της δομή με βάση το κάθετο διανυσματικό πεδίο N σ' αυτή ή ισοδύναμα από την επαγόμενη μετρική (induced metric) της. Η επαγόμενη

μετρική μιας υπερεπιφάνειας Σ περιγράφει την εσωτερική της γεωμετρία και προκύπτει από την πλήρη μετρική g της περιβάλλουσας πολλαπλότητας M αφότου η Σ εμβαπτιστεί στην M (συγκεκριμένα η επαγόμενη μετρική είναι το αποτέλεσμα της δράσης στην g του pullback της απεικόνισης εμβάπτισης: $g|_{\Sigma} = \Phi^*g$). Οι υπερεπιφάνειες Σ μιας Lorentzian πολλαπλότητας M κατηγοριοποιούνται ως εξής:

1. **Χωροειδής** (Spacelike) αν το κάθετο διάνυσμα N_p είναι **χρονοειδές** σε κάθε σημείο $p \in \Sigma$. Σε αυτή την περίπτωση, η επαγόμενη μετρική $g|_{\Sigma}$ είναι Riemannian (θετικά ορισμένη).
2. **Φωτοειδής** (Lightlike/Null) αν το κάθετο διάνυσμα N_p είναι **φωτοειδές** σε κάθε σημείο $p \in \Sigma$. Σε αυτή την περίπτωση, η επαγόμενη μετρική $g|_{\Sigma}$ είναι ιδιάζουσα, έχει δηλαδή τουλάχιστον μία μηδενική ιδιοτιμή. Ισοδύναμα, για κάθε διάνυσμα Y υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα X ώστε $g|_{\Sigma}(X, Y) = 0$. Οι φωτοειδείς ολοκληρωτικές καμπύλες του N λέγονται **γεννήτορες** (generators) της φωτοειδούς υπερεπιφάνειας Σ διότι μαζί συνθέτουν τη Σ .
3. **Χρονοειδής** (Timelike) αν το κάθετο διάνυσμα N_p είναι **χωροειδές** σε κάθε σημείο $p \in \Sigma$. Σε αυτή την περίπτωση, η επαγόμενη μετρική $g|_{\Sigma}$ είναι Lorentzian (υπογραφή $(-, +, \dots, +)$).



Σχήμα 2.7.1.1: Ο χαρακτήρας των υπερεπιφανειών Σ καθορίζεται από τον χαρακτήρα του κάθετου διανύσματος N σ' αυτές. Η Σ καλείται χωροειδής αν $N^\mu N_\mu < 0$ παντού στη Σ , φωτοειδής αν $N^\mu N_\mu = 0$ και χρονοειδής αν $N^\mu N_\mu > 0$. Αν η Σ είναι χωροειδής τότε δεν τέμνεται από τον κώνο φωτός ενός σημείου της, αν είναι φωτοειδής ο κώνος φωτός έχει γεννήτορα επί της Σ ενώ αν είναι χρονοειδής τέμνεται από τον κώνο φωτός.

2.7.2 Επιφάνεια Cauchy & Υπερβολικότητα - Cauchy Surface & Hyperbolicity

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Einstein στον υπολογιστή, χρειάζεται να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy). Ειδικότερα, στόχος είναι αφότου προσδιορίσουμε τη γεωμετρία του χωρόχρονου σε κάποια αρχική χρονική στιγμή t_0 (προσδιορίζοντας τη μετρική του ή μεγέθη των οποίων η γνώση καθορίζει πλήρως τη μετρική), να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein για να εξελίξουμε τις αρχικές συνθήκες και να κατασκευάσουμε ολόκληρο τον χρονόχρονο, για χρονικές στιγμές $t \geq t_0$. Προκειμένου να καθίσταται αυτό δυνατό, πρέπει να εργαζόμαστε με καθολικά υπερβολικούς (globally hyperbolic) χωρόχρονους για τους οποίους, ξεκινώντας από ένα σύνολο αρχικών δεδομένων σε μια επιφάνεια Cauchy, μπορούμε να βρούμε τη μοναδική λύση ενός συστήματος (ιδανικώς ισχυρά) υπερβολικών και καλώς-τοποθετημένων (well-posed) διαφορικών εξισώσεων η οποία αντιστοιχεί στη χρονική εξέλιξη των δεδομένων αυτών. Αυτό θα οδηγήσει στην εύρεση της γεωμετρίας ολόκληρου του χωρόχρονου. Ο Geroch απέδειξε ότι για να είναι ένας χωρόχρονος καθολικά υπερβολικός πρέπει να επιδέχεται μια (υπερ)επιφάνεια Cauchy Σ πράγμα που τον καθιστά

διαφορομορφικό με τον χώρο $\mathbb{R} \times \Sigma$. Για να καταλήξουμε στον ορισμό της επιφάνειας Cauchy και του καθολικά υπερβολικά χωρόχρονου χρειαζόμαστε ορισμένες έννοιες αιτιότητας που περιγράφουν την αιτιακή δομή του χωρόχρονου και γενικότερα μιας χρονικά-προσανατολίσιμης διαφορίσιμης πολλαπλότητας.

Έστω (M, g) μια χρονικά-προσανατολίσιμη διαφορίσιμη Lorentzian πολλαπλότητα (π.χ. ο χωρόχρονος). Οι σχέσεις αιτιότητας (causality relations) ανάμεσα σε δύο σημεία $p, q \in M$ ορίζονται ως εξής:

- $p \ll q$: υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη χρονοειδής καμπύλη στην M από το p στο q .
Λέμε ότι το p προηγείται χρονολογικά του q .
- $p < q$: υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη στην M από το p στο q .
Λέμε ότι το p προηγείται αιτιακά του q .
- $p \leq q$: είτε $p < q$ είτε τα σημεία ταυτίζονται $p = q$

Έστω τυχόν σημείο - γεγονός $p \in M$. Το **χρονολογικό μέλλον** (chronological future) $I^+(p)$ του σημείου p ορίζεται ως το σύνολο σημείων της M τα οποία συνδέονται με το p μέσω μιας μελλοντικά προσανατολισμένης χρονοειδούς καμπύλης που αρχίζει από το p δηλαδή:

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\} \quad (2.7.8)$$

Το χρονολογικό μέλλον του p περιλαμβάνει γεγονότα που βρίσκονται στο εσωτερικό του μελλοντικού κώνου φωτός του p , με τα οποία το p μπορεί να επικοινωνήσει διαμέσου ενός σωματιδίου με μάζα. Ομοίως, το **αιτιακό μέλλον** (causal future) $J^+(p)$ του σημείου p ορίζεται ως το σύνολο σημείων της M τα οποία συνδέονται με το p μέσω μιας μελλοντικά προσανατολισμένης αιτιακής καμπύλης που αρχίζει από το p δηλαδή:

$$J^+(p) = \{q \in M : p \leq q\} \quad (2.7.9)$$

Το αιτιακό μέλλον του p περιλαμβάνει γεγονότα που βρίσκονται στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του μελλοντικού κώνου φωτός του p , με τα οποία το p μπορεί να επικοινωνήσει διαμέσου ενός σήματος δηλαδή μέσω ενός φωτονίου ή ενός σωματιδίου με μάζα. Βέβαια, το αιτιακό μέλλον του p περιλαμβάνει το ίδιο το σημείο p (αλλά το χρονολογικό μέλλον όχι) διότι ένα γεγονός συνδέεται με τον εαυτό του μέσω μιας τετριμμένης καμπύλης μηδενικού μήκους, δηλαδή μέσω μιας φωτοειδούς καμπύλης.

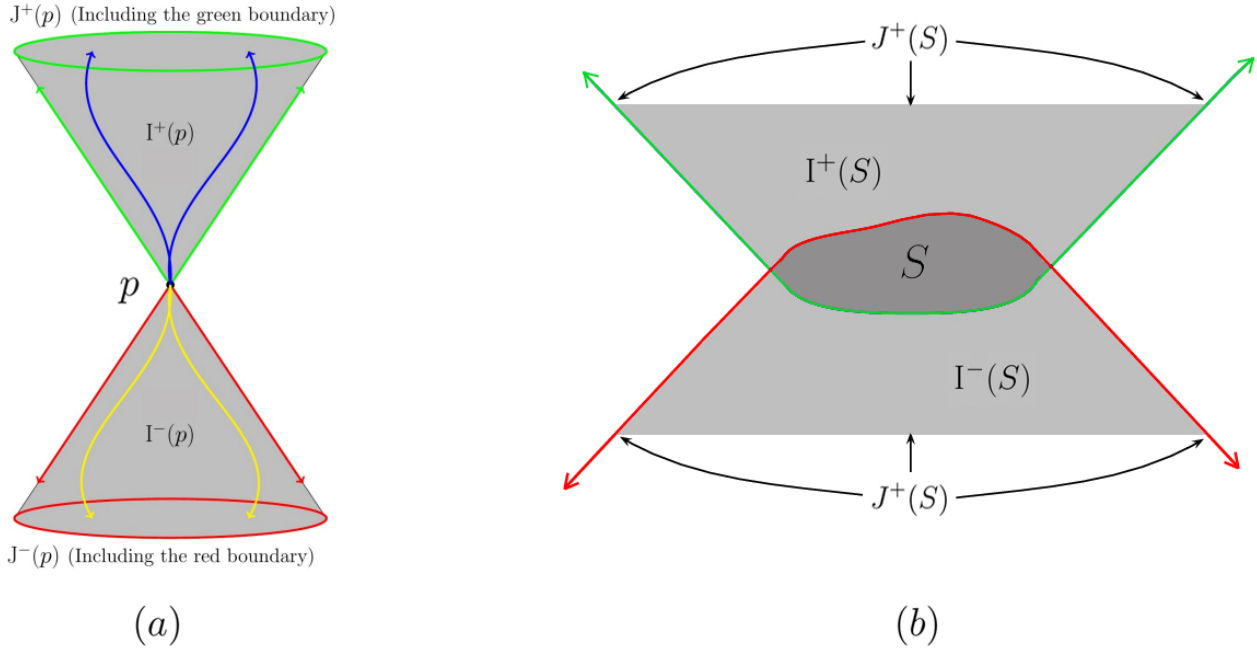
Γενικεύουμε τους πιο πάνω ορισμούς σε ένα υποσύνολο $S \subset M$ της πολλαπλότητας M . Το χρονολογικό μέλλον του S ορίζεται ως το σύνολο σημείων της πολλαπλότητας που συνδέονται με τα σημεία του S μέσω μιας μελλοντικά προσανατολισμένης χρονοειδούς καμπύλης που έχει αρχή στο S , δηλαδή:

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p) \quad (2.7.10)$$

Ομοίως, το αιτιακό μέλλον της S ορίζεται:

$$J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p) \quad (2.7.11)$$

Σημείωση: Το χρονολογικό παρελθόν $I^-(p)$ και αιτιακό παρελθόν $J^-(p)$ του σημείου p καθώς και το χρονολογικό παρελθόν $I^-(S)$ και αιτιακό παρελθόν $J^-(S)$ του συνόλου S ορίζονται με ανάλογο τρόπο, όπου αντί μελλοντικά προσανατολισμένων καμπυλών τα σημεία συνδέονται με παρελθοντικά προσανατολισμένες καμπύλες.



Σχήμα 2.7.2.1: (α) Το χρονολογικό μέλλον $I^+(p)$ και παρελθόν $I^-(p)$ του σημείου p περιλαμβάνουν γεγονότα στον μελλοντικό και παρελθοντικό κώνο φωτός αντίστοιχα, ενώ το αιτιακό μέλλον $J^+(p)$ και παρελθόν $J^-(p)$ περιλαμβάνουν το εσωτερικό συν την επιφάνεια των κώνων. (β) Το χρονολογικό μέλλον $I^+(S)$ και παρελθόν $I^-(S)$ καθώς και το αιτιακό μέλλον $J^+(S)$ και παρελθόν $J^-(S)$ του συνόλου S ορίζονται από την ένωση των αντίστοιχων συνόλων όλων των σημείων της S .

Μια φυσική απαίτηση που μπορούμε να θέσουμε για τον χωρόχρονο, είναι αυτή της **ισχυρής αιτιότητας** (strong causality) η οποία αποκλείει παθολογικές καταστάσεις όπως κλειστές (και σχεδόν κλειστές) αιτιακές καμπύλες που επιτρέπουν σε μελλοντικά γεγονότα να επηρεάσουν το παρελθόν τους. Μια χρονικά-προσανατολισίμη διαφορίσιμη Lorentzian πολλαπλότητα M είναι ισχυρά αιτιακή (strongly causal) αν για κάθε σημείο $p \in M$ και οποιαδήποτε γειτονιά $U \subset M$ του p , μπορεί να βρεθεί μια μικρότερη γειτονιά $V \subset U$ του p η οποία τέμνεται από κάθε αιτιακή καμπύλη το πολύ μια φορά. Με άλλα λόγια, σε κάθε σημείο μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά V την οποία μόλις μια αιτιακή καμπύλη τη διαπεράσει, δεν τη διαπερνά για δεύτερη φορά. Σε αυτή τη γειτονιά η αιτιακή καμπύλη παραμένει πάντοτε σε κάποια πεπερασμένη απόσταση από τον εαυτό της και αφού μια τέτοια γειτονιά υπάρχει γύρω από όλα τα σημεία ενός ισχυρά αιτιακού χωρόχρονου, συνάγουμε πως η καμπύλη δεν μπορεί να συναντήσει πουθενά τον εαυτό της ούτε να πλησιάσει αυθαίρετα κοντά στον εαυτό της.

Υπάρχει επίσης μια πιο ισχυρή έννοια αιτιότητας, αυτή της **σταθερής αιτιότητας** (stable causality). Ένας χωρόχρονος λέγεται σταθερά αιτιακός (stably causal) αν παραμένει αιτιακός (δεν περιέχει κλειστές αιτιακές καμπύλες) κάτω από μικρές διαταραχές της μετρικής του. Δηλαδή ένας χωρόχρονος (M, g) είναι σταθερά αιτιακός αν υπάρχει χρονοειδές πεδίο ω_μ τέτοιο ώστε ο χωρόχρονος (M, g') , με $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \omega_\mu \omega_\nu$, να μην περιέχει κλειστές αιτιακές καμπύλες. Η σταθερή αιτιότητα συνεπάγεται ισχυρή αιτιότητα (το αντίστροφο δεν ισχύει). Ο Hawking απέδειξε ότι ένας χωρόχρονος είναι σταθερά αιτιακός αν και μόνο αν υπάρχει λεία συνάρτηση $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το διανυσματικό πεδίο με συνιστώσες $-\nabla^\mu t$ να είναι παντού μελλοντικά κατευθυνόμενο. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση καθολικού χρόνου** (global time function), διότι διαδραματίζει τον ρόλο ενός "κοσμικού ρολογιού", μιας και η t αυξάνεται κατά μήκος κάθε μελλοντικά προσανατολισμένης αιτιακής καμπύλης.

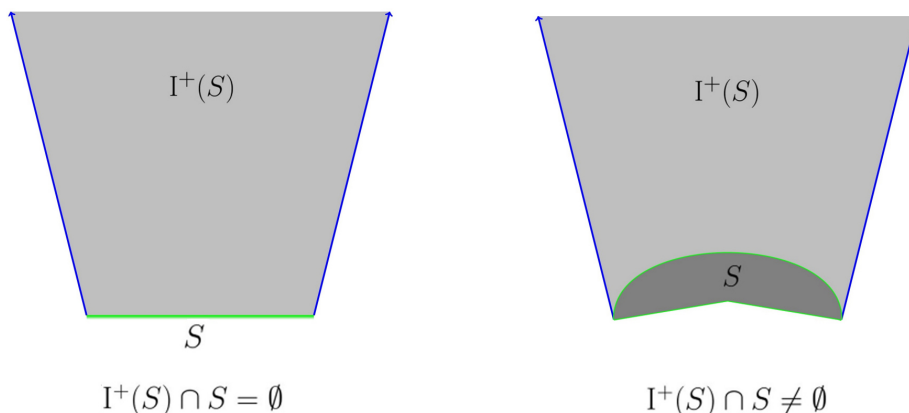
Έστω μια μελλοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη $\gamma(t)$ όπου $\gamma : I \rightarrow M$. Το σημείο $p \in M$ καλείται μελλοντικό τελικό σημείο (future endpoint) της καμπύλης $\gamma(t)$ αν για κάθε γειτονιά $O \ni p$ υπάρχει $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε $\gamma(t) \in O, \forall t > t_0$. Αυτό σημαίνει ότι μετά από μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου t όλα τα σημεία της καμπύλης περιορίζονται σε μια μικρή γειτονιά γύρω από το μελλοντικό τελικό σημείο p , έτσι θεωρούμε ότι η καμπύλη τερματίζει. Κατ' αναλογία, το σημείο $p \in M$ καλείται παρελθοντικό τελικό σημείο (past endpoint) της παρελθοντικά προσανατολισμένης αιτιακής καμπύλης $\gamma(t)$ αν για κάθε γειτονιά $O \ni p$ υπάρχει $t_0 \in I$ τέτοιο ώστε $\gamma(t) \in O, \forall t < t_0$. Από τον ορισμό (2.4) η διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι τοπολογικός χώρος Hausdorff (διακριτά σημεία ανήκουν ξένες γειτονιές) έτσι συμπεραίνουμε ότι μια μελλοντικά/παρελθοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη μπορεί να έχει το πολύ ένα μελλοντικό/παρελθοντικό τελικό σημείο.

Μια αιτιακή καμπύλη ονομάζεται μελλοντικά μη-επεκτάσιμη (future inextendible) αν δεν έχει μελλοντικό τελικό σημείο και παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη (past inextendible) αν δεν έχει παρελθοντικό τελικό σημείο. Διαισθητικά, μια μελλοντικά μη-επεκτάσιμη καμπύλη $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ δεν σταματάει σε κάποιο πεπερασμένο σημείο, συνεχίζει μέχρι το άπειρο του αιτιακού της μέλλοντος και αυτό έπεται ότι το όριο $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t)$ δεν υπάρχει. Αν μια αιτιακή καμπύλη είναι μελλοντικά μη-επεκτάσιμη καθώς και παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη, δηλαδή δεν έχει μελλοντικό ούτε παρελθοντικό τελικό σημείο, τότε καλείται μη-επεκτάσιμη (inextendible).

Σημείωση: Αν ένας χωρόχρονος (M, g) είναι ισχυρά αιτιακός, τότε η μελλοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη $\gamma : I \rightarrow K$ που ανήκει στο συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) σύνολο $K \subset M$ έχει υποχρεωτικά μελλοντικό τελικό σημείο στο K (και η παρελθοντικά προσανατολισμένη καμπύλη $-\gamma$ έχει παρελθοντικό τελικό σημείο στο K). Αυτό σημαίνει ότι σε έναν ισχυρά αιτιακό χωρόχρονο, μια μελλοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη δεν μπορεί να περιοριστεί σε ένα συμπαγές υποσύνολο K αφού δεν διαθέτει μελλοντικό τελικό σημείο, οπότε αν ξεκινάει από το K αναγκαστικά εξέρχεται και δεν επιστρέφει. Ομοίως για παρελθοντικά προσανατολισμένες αιτιακές καμπύλες.

Ένα υποσύνολο $S \subset M$ ονομάζεται άχρονο (achronal) αν δεν υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη χρονοειδής καμπύλη που να τέμνει το S δύο φορές, δηλαδή ένα σημείο της επιφάνειας S δεν μπορεί να ανήκει στο χρονολογικό μέλλον ενός άλλου σημείου της S . Έτσι για κάθε $p, q \in S$ ισχύει $p \notin I^+(q)$ και $q \notin I^+(p)$. Επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη που καθιστά ένα σύνολο S άχρονο είναι:

$$I^+(S) \cap S = \emptyset \tag{2.7.12}$$



Σχήμα 2.7.2.2: Άχρονο σύνολο (αριστερά) και μη-άχρονο σύνολο (δεξιά).

Θεωρούμε τώρα ένα κλειστό άχρονο σύνολο $S \subset M$. Το μελλοντικό πεδίο εξάρτησης (future domain of dependence) του S συμβολίζεται $D^+(S)$ και ορίζεται ως το σύνολο σημείων:

$$D^+(S) = \{p \in M : \text{κάθε παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από το } p \text{ τέμνει το } S\} \quad (2.7.13)$$

Αντίστοιχα, το παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης (past domain of dependence) του S συμβολίζεται $D^-(S)$ και ορίζεται ως το σύνολο σημείων:

$$D^-(S) = \{p \in M : \text{κάθε μελλοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από το } p \text{ τέμνει το } S\} \quad (2.7.14)$$

Το (συνολικό) πεδίο εξάρτησης του S ορίζεται από την ένωση: $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

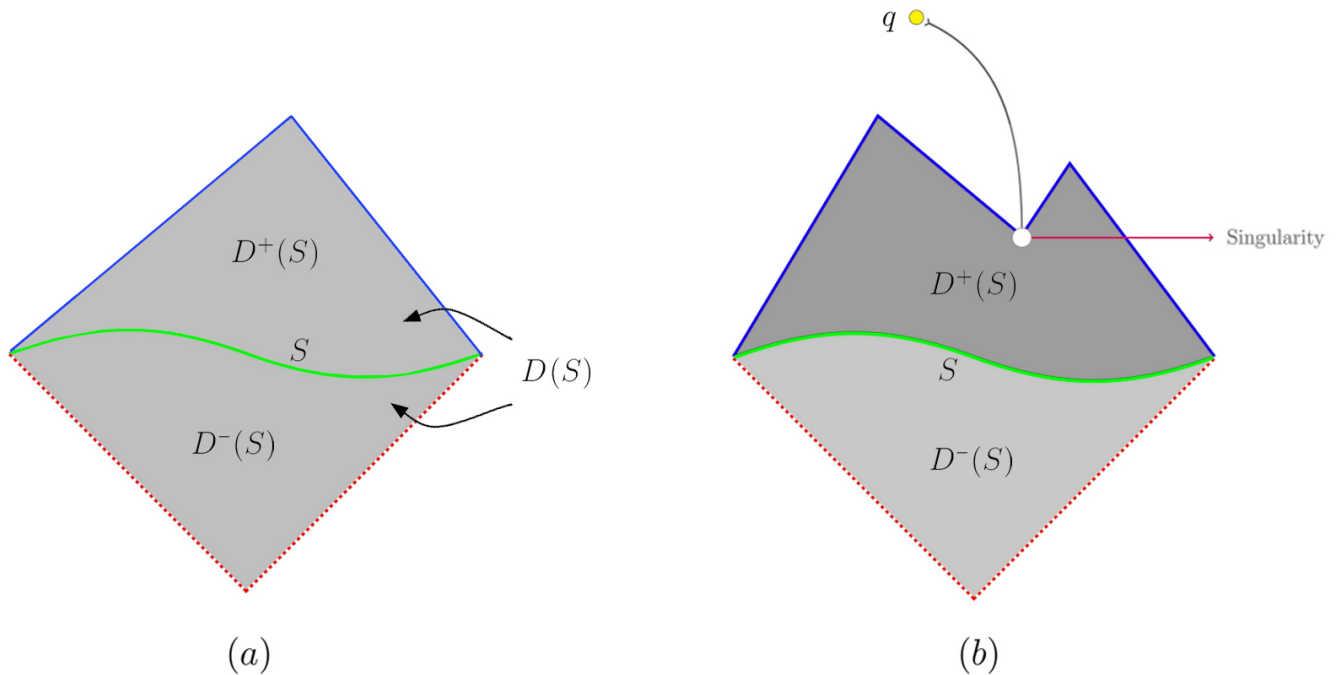
Σημείωση: Το μελλοντικό/παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης είναι γνωστά και ως μελλοντικό/παρελθοντικό ανάπτυγμα Cauchy (future/past Cauchy development) ενώ το (συνολικό) πεδίο εξάρτησης λέγεται επίσης ανάπτυγμα Cauchy (Cauchy development).

Στην ουσία το σύνολο S αποτελεί το παρελθόν της περιοχής $D^+(S)$ του χωρόχρονου, δηλαδή κάθε σημείο του $D^+(S)$ λαμβάνει σήματα αποκλειστικά από σημεία του S (σήματα από σημεία εκτός του S δεν φτάνουν στην περιοχή $D^+(S)$) τα οποία καθορίζουν την κατάσταση του μιας και όλες οι αιτιακές καμπύλες που διέρχονται από το $p \in D^+(S)$ τέμνουν την S στο παρελθόν. Κατ' αναλογία, το σύνολο S αποτελεί το μέλλον της περιοχής $D^-(S)$ εφόσον γεγονότα του $D^-(S)$ επηρεάζουν μόνο γεγονότα που ανήκουν στο σύνολο S , οπότε προσδιορίζοντας δεδομένα στο S καθορίζουμε μια συγκεκριμένη διαμόρφωση παρελθοντικών γεγονότων στην $D^-(S)$ η οποία όταν εξελιχθεί χρονικά δίνει το σύνολο S . Υπό αυτή την έννοια, λέμε ότι προσδιορίζουμε αρχικά δεδομένα στο S , τα οποία καθορίζουν πλήρως και με μοναδικό τρόπο την φυσική κατάσταση του συνολικού πεδίου εξάρτησης $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$. Για τον λόγο αυτό το $D(S)$ λέγεται επίσης περιοχή πλήρους αιτιακής εξάρτησης, διότι περιλαμβάνει όλα εκείνα τα γεγονότα του χωρόχρονου που κείτονται στο παρελθόν (αίτια) και το μέλλον (αποτελέσματα) του S τα οποία επηρεάζονται (εξαρτώνται αιτιακά) αποκλειστικά από την κατάσταση του S . Γνωρίζοντας την κατάσταση του S , διατυπώνοντας δηλαδή αρχικές συνθήκες, μπορούμε να προβλέψουμε γεγονότα του μέλλοντος και του παρελθόντος που ανήκουν στην περιοχή $D(S)$.

Σημείωση: Προφανώς, ένα σημείο p του χωρόχρονου μπορεί να ανήκει στο αιτιακό μέλλον της S , $p \in J^+(S)$ αλλά όχι στο μελλοντικό πεδίο εξάρτησης $p \notin D^+(S)$. Εν γένει λοιπόν, ισχύει:

$$D^+(S) \subseteq J^+(S) \quad (2.7.15)$$

Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει μελλοντικά προσανατολισμένη αιτιακή καμπύλη που να συνδέει το p με την S , αλλά αυτό δεν ισχύει για κάθε τέτοια καμπύλη, δηλαδή το p συνδέεται αιτιακά και με σημεία εκτός της S . Σε αυτή την περίπτωση το παρελθόν του p δεν καθορίζεται εξ' ολοκλήρου από την S και δεδομένα στην S δεν επαρκούν για να προβλέψουμε την κατάσταση του σημείου p .



Σχήμα 2.7.2.3: (a) Το μελλοτικό $D^+(S)$ και παρελθοντικό $D^-(S)$ πεδίο εξάρτησης του κλειστού και άχρονου συνόλου S συναποτελούν το συνολικό πεδίο εξάρτησης $D(S)$. Κάθε μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από σημεία του $D(S)$ τέμνει το S ακριβώς μια φορά. (b) Πεδίο εξάρτησης του συνόλου S σε χωρόχρονο με ιδιόμορφο σημείο (singularity). Το σημείο q δεν ανήκει στο $D^+(S)$ διότι υπάρχει παρελθοντικά μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από αυτό, η οποία δεν τέμνει το S καθότι πέφτει στην ιδιομορφία και τερματίζει.

Το σύνορο του $D^+(S)$ λέγεται μελλοντικός ορίζοντας Cauchy του S και συμβολίζεται $H^+(S)$. Είναι το όριο μελλοντικών γεγονότων (απώτερα γεγονότα στο μέλλον) τα οποία μπορούν να προβλεφθούν από τα δεδομένα που ορίζονται στο S . Αντιστοίχως, το σύνορο του $D^-(S)$ λέγεται παρελθοντικός ορίζοντας Cauchy του S και συμβολίζεται $H^-(S)$. Είναι το όριο παρελθοντικών γεγονότων (νωρίτερα γεγονότα στο παρελθόν) τα οποία μπορούν να προβλεφθούν από τα δεδομένα που ορίζονται στο S . Φορμαλιστικά, οι ορίζοντες Cauchy προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-(D^+(S)) \quad (2.7.16)$$

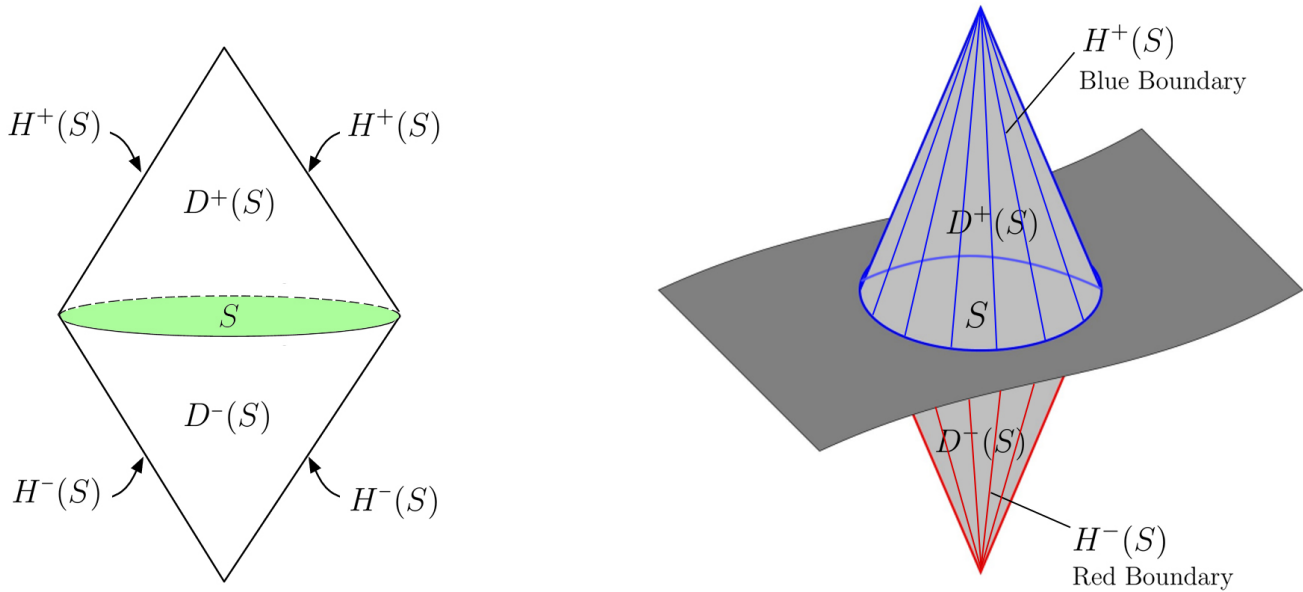
$$H^-(S) = \overline{D^-(S)} - I^+(D^-(S)) \quad (2.7.17)$$

όπου \overline{A} δηλώνει την τοπολογική κλειστότητα του A και $A - B \equiv A \setminus B$ δηλώνει τη διαφορά δύο συνόλων (στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B).

Οι δύο ορίζοντες είναι φωτοειδείς επιφάνειες καθότι σχηματίζονται από φωτοειδείς καμπύλες. Μπορεί να δειχθεί ότι ο μελλοντικός και παρελθοντικός ορίζοντας Cauchy είναι και οι δύο κλειστοί (ως τομή κλειστών συνόλων) και άχρονι (δεν υπάρχει χρονοειδής καμπύλη που να συνδέει δύο σημεία του ορίζοντα). Μαζί συνιστούν τον (συνολικό) ορίζοντα Cauchy $H(S)$ του S , μέσω της ένωσης:

$$H(S) = H^+(S) \cup H^-(S) \quad (2.7.18)$$

Ο ορίζοντας Cauchy $H(S)$ αποτελεί το σύνορο του πεδίου εξάρτησης $D(S)$. Γεγονότα που βρίσκονται πέρα από τη συνοριακή επιφάνεια $H(S)$ δεν μπορούν να προβλεφθούν ντετερμινιστικά από τη χρονική εξέλιξη κάποιων αρχικών δεδομένων που ορίζονται στο S .



Σχήμα 2.7.2.4: Διδιάστατη (αριστερά) και τρισδιάστατη (δεξιά) απεικόνιση της αιτιακής δομής του κλειστού και άχρονου συνόλου S . Με $D^+(S)/D^-(S)$ συμβολίζουμε το μελλοντικό/παρελθοντικό πεδίο εξάρτησης του S του οποίου η συνοριακή επιφάνεια $H^+(S)/H^-(S)$ λέγεται μελλοντικός/παρελθοντικός οριζοντας Cauchy.

Διαθέτουμε πλέον όλα τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να διατυπώσουμε τον ορισμό της επιφάνειας Cauchy.

Ορισμός 2.9: Επιφάνεια Cauchy - Cauchy surface

Ένα κλειστό και άχρονο σύνολο $\Sigma \subset M$ λέγεται (υπερ)επιφάνεια Cauchy του χωρόχρονου (M, g) αν το πεδίο εξάρτησής του είναι ολόκληρος ο χωρόχρονος: $D(\Sigma) = M$. Ισοδύναμα, το Σ αποτελεί επιφάνεια Cauchy αν και μόνο αν ο οριζοντας Cauchy του είναι κενός: $H(\Sigma) = \emptyset$.

Η επιφάνεια Cauchy Σ τέμνεται από κάθε μη-επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη του M (καμπύλη χωρίς μελλοντικό ή παρελθοντικό τελικό σημείο) ακριβώς μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρος ο χωροχρόνος είναι αιτιακά συνδεδεμένος με την άχρονη υπερεπιφάνεια γεγονότων Σ .

Με φυσικούς όρους η ύπαρξη επιφάνειας Cauchy είναι εξέχουσας σημασίας, διότι προσδιορίζοντας αρχικά δεδομένα σε μια επιφάνεια Cauchy μπορούμε να προβλέψουμε τη γεωμετρία όλου το χωρόχρονου, εξελίσσοντας χρονικά τα δεδομένα στο μέλλον και το παρελθόν της επιφάνειας, μέσω των εξισώσεων Einstein.

Ορισμός 2.10: Καθολικά Υπερβολικός Χωρόχρονος - Globally hyperbolic spacetime

Ένας χωρόχρονος (M, g) ονομάζεται καθολικά υπερβολικός αν και μόνο αν επιδέχεται επιφάνεια Cauchy Σ .

Σημείωση: Αν ένας χωρόχρονος είναι καθολικά υπερβολικός, έπεται ότι είναι σταθερά αιτιακός (stably causal), επιδέχεται δηλαδή συνάρτηση καθολικού χρόνου. Συνεπώς είναι και ισχυρά αιτιακός.

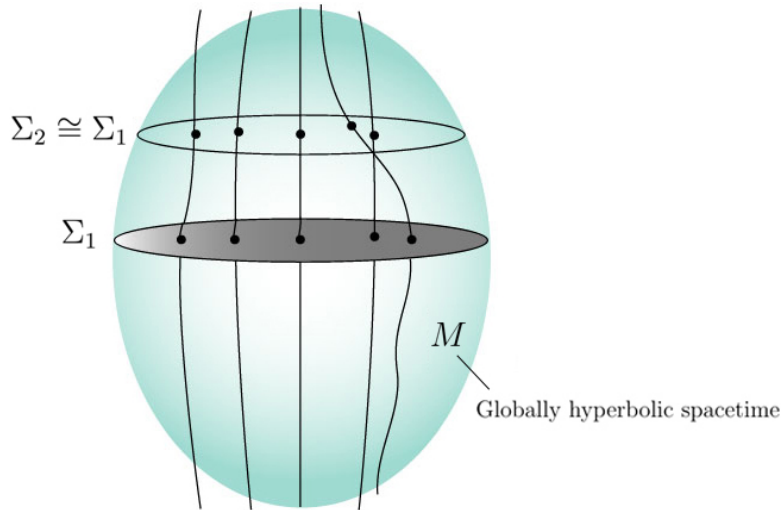
Σημείωση: Παρόλο που ένας τυχαίος χωρόχρονος δεν είναι κατ' ανάγκη καθολικά υπερβολικός, μέχρι στιγμής έχει παρατηρηθεί ότι όλοι οι αστροφυσικοί χωρόχρονος που μελετώνται στη γενική σχετικότητα είναι πράγματι καθολικά υπερβολικοί.

Εφόσον ένας καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος είναι σταθερά αιτιακός και η επιφάνεια Cauchy είναι άχρονη (τα σημεία της δεν συνδέονται αιτιακά μεταξύ τους), μπορεί να θεωρηθεί ως τομή του χωρόχρονου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 . Με άλλα λόγια αποτελεί την ισοσταθμική επιφάνεια με τιμή t_0 της συνάρτησης καθολικού χρόνου t που ορίζεται σε όλο τον χωρόχρονο, δηλαδή:

$$\Sigma_{t_0} = \{p \in M : t(p) = t_0\} \quad (2.7.19)$$

Η συνάρτηση t διαδραματίζει τον ρόλο μιας παγκόσμιας χρονικής συντεταγμένης του χωρόχρονου η οποία είναι γνησίως αύξουσα κατά μήκος κάθε μελλοντικά προσανατολισμένης αιτιακής καμπύλης.

Συνεπώς προσδιορίζοντας αρχικά δεδομένα σε μία μόνο τομή ενός καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου, συγκεκριμένα στην επιφάνεια Cauchy, μπορούμε να γνωρίζουμε όλα τα γεγονότα που έχουν συμβεί ή θα συμβούν στον υπό μελέτη χωρόχρονο. Τονίζεται ότι σε έναν υπερβολικό χωρόχρονο η επιφάνεια Cauchy δεν είναι μοναδική, καθώς με έναν ομοιομορφισμό μπορούμε να την παραμορφώσουμε διατηρώντας την τοπολογία της, παίρνοντας έτσι μια νέα επιφάνεια Cauchy ομοιομορφική με την πρώτη. Άρα οποιοσδήποτε δύο επιφάνειες Cauchy σε έναν καθολικά υπερβολικά χωρόχρονο είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους.



Σχήμα 2.7.2.5: Ο καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος (M, g) διαθέτει την επιφάνεια Cauchy Σ_1 η οποία τέμνεται από κάθε μη-επεκτάσιμη (χωρίς αρχή και τέλος) αιτιακή καμπύλη του M σε ακριβώς ένα σημείο. Η επιφάνεια Cauchy δεν είναι μοναδική, για παράδειγμα η Σ_2 είναι επίσης επιφάνεια Cauchy του M ομοιομορφική με τη Σ_1 .

Σύμφωνα με τον Geroch, η τοπολογία ενός καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου καθορίζεται πλήρως από την τοπολογία της επιφάνειας Cauchy που επιδέχεται. Συγκεκριμένα, ο καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος M είναι ισομετρικός με τον $\mathbb{R} \times \Sigma$, όπου Σ μια επιφάνεια Cauchy του M . Το σχετικό θεώρημα παρατίθεται πιο κάτω.

Σημείωση: Η ισομετρία είναι μια ειδική κατηγορία διαφορομορφισμού που διατηρεί τη γεωμετρία. Λέμε ότι δύο χωρόχρονος (M, g) και (M', g') είναι ισομετρικοί αν υπάρχει διαφορομορφισμός $\phi : M \rightarrow M'$ τέτοιος ώστε $g_{\mu\nu} = \phi^* g'_{\mu\nu}$ (όπου ϕ^* το pullback που θα οριστεί στην επόμενη ενότητα).

Θεώρημα 2.2: Θεώρημα Geroch (Τοπολογία καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου)

Αν Σ είναι μια επιφάνεια Cauchy του χωρόχρονου (M, g) τότε ο M είναι ισομετρικός με τον χώρο $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μια λεία συνάρτηση καθολικού χρόνου (global time function) $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το χρονοειδές διάνυσμα με συνιστώσες $-\nabla^\mu t$ να είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο και κάθετο στις χωροειδείς υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου Σ_t οι οποίες αποτελούν επιφάνειες Cauchy με την ίδια τοπολογία όπως αυτή της Σ . Η οικογένεια μη-τεμνόμενων υπερεπιφανειών Σ_t καλύπτει πλήρως τον χωρόχρονο M υπό την έννοια $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ και καλείται **διαμέριση** (foliation) του M .

Σημείωση: Η λεία συνάρτηση $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται επίσης και χρονική συνάρτηση Cauchy (Cauchy time-function) διότι οι ισοσταθμικές επιφάνειες Σ_t της t είναι επιφάνειες Cauchy. Όλα τα σημεία $p \in \Sigma_t$ μιας δεδομένης επιφάνειας Cauchy Σ_t αντιστοιχούν στον ίδιο (παγκόσμιο) χρόνο $t(p) = t$, οπότε οι Σ_t παριστάνουν στιγμιότυπα του χωρόχρονου.

Ειδικότερα, γράφοντας $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$, εννοούμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε τον χωρόχρονο χρησιμοποιώντας τη διάσταση \mathbb{R} (που αναφέρεται στον άξονα του καθολικού χρόνου $t \in \mathbb{R}$) σε συνδυασμό με την τρισδιάστατη χωροειδή υπερεπιφάνεια Cauchy Σ η οποία παριστάνει μια τρισδιάστατη χωρική φέτα του χωρόχρονου σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Συνεπώς το θεώρημα του Geroch μας επιτρέπει να πραγματοποιήσουμε **διαχωρισμό του χωρόχρονου σε χώρο και χρόνο**, μέσω του λεγόμενου "3+1" φορμαλισμού, τον οποίο θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3.

2.8 Παράγωγος Lie - Lie Derivative

Η παράγωγος Lie γενικεύει την ιδέα της κατευθυνόμενης παραγωγού καθώς δίνει τον ρυθμό μεταβολής ενός τανυστή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών (ή γραμμών ροής) ενός δεδομένου διανυσματικού πεδίου. Προκειμένου να εισάγουμε μια παράγωγο σε μια πολλαπλότητα, χρειάζεται να βρούμε τρόπο να συγκρίνουμε τανυστές που ορίζονται σε διαφορεικά σημεία της πολλαπλότητας. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του Lie dragging σε συνδυασμό τις απεικονίσεις pushforward/pullback που επάγει. Για τον ορισμό τους, πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια του διαφορομορφισμού ανάμεσα σε δύο πολλαπλότητες.

Ορισμός 2.11: Διαφορομορφισμός - Diffeomorphism

Έστω M, N δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες και $\phi : M \rightarrow N$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση ϕ λέγεται διαφορομορφισμός (diffeomorphism) αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. ϕ είναι 1 - 1 και επί (bijection - αντιστρέψιμη)
2. ϕ είναι διαφορίσιμη/λεία (C^∞)
3. $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ είναι διαφορίσιμη/λεία (C^∞)

Αν υπάρχει διαφορομορφισμός $\phi : M \rightarrow N$ τότε οι πολλαπλότητες M, N λέγονται διαφορο-

μορφικές (diffeomorphic). Αν $\phi : M \rightarrow N$ διαφορομορφισμός και $p \in M$ τότε ο ϕ επάγει μια απεικόνιση που καλείται διαφορικό (differential):

$$\phi_* \equiv d\phi : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N \quad (2.8.1)$$

η οποία είναι **ισομορφισμός** (isomorphism) ανάμεσα στους εφαπτόμενους χώρους $T_p M, T_{\phi(p)} N$.

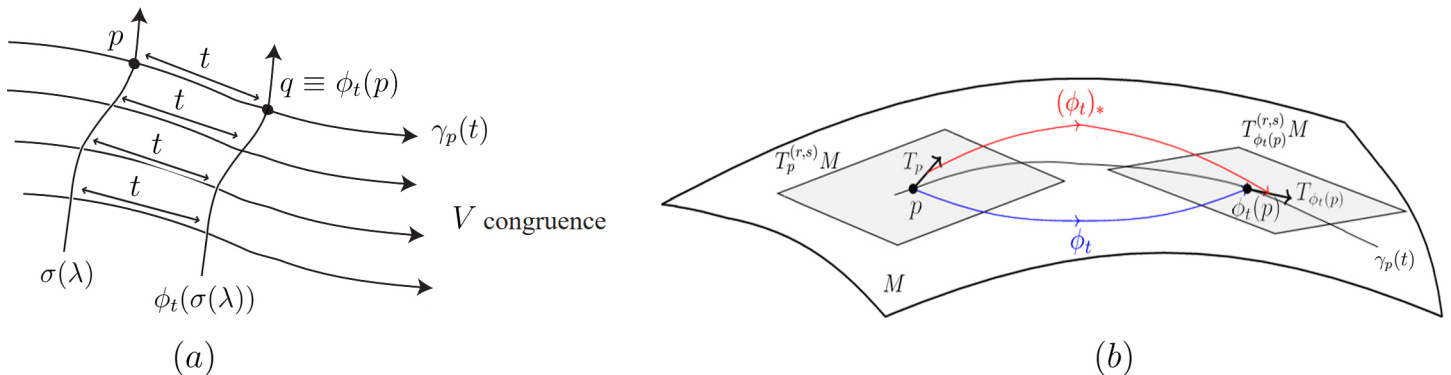
Έστω λείο διανυσματικό πεδίο V στην κατεύθυνση του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο Lie του τανυστικού πεδίου T . Θεωρούμε σημείο $p \in M$ στο οποίο ορίζεται ο τανυστής T_p . Επίσης θεωρούμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια **διαφορομορφισμών** $\phi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ με γεννήτορα το πεδίο V (**ροή** - flow παραγόμενη από το πεδίο V), η οποία μετατοπίζει σημεία κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης του V κατά απόσταση $t \in \mathbb{R}$. Φορμαλιστικά η ροή του V ορίζεται:

$$\phi_t(p) \equiv \phi(t, p) = \gamma_p(t) \quad (2.8.2)$$

όπου $\gamma_p(t)$ η ολοκληρωτική καμπύλη του V η οποία διέρχεται από το σημείο $p = \phi_0(p) = \gamma_p(0)$ (με $\phi_0 = \mathbb{1}$ η ταυτοτική απεικόνιση). Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση ϕ_t μετακινούμε το σημείο p πάνω στην ολοκληρωτική καμπύλη του V κατά συγκεκριμένη απόσταση t , μέχρι να φτάσουμε σε ένα καινούργιο σημείο $\phi_t(p) \equiv q$. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **Lie dragging**. Ομοίως μπορούμε να μετατοπίσουμε κατά Lie μια καμπύλη σ στην κατεύθυνση του V σέρνοντας όλα τα σημεία της κατά την ίδια απόσταση t , δηλαδή $\phi_t \circ \sigma$. Στο σημείο $\phi_t(p)$ που προκύπτει από Lie dragging μπορούμε να ορίσουμε τανυστές που σχετίζονται με τους τανυστές στο αρχικό σημείο p μέσω μιας απεικόνισης που επάγεται από τη ϕ_t (γενίκευση του διαφορικού) η οποία ονομάζεται **pushforward** και συμβολίζεται $(\phi_t)_* \equiv d\phi_t : T_p^{(r,s)} M \rightarrow T_{\phi_t(p)}^{(r,s)} M$.

Το pushforward ενός τανυστή $T_p \in T_p^{(r,s)} M$ που επάγεται από έναν διαφορομορφισμό ϕ είναι επίσης τανυστής τάξης (r, s) ο οποίος ορίζεται στο $\phi(p)$, συμβολίζεται $\phi_* T \in T_{\phi(p)}^{(r,s)} M$ και η δράση του δίνεται μέσω της σχέσης:

$$(\phi_* T)(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1, \dots, V_s) = T[\phi^* \omega_1, \dots, \phi^* \omega_r, (\phi^{-1})_* V_1, \dots, (\phi^{-1})_* V_s] \quad (2.8.3)$$



Σχήμα 2.8.1: (a) Ορισμός του Lie dragging. Το σημείο p μετατοπίζεται κατά απόσταση t μέσω της ροής ϕ_t που παράγει το διανυσματικό πεδίο V , οπότε λαμβάνουμε το νέο σημείο $q \equiv \phi_t(p)$. Η καμπύλη $\phi_t(p)_{t \in \mathbb{R}}$ συμπίπτει με την ολοκληρωτική καμπύλη (γραμμή ροής) $\gamma_p(t)$ του πεδίου V που διέρχεται από το p . Κατ' αναλογία το Lie dragging κάθε σημείου της καμπύλης σ κατά την ίδια απόσταση t παρέχει μια νέα καμπύλη $\phi_t \circ \sigma$. (b) Η απεικόνιση ϕ_t ανάμεσα σε σημεία της πολυπλοκότητας επάγει την απεικόνιση pushforward $(\phi_t)_*$ ανάμεσα στους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους των τανυστών.

Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τον ρυθμό μεταβολής του τανυστικού πεδίου T κατά μήκος της κατεύθυνσης του V , στο σημείο p . Εφόσον πρόκειται για κατευθυνόμενη παραγωγή, απαιτείται να υπολογίσουμε σε πρώτο στάδιο την τιμή του τανυστικού πεδίου στο διπλανό σημείο $q \equiv \phi_t(p)$ που βρίσκεται στην κατεύθυνση του V και απέχει κατά t από το αρχικό σημείο p , λαμβάνουμε δηλαδή την ποσότητα $T_{\phi_t(p)}$. Τώρα όμως $T_{\phi_t(p)} \in T_{\phi_t(p)}^{(r,s)}M$ ενώ $T_p \in T_p^{(r,s)}M$ και ως γνωστό δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τανυστές που ανήκουν σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους. Χρειάζεται να μεταφέρουμε το $T_{\phi_t(p)}$ πίσω στον χώρο $T_p^{(r,s)}M$, δηλαδή πίσω στο σημείο p και αυτό επιτυγχάνεται μέσω της αντίστροφης απεικόνισης της pushforward που λέγεται **pullback** $(\phi_t^{-1})_* \equiv \phi_t^* : T_{\phi_t(p)}^{(r,s)}M \rightarrow T_p^{(r,s)}M$.

Λόγω της ιδιότητας $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ της μονοπαμετρικής οικογένειας διαφορομορφισμών, προκύπτει ότι η αντίστροφη απεικόνιση γράφεται $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$. Το αντίστροφο του pushforward $(\phi_t^{-1})_* = (\phi_{-t})_*$ (δηλαδή το pullback) θα οδηγήσει τον τανυστή $T_{\phi_t(p)}$ πίσω στο σημείο p ώστε να μπορούμε να λάβουμε τη διαφορά του με τον T_p μιας και τα δύο αντικείμενα ορίζονται στο σημείο p . Διαιρώντας τη διαφορά αυτή με την ποσότητα t και θεωρώντας το όριο $t \rightarrow 0$, σχηματίζουμε τελικά την παράγωγο Lie στο σημείο p :

$$(L_V T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_*[T_{\phi_t(p)}] - T_p}{t} \quad (2.8.4)$$

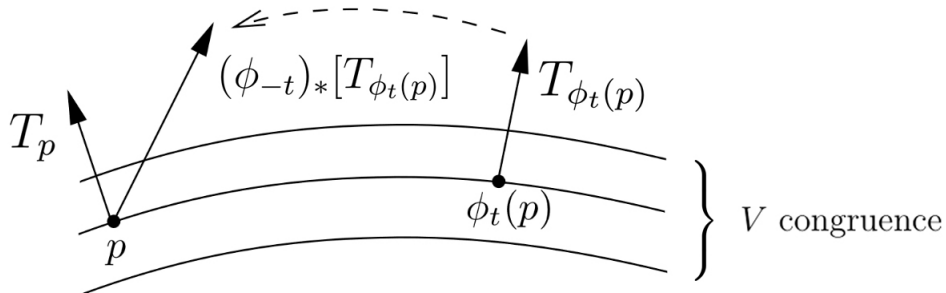
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*[T_{\phi_t(p)}] - T_p}{t} \quad (2.8.5)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \phi_t^*[T_{\phi_t(p)}] \right|_{t=0} \quad (2.8.6)$$

Εξ' ορισμού η παράγωγος Lie είναι ένας τελεστής παραγωγής που απεικονίζει τανυστές τάξης (r, s) σε τανυστές της ίδιας τάξης. Όντας τελεστής παραγωγής, χαρακτηρίζεται από τις πιο κάτω ιδιότητες:

1. **Γραμμικότητα:** $L_V(aT + bS) = aL_V T + bL_V S$
2. **Κανόνας Leibniz:** $L_V(T \otimes S) = L_V T \otimes S + T \otimes L_V S$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ σταθερές και T, S τανυστές ίδιας τάξης στην ιδιότητα (1), αυθαίρετης τάξης στην (2).



Σχήμα 2.8.2: Ορισμός παραγωγού Lie του τανυστικού πεδίου T κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V , υπολογισμένη στο σημείο p . Συγκρίνουμε το pullback κατά t του τανυστή $T_{\phi_t(p)}$ με τον τανυστή T_p , καθότι και τα δύο αντικείμενα ορίζονται στο ίδιο σημείο p .

- Η παράγωγος Lie μια βαθμωτής συνάρτησης $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V , υπολογισμένη στο σημείο p , είναι:

$$(L_V f)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* f - f}{t} = \left. \frac{d}{dt} \phi_t^* f \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi_t) \right|_{t=0} \stackrel{2.2.1}{=} V_p(f) = V^\mu \partial_\mu f \Big|_p \quad (2.8.7)$$

- Η παράγωγος Lie ενός διανυσματικού πεδίου W κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V , στο σημείο p , είναι διάνυσμα που ορίζεται μέσω της δράσης του σε μια δοκιμαστική συνάρτηση f :

$$\begin{aligned}
 (L_V W)_p(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_* W_{\phi_t(p)} - W_p}{t}(f) = \lim_{t \rightarrow 0} (\phi_{-t})_* \frac{W_{\phi_t(p)} - \phi_{t*} W_p}{t}(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_{\phi_t(p)}(f) - \phi_{t*} W_p(f)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_p(f) + tV_p(W(f)) - W_p(\phi_t^* f)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_p(f) + tV_p(W(f)) - W_p(f + tV(f))}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_p(f) + tV_p(W(f)) - W_p(f) - tW_p(V(f))}{t} \\
 &= V_p(W(f)) - W_p(V(f)) \\
 &\equiv [V, W]_p(f)
 \end{aligned}$$

Συμβολίσουμε $[V, W]$ το **Lie Bracket** των δύο διανυσματικών πεδίων που ορίζεται μέσω της $[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f))$. Επομένως σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων όπου $V = V^\mu \partial_\mu$ και $W = W^\mu \partial_\mu$ οι συνιστώσες του $L_V W$ είναι:

$$(L_V W)^\mu \equiv L_V W^\mu = [V, W]^\mu \equiv V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu \quad (2.8.8)$$

- Η παράγωγος Lie ενός 1-form ω κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V , είναι το 1-form με συνιστώσες:

$$(L_V \omega)_\mu \equiv L_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu \quad (2.8.9)$$

- Γενικεύοντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, η παράγωγος Lie ενός τανυστή T τάξης (r, s) κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V , είναι ο τανυστής τάξης (r, s) με συνιστώσες:

$$\begin{aligned}
 (L_V T)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &\equiv L_V T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = V^\rho \partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\
 &\quad - T^{\rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho V^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \rho}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho V^{\mu_r} \\
 &\quad + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\rho \dots \nu_s} \partial_{\nu_1} V^\rho + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \rho} \partial_{\nu_s} V^\rho \quad (2.8.10)
 \end{aligned}$$

Ιδιότητες Lie Derivative

Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος Lie διαθέτει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $L_{aV+bU} = aL_V + bL_U$ με $a, b = \text{const.}$
2. $L_{[V,U]} = [L_V, L_U]$
3. $[[L_{V_1}, L_{V_2}], L_{V_3}] + [[L_{V_3}, L_{V_1}], L_{V_2}] + [[L_{V_2}, L_{V_3}], L_{V_1}] = 0$ (Ταυτότητα Jacobi)
4. L_V μετατίθεται με contractions (και άρα ίχνη) οπότε σε συνδυασμό με τον κανόνα Leibniz:

$$\begin{aligned}
 L_V(T(\omega_1, \dots, \omega_r, W_1, \dots, W_s)) &= (L_V T)(\omega_1, \dots, \omega_r, W_1, \dots, W_s) \\
 &\quad + T(L_V \omega_1, \dots, \omega_r, W_1, \dots, W_s) + \dots + T(\omega_1, \dots, L_V \omega_r, W_1, \dots, W_s) \\
 &\quad + T(\omega_1, \dots, \omega_r, L_V W_1, \dots, W_s) + \dots + T(\omega_1, \dots, \omega_r, W_1, \dots, L_V W_s)
 \end{aligned}$$

Σημείωση: Αντί της μερικής παραγώγου ∂_μ , μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο Lie χρησιμοποιών-

τας τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇_μ μιας σύνδεσης ∇ η οποία δεν έχει στρέψη - είναι συμμετρική (όπως η σύνδεση Levi-Civita που επιπροσθέτως είναι συμβατή με τη μετρική). Σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{aligned} (L_V T)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &\equiv L_V T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = V^\rho \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &\quad - T^{\rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_\rho V^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \rho}_{\nu_1 \dots \nu_s} \nabla_\rho V^{\mu_r} \\ &\quad + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\rho \dots \nu_s} \nabla_{\nu_1} V^\rho + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \rho} \nabla_{\nu_s} V^\rho \end{aligned}$$

Ο λόγος που μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι διότι οι επιπλέον όροι που εισάγει μια τέτοια συναλλοίωτη παράγωγος, δηλαδή όροι περιέχουν τα σύμβολα Christoffel, απλοποιούνται μεταξύ τους. Έτσι μένουν μόνο οι όροι με τις μερικές παραγώγους και ανακτούμε τη σχέση (2.8.10).

2.8.1 Συμμετρίες & Διανύσματα Killing - Symmetries & Killing vectors

Ορισμός 2.12: Συμμετρία (Symmetry)

Έστω διαφορομορφισμός $\phi : M \rightarrow M$ και τανυστικό πεδίο T . Λέμε ότι ο ϕ είναι **μετασχηματισμός συμμετρίας** ή απλά **συμμετρία** (symmetry) του τανυστικού πεδίου T αν αυτό παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση του pullback ϕ^* δηλαδή:

$$\phi^* T = T \quad (2.8.11)$$

Αν ισχύει $\phi_t^* T = T$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου ϕ_t η ροή που παράγει το διανυσματικό πεδίο V , τότε λέμε ότι η $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ είναι μια **μονοπαραμετρική οικογένεια συμμετριών** του τανυστικού πεδίου T . Με βάση τον ορισμό (2.8.5) της παραγώγου Lie, συμπεραίνουμε ότι η ϕ_t αποτελεί μονοπαραμετρική οικογένεια συμμετριών του τανυστή T αν και μόνο αν η παράγωγος Lie του T κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου V που γεννά τη ϕ_t μηδενίζεται παντού στην M :

$$L_V T = 0 \quad (2.8.12)$$

Οι πιο σημαντικές συμμετρίες στην γενική σχετικότητα είναι αυτές της μετρικής. Αν ο διαφορομορφισμός ϕ είναι μια συνεχής συμμετρία της μετρικής, ισχύει δηλαδή:

$$\phi^* g = g \quad (2.8.13)$$

τότε η ϕ καλείται **ισομετρία** (isometry). Η αντίστοιχη μονοπαραμετρική οικογένεια ισομετριών ϕ_t παράγεται από ένα διανυσματικό πεδίο ξ το οποίο ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο Killing** (Killing vector field) και ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$L_\xi g = 0 \quad (2.8.14)$$

Η συνθήκη αυτή υποδηλώνει ότι ένα διάνυσμα Killing δείχνει προς την κατεύθυνση όπου η μετρική παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς καθώς κινούμαστε κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης του διανυσματικού πεδίου Killing ξ , η τοπική γεωμετρία δεν αλλάζει αφού η μετρική μένει αμετάβλητη στη διαδρομή αυτή. Με όρους συνιστωσών της παραγώγου Lie και χρησιμοποιώντας τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇_μ της σύνδεσης Levi-Civita για να γράψουμε τις συνιστώσες αυτές, η πιο πάνω συνθήκη

έπεται:

$$L_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \xi^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \nabla_\mu \xi^\rho + g_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\rho = 0$$

Ισοδύναμα, εξαιτίας της συμβατότητας της σύνδεσης με τη μετρική:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (2.8.15)$$

Η εξίσωση (2.8.15) την οποία ικανοποιεί το διανυσματικό πεδίο Killing ξ λέγεται **εξίσωση του Killing** (Killing's equation). Αποδεικνύεται ότι αν ο χωρόχρονος διαθέτει ένα διάνυσμα Killing, μπορεί να βρεθεί ένα ειδικό σύστημα συντεταγμένων, τέτοιο ώστε η μετρική να είναι ανεξάρτητη από μια συγκεκριμένη συντεταγμένη x^κ του συστήματος αυτού. Η κατασκευή του γίνεται ως εξής: έστω διάνυσμα Killing ξ , τότε επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων με άξονα x^κ που να συμπίπτει με την κατεύθυνση του ξ δηλαδή $\xi = \partial_\kappa \Rightarrow \xi^\mu = \delta^\mu_\kappa$ και σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη του Killing (2.8.14) δίνει:

$$L_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \delta^\rho_\kappa \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \delta^\rho_\kappa + g_{\mu\rho} \partial_\nu \delta^\rho_\kappa \Rightarrow \partial_\kappa g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.8.16)$$

οπότε οι συνιστώσες της μετρικής είναι πράγματι ανεξάρτητες από τη συντεταγμένη x^κ του ειδικού συστήματος συντεταγμένων που κατασκευάσαμε. Αντιστρόφως, αν στο σύστημα συντεταγμένων που επιλέξαμε υπάρχει κάποια συντεταγμένη x^κ για την οποία $\partial_\kappa g_{\mu\nu} = 0$ (για κάθε μ, ν) τότε το διάνυσμα ∂_κ είναι διάνυσμα Killing. Προφανώς σε ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων τα διανύσματα Killing ενδέχεται να μην εμφανίζονται υπό μορφή συντεταγμένων από τις οποίες δεν εξαρτάται η μετρική. Γενικά, μπορεί να δειχθεί ότι μια n -διάστατη μέγιστα συμμετρική (maximally symmetric) πολλαπλότητα επιδέχεται το πολύ $n(n+1)/2$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα Killing.

Σημείωση: Αν ένας χωρόχρονος επιδέχεται χρονοειδές διάνυσμα Killing τότε ονομάζεται **στάσιμος** (stationary). Προσαρμόζοντας το σύστημα συντεταγμένων ώστε ο άξονας της χρονικής συντεταγμένης $x^0 = t$ να συμπίπτει με το διάνυσμα Killing, οι συνιστώσες της μετρικής δεν εξαρτώνται από τον χρόνο t .

Σημείωση: Αν ένας χωρόχρονος επιδέχεται χρονοειδές διάνυσμα Killing (είναι στάσιμος) και επιπρόσθετα υπάρχει χωροειδής υπερεπιφάνεια Σ κάθετη στο χρονοειδές διάνυσμα Killing, τότε ονομάζεται **στατικός** (static). Αυτό έπεται ότι παραμένει αναλλοίωτος κάτω από την αντιστροφή χρόνου $t \rightarrow -t$.

2.9 Συναλλοίωτη Παράγωγος - Covariant Derivative

Προκειμένου να ορίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο, χρειάζεται να εφοδιάσουμε την πολλαπλότητα M με μια επιπρόσθετη δομή, την **αφινική σύνδεση** (affine connection). Αν $\mathfrak{X}(M)$ το σύνολο λείων διανυσματικών πεδίων στην M τότε η αφινική σύνδεση ορίζεται ως η απεικόνιση $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ η οποία δρα σε δύο λεία διανυσματικά πεδία V και W και δίνει ένα άλλο διανυσματικό πεδίο:

$$\nabla(V, W) \equiv \nabla_V W \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.9.1)$$

Ο τελεστής ∇_V καλείται **συναλλοίωτη κατευθυνόμενη παράγωγος** (directional covariant derivative) κατά την κατεύθυνση του διανύσματος V . Αξιώνουμε να διαθέτει τις πιο κάτω ιδιότητες, στα πλαίσια της αφινικής σύνδεσης:

Ιδιότητες Αφινικής Σύνδεσης

$$(i) \nabla_V(X + Y) = \nabla_V X + \nabla_V Y$$

$$(ii) \nabla_{(fV+gU)}X = f\nabla_V X + g\nabla_U X$$

$$(iii) \nabla_V(fX) = f\nabla_V X + (\nabla_V f)X = f\nabla_V X + V(f)X$$

όπου $V, U, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ και f, g λείες βαθμωτές συναρτήσεις στην M .

Στην ιδιότητα (iii) αξιώσαμε η συναλλοιώτη παράγωγος της βαθμωτής συνάρτησης f κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου V να ανάγεται στη δράση του V πάνω στην f δηλαδή:

$$\nabla_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f \quad (2.9.2)$$

Αυτό βάσει της ιδιότητας (ii) συνεπάγεται ότι η συναλλοιώτη παράγωγος ανάγεται στη συνήθη μερική παράγωγο όταν δρα σε βαθμωτές συναρτήσεις:

$$\nabla_\mu f = \partial_\mu f \quad (2.9.3)$$

Η αφινική σύνδεση, πέρα από απεικόνιση δύο διανυσματικών πεδίων σε ένα τρίτο, μπορεί να ιδωθεί εναλλακτικά ως τελεστής παραγωγίσης ο οποίος απεικονίζει το διανυσματικό πεδίο W - τανυστή τάξης $(1, 0)$ σε έναν τανυστή ∇W τάξης $(1, 1)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\nabla W(\omega, V) = \nabla_V W(\omega) \quad (2.9.4)$$

Γενικεύοντας, ο τελεστής ∇ απεικονίζει λείους τανυστές T τάξης (r, s) σε τανυστές ∇T τάξης $(r, s + 1)$, βάσει της σχέσης:

$$\nabla T(\omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, U_s, V) = \nabla_V T(\omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, U_s) \quad (2.9.5)$$

Ο τανυστής ∇T ονομάζεται **ολικό διαφορικό / ολική συναλλοιώτη παράγωγος** (gradient / total covariant derivative) του τανυστή T . Οι συνιστώσες του ∇T σε ένα σύστημα συντεταγμένων γράφονται:

$$(\nabla T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s \mu} \equiv \nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \equiv T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s; \mu} \quad (2.9.6)$$

Στην πιο πάνω σχέση εμφανίζεται η συναλλοιώτη παράγωγος ∇_μ ως προς τη συντεταγμένη x^μ . Αν $\{e_\nu\}$ τα διανύσματα βάσης του συστήματος συντεταγμένων, η συναλλοιώτη παράγωγος ως προς κάποια συντεταγμένη x^κ συμβολίζεται ∇_κ και ταυτίζεται με την κατευθυνόμενη συναλλοιώτη παράγωγο στην κατεύθυνση του διανύσματος βάσης e_κ . Γράφουμε δηλαδή:

$$\nabla_\kappa \equiv \nabla_{e_\kappa} \quad (2.9.7)$$

Χρειάζεται τώρα να ορίσουμε αξιωματικά τη συναλλοιώτη παράγωγο, απαιτώντας να ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες επιπρόσθετες αυτών της αφινικής σύνδεσης. Κατ' αρχήν οφείλει να είναι τελεστής παραγωγίσης, δηλαδή γραμμικός τελεστής που υπακούει στον κανόνα Leibniz:

$$1. \text{ Γραμμικότητα: } \nabla_\mu(aT + bS) = a\nabla_\mu T + b\nabla_\mu S$$

$$2. \text{ Κανόνας Leibniz: } \nabla_\mu(T \otimes S) = (\nabla_\mu T) \otimes S + T \otimes (\nabla_\mu S)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ σταθερές και T, S τανυστές ίδιας τάξης στην ιδιότητα (1), αυθαίρετης τάξης στην (2).

Επιπλέον, οι πράξεις της συναλλοίωτης παραγωγίσης και της συστολής δεικτών (contraction) πρέπει να μετατίθενται. Δηλαδή λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα είτε εκτελέσουμε το contraction του τανυστή και έπειτα το παραγωγίσουμε, είτε παραγωγίσουμε πρώτα τον τανυστή και λάβουμε το contraction του αποτελέσματος. Αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\nabla_\mu \delta^\lambda_\sigma = 0$.

$$\mathbf{3. \text{Μετατίθεται με contractions:}} \quad \nabla_\mu (T^{\nu\lambda}_{\lambda\rho}) = \nabla_\mu (\delta^\lambda_\sigma T^{\nu\sigma}_{\lambda\rho}) = \delta^\lambda_\sigma (\nabla_\mu T)^{\nu\sigma}_{\lambda\rho} = (\nabla_\mu T)^{\nu\lambda}_{\lambda\rho} = (\nabla T)^{\nu\lambda}_{\lambda\rho\mu}$$

Το γεγονός ότι η συναλλοίωτη παράγωγος μετατίθεται με τα contractions, σε συνδυασμό με τον κανόνα Leibniz, οδηγεί στην ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \nabla_V (T(\omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, U_s)) &= (\nabla_V T)(\omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, U_s) \\ &+ T(\nabla_V \omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, U_s) + \dots + T(\omega_1, \dots, \nabla_V \omega_r, U_1, \dots, U_s) \\ &+ T(\omega_1, \dots, \omega_r, \nabla_V U_1, \dots, U_s) + \dots + T(\omega_1, \dots, \omega_r, U_1, \dots, \nabla_V U_s) \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

Υπενθυμίζουμε ότι από τις ιδιότητες της αφινικής σύνδεσης, αξιώνουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης f ανάγεται στη συνήθη μερική παράγωγο:

$$\mathbf{4. \text{Ανάγεται στη μερική παράγωγο για βαθμωτές συναρτήσεις:}} \quad \nabla_\mu f = \partial_\mu f$$

Όπως αναφέραμε, δεν υπάρχει άμεσος τρόπος να διαφορίσουμε τανυστές καθότι πρέπει να λάβουμε τη διαφορά αντικειμένων που ορίζονται σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας, δηλαδή σε διαφορετικούς χώρους με διαφορετικά διανύσματα βάσης. Δεδομένου ότι τα διανύσματα βάσης αλλάζουν εν γένει από σημείο σε σημείο της πολλαπλότητας (εξαρτώνται από τη θέση/συντεταγμένες), ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε τον ρυθμό μεταβολής των διανυσμάτων βάσης ως προς τις συντεταγμένες που επιλέξαμε. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της σύνδεσης, η οποία φέρει το όνομα αυτό διότι συσχετίζει τους εφαπτόμενους χώρους δύο διαφορετικών σημείων και συγκεκριμένα παρέχει τρόπο για να μεταφέρουμε παράλληλα διανύσματα. Η αφινική σύνδεση καθορίζεται πλήρως από n^3 το πλήθος βαθμωτούς συντελεστές (αριθμούς) $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ που λέγονται **συντελεστές σύνδεσης** (connection coefficients). Οι συντελεστές αυτοί περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο τα διανύσματα βάσης μεταβάλλονται καθώς μεταβαίνουμε από ένα σημείο σε ένα άλλο, ισοδύναμα από έναν εφαπτόμενο χώρο σε έναν άλλο, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\nabla_\alpha e_\beta = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} e_\mu \quad (2.9.9)$$

Ο πιο πάνω ορισμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: εφόσον το $\nabla_\alpha e_\beta$ είναι διάνυσμα, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης με τους συντελεστές $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ να δίνουν τον κανόνα για τη μεταβολή των διανυσμάτων βάσης. Ο άνω δείκτης μ αντιστοιχεί στη μ -συνιστώσα του $\nabla_\alpha e_\beta$, δηλαδή $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = (\nabla_\alpha e_\beta)^\mu$, ο δείκτης β αναφέρεται στο διάνυσμα βάσης που παραγωγίζεται και ο δείκτης α στη συντεταγμένη ως προς την οποία γίνεται η παραγωγήιση.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.9.9) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο ενός διανυσματικού πεδίου V :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V &= \nabla_\mu (V^\nu e_\nu) = (\nabla_\mu V^\nu) e_\nu + V^\nu (\nabla_\mu e_\nu) = \partial_\mu V^\nu e_\nu + V^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho \\ &= (\partial_\mu V^\nu + V^\rho \Gamma^\nu_{\mu\rho}) e_\nu \end{aligned}$$

Δηλαδή η ν -συνιστώσα του διανύσματος $\nabla_\mu V$ δίνεται από τη σχέση:

$$(\nabla_\mu V)^\nu \equiv \nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho \quad (2.9.10)$$

Κατ' αναλογία, οι συνιστώσες της κατευθυνόμενης συναλλοιώτης παραγώγου του V κατά την κατεύθυνση του U δίνονται από τη σχέση:

$$(\nabla_U V)^\nu \equiv \nabla_U V^\nu = \nabla_{U^\mu e_\mu} V^\nu = U^\mu \nabla_\mu V^\nu = U^\mu \partial_\mu V^\nu + U^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho \quad (2.9.11)$$

Υπογραμμίζεται ότι οι συντελεστές σύνδεσης δεν αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή τάξης (1, 2) (εντούτοις η διαφορά δύο συντελεστών σύνδεσης είναι πράγματι (1, 2) τανυστής). Μπορούμε να διαπιστώσουμε το γεγονός αυτό εξετάζοντας τον μετασχηματισμό των συντελεστών σύνδεσης κάτω από αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Εφόσον το $\nabla V \equiv \nabla_\mu V^\nu \theta^\mu \otimes e_\nu$ αποτελεί τανυστή τάξης (1, 1), κάτω από αλλαγή συντεταγμένων $\{e_\mu\} \rightarrow \{\tilde{e}_\mu\}$ οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\nabla_{\tilde{e}_\mu} \tilde{V}^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha V^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V^\rho \quad (2.9.12)$$

Ταυτόχρονα, στο νέο σύστημα συντεταγμένων, η (2.9.10) δίνει:

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{e}_\mu} \tilde{V}^\nu &= \frac{\partial \tilde{V}^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu \tilde{V}^\lambda = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) + \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu V^\rho \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) + \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu V^\rho \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} V^\rho + \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu V^\rho \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

Εξισώνοντας τις (2.9.12)-(2.9.13) παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι ίδιος στα δύο μέλη και απαλείφεται και η εξίσωση που προκύπτει ισχύει για αυθαίρετο V^ρ . Λύνοντας ως προς τους συντελεστές $\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων, λαμβάνουμε τη σχέση μετασχηματισμού των συντελεστών σύνδεσης:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} \quad (2.9.14)$$

Αν και ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό ενός (1, 2) τανυστή, ο δεύτερος όρος που δεν εξαρτάται από τη σύνδεση σπάει την τανυστική συμπεριφορά. Ο δεύτερος όρος είναι χαρακτηριστικός της σύνδεσης και είναι απαραίτητος ώστε, παρόλο που οι όροι $\partial_\mu V^\nu$ και $\Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho$ ξεχωριστά δεν αποτελούν συνιστώσες τανυστών, το άθροισμά τους $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho$ μετασχηματίζεται όπως οι συνιστώσες ενός τανυστή (1, 1) και συγκεκριμένα του ∇V .

Προκειμένου να βρούμε τη συναλλοιώτη παράγωγο ενός 1-form παίρνουμε την συναλλοιώτη παράγωγο του contraction $\omega(V) \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του Leibniz:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\omega(V)) &= (\nabla_\mu \omega)(V) + \omega(\nabla_\mu V) \\ (\nabla_\mu \omega)_\nu V^\nu &= \nabla_\mu(\omega_\nu V^\nu) - \omega_\nu(\nabla_\mu V)^\nu \\ &= \partial_\mu(\omega_\nu V^\nu) - \omega_\nu(\partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho) \\ &= V^\nu \partial_\mu \omega_\nu + \omega_\nu \partial_\mu V^\nu - \omega_\nu \partial_\mu V^\nu - \omega_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho \\ &= V^\nu \partial_\mu \omega_\nu - \omega_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu \end{aligned}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει για κάθε V^ν άρα καταλήγουμε:

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu \equiv \nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho \quad (2.9.15)$$

Κατά συνέπεια, αν $\{\theta^\mu\}$ η βάση των 1-forms, οι συντελεστές σύνδεσης για τα 1-forms ορίζονται:

$$\nabla_\alpha \theta^\beta = -\Gamma_{\alpha\rho}^\beta \theta^\rho \quad (2.9.16)$$

Γνωρίζοντας τη δράση της συναλλοίωτης παράγωγου στα διανύσματα βάσης καθώς και στα 1-forms βάσης, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δράση της σε έναν γενικό τανυστή τάξης (r, s) . Οι συνιστώσες της συναλλοίωτης παραγώγου του τανυστή T δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu T)^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} &\equiv \nabla_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \partial_\mu T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \\ &+ \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha_1} T^{\rho \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} + \dots + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha_r} T^{\alpha_1 \dots \rho}_{\beta_1 \dots \beta_s} \\ &- \Gamma_{\mu\beta_1}^\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\rho \dots \beta_s} - \dots - \Gamma_{\mu\beta_s}^\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \rho} \end{aligned}$$

2.9.1 Σύνδεση Levi-Civita - Levi-Civita Connection

Οι ιδιότητες που αξιώσαμε μέχρι στιγμής για τη συναλλοίωτη παράγωγο δεν αρκούν για να την προσδιορίσουν με μοναδικό τρόπο, διότι υπάρχει ελευθερία στην επιλογή της σύνδεσης, δηλαδή των συμβόλων $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$. Εν δυνάμει υπάρχουν άπειροι τρόποι να επιλέξουμε τη σύνδεση, απλά επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων και σε αυτό το σύστημα ορίζουμε κατά βούληση $n^3 = 4^3 = 64$ σύμβολα που μετασχηματίζονται βάσει της (2.9.14). Αποδεικνύεται ωστόσο ότι αν η πολλαπλότητα εφοδιαστεί με μετρική, όπως συμβαίνει στη γενική σχετικότητα όπου ο χωρόχρονος εφοδιάζεται με μια Lorentzian μετρική, τότε η μετρική αυτή ορίζει μοναδικά μια συγκεκριμένη σύνδεση που λέγεται σύνδεση Levi-Civita. Η σύνδεση Levi-Civita ικανοποιεί δύο επιπλέον ιδιότητες: μηδενική στρέψη και συμβατότητα με τη μετρική, οι οποίες καθορίζουν πλήρως και με μοναδικό τρόπο τους συντελεστές σύνδεσης και κατ' επέκταση τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇_μ του χωρόχρονου.

Θεώρημα 2.3: Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann - Σύνδεση Levi-Civita

Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με τη μετρική g . Τότε υπάρχει μια μοναδική αφινική σύνδεση ∇ η οποία είναι:

(i) **Χωρίς στρέψη (Torsion-free):** $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$

(ii) **Συμβατή με τη μετρική (Metric-compatible):** $\nabla_V g = 0$

για κάθε $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$ και $[X, Y]$ το Lie bracket.

Η σύνδεση αυτή λέγεται Levi-Civita ή Riemannian ή μετρική σύνδεση και προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τη μετρική. Οι συντελεστές της σύνδεσης Levi-Civita ονομάζονται σύμβολα Christoffel (Christoffel symbols).

Ο λόγος που η ιδιότητα (i) αναφέρει ότι η σύνδεση έχει μηδενική στρέψη είναι επειδή ισοδυναμεί με τον μηδενισμό του τανυστή στρέψης (torsion tensor) T ο οποίος είναι τανυστής τάξης $(1, 2)$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$T(\omega, X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \quad (2.9.17)$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, ο τανυστής στρέψης μπορεί να ειδωθεί ως η απεικόνιση $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ δύο διανυσματικών πεδίων σε ένα τρίτο: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.

Οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης στο (ολονομικό) σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης τα coordinate vectors $\{\partial_\mu\}$ για τα οποία προφανώς ισχύει $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ είναι:

$$\begin{aligned} T^\rho_{\mu\nu} &= T(dx^\rho, \partial_\mu, \partial_\nu) = dx^\rho(\nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu - [\partial_\mu, \partial_\nu]) \\ &= dx^\rho(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e_\lambda) \\ &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} dx^\rho(e_\lambda) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} dx^\rho(e_\lambda) \\ &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta^\rho_\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta^\rho_\lambda \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \\ &= 2\Gamma^\rho_{[\mu\nu]} \end{aligned}$$

Άρα η απαίτηση η σύνδεση να έχει μηδενική στρέψη, $T = 0 \Leftrightarrow T^\rho_{\mu\nu} = 0$, είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα τα σύμβολα Christoffel να είναι συμμετρικά στους κάτω δείκτες τους:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \quad (2.9.18)$$

Για τον λόγο αυτό μια αφινική σύνδεση ∇ που ικανοποιεί την ιδιότητα (i) λέγεται συμμετρική. Στη γενική σχετικότητα θα θεωρούμε πάντοτε ότι η σύνδεση είναι η σύνδεση Levi-Civita, άρα δεν έχει στρέψη (είναι συμμετρική). Ορισμένες γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας (π.χ ECSK theory) χρησιμοποιούν συνδέσεις με στρέψη.

Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι ο μεταθέτης των συναλλοιώτων παραγώγων μιας βαθμωτής συνάρτησης f ορίζεται μέσω του τανυστή στρέψης ως εξής:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f = (\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu})\partial_\rho f = -T^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho f \quad (2.9.19)$$

Συνεπώς ο μηδενισμός του τανυστή στρέψης είναι επίσης ισοδύναμος με την ιδιότητα οι συναλλοιώτες παράγωγοι να μετατίθενται όταν δρουν σε βαθμωτές συναρτήσεις:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f \quad (2.9.20)$$

Η ιδιότητα (ii) αναφέρει ότι η σύνδεση ∇ είναι συμβατή με τη μετρική, δηλαδή η μετρική είναι συναλλοιώτα σταθερή (covariantly constant): $\nabla g = 0$ γεγονός που σημαίνει ότι:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9.21)$$

Σημείωση: Η συνθήκη (ii) για τη συμβατότητα της σύνδεσης ∇ με τη μετρική μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής, με χρήση του κανόνα Leibniz:

$$\begin{aligned} \nabla_V[g(X, Y)] &= (\nabla_V g)(X, Y) + g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y) \\ V[g(X, Y)] &= g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y) \end{aligned}$$

2.9.2 Σύμβολα Christoffel - Christoffel Symbols

Μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.3, να δείξουμε δηλαδή την ύπαρξη και μοναδικότητα της σύνδεσης Levi-Civita, υπολογίζοντας αναλυτικά τα σύμβολα Christoffel από τη μετρική. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες (i) της μηδενικής στρέψης ($\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$) και (ii) της συμβατότητας της σύνδεσης με τη μετρική ($\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$).

Από τη συμβατότητα της σύνδεσης με τη μετρική, λαμβάνουμε τις 3 πιο κάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} &= \partial_{\rho}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda} = 0 \\ \nabla_{\mu}g_{\nu\rho} &= \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}g_{\nu\lambda} = 0 \\ \nabla_{\nu}g_{\rho\mu} &= \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\rho\lambda} = 0\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση με -1 και τις προσθέτουμε κατά μέλη στην πρώτη. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρικότητα των συμβόλων Christoffel και της μετρικής παίρνουμε:

$$\partial_{\rho}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\nu}g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\rho} = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την πιο πάνω εξίσωση με τον αντίστροφο της μετρικής $g^{\sigma\rho}$ για τον οποίο ισχύει $g^{\sigma\rho}g_{\lambda\rho} = \delta^{\sigma}_{\lambda}$. Ακολουθώντας λύνουμε ως προς τα σύμβολα Christoffel, οπότε καταλήγουμε στον τύπο:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (2.9.22)$$

Τα σύμβολα Christoffel εξαρτώνται από τη μετρική, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε. Επομένως σε κάθε σύστημα συντεταγμένων υπάρχει διαφορετικός αριθμός μη-μηδενικών συμβόλων Christoffel. Εν γένει, σε μια n -διάστατη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με τη σύνδεση Levi-Civita, υπάρχουν το πολύ $n^2(n+1)/2$ ανεξάρτητα σύμβολα Christoffel (n επιλογές για τον άνω δείκτη επί $n(n+1)/2$ επιλογές για τους συμμετρικούς κάτω δείκτες).

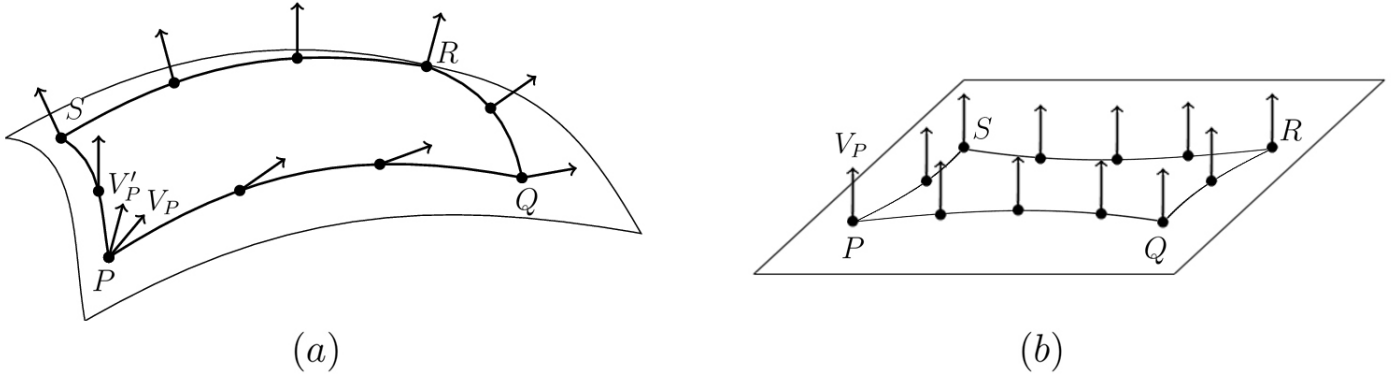
Σημείωση: Σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς (LIF) $x^{\hat{\mu}}$ γύρω από ένα σημείο p του χωρόχρονου, οι πρώτες παράγωγοι της μετρικής μηδενίζονται: $\partial_{\hat{\rho}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_p = 0$. Αυτό σύμφωνα με την (2.9.22) συνεπάγεται ότι στο σημείο p όλα τα σύμβολα Christoffel είναι ίσα με το μηδέν: $\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}}(p) = 0$. Ωστόσο οι παράγωγοι $\partial_{\hat{\lambda}}\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}}|_p$ των συμβόλων Christoffel στο p (που όπως θα δούμε εισέρχονται στον τανυστή Riemann) εν γένει δεν μηδενίζονται, καθότι υπολογίζονται από τις δεύτερες παραγώγους της μετρικής οι οποίες γενικά $\partial_{\hat{\lambda}}\partial_{\hat{\rho}}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_p \neq 0$.

2.9.3 Παράλληλη Μεταφορά - Parallel Transport

Έχοντας ορίσει τη συναλλοίωτη παράγωγο, μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της παράλληλης μεταφοράς ενός διανύσματος ή γενικότερα ενός τανυστή, κατά μήκος μιας καμπύλης. Με τον όρο παράλληλη μεταφορά εννοούμε ότι για κάθε απειροστή μετατόπιση του διανύσματος πάνω σε μια καμπύλη, το διάνυσμα που προκύπτει διατηρεί την ίδια κατεύθυνση με το αρχικό καθώς και το ίδιο μήκος. Βέβαια, αν η πολλαπλότητα είναι καμπυλωμένη, τότε αν μεταφέρουμε παράλληλα ένα διάνυσμα κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, διασφαλίζοντας πως σε κάθε επόμενη θέση το διάνυσμα είναι παράλληλο στη μορφή που είχε στην προηγούμενη θέση, θα διαπιστώσουμε φτάνοντας στην αρχική θέση ότι το προκύπτον παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα έχει περιστραφεί ως προς το αρχικό διάνυσμα. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει ότι σε έναν καμπυλωμένο χώρο η έννοια της παραλλη-

λότητας είναι τοπική και όχι καθολική, όπως συμβαίνει στον επίπεδο χώρο. Ειδικότερα, η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος από ένα σημείο μιας πολλαπλότητας σε ένα άλλο, εξαρτάται:

1. Από την καμπύλη που συνδέει τα δύο σημεία
2. Από τη σύνδεση της πολλαπλότητας



Σχήμα 2.9.3.1: (a) Παράλληλη μεταφορά του διανύσματος V_P στην κλειστή διαδρομή $PQRS$ μιας καμπυλωμένης πολλαπλότητας. Το διάνυσμα V'_P που προκύπτει έχει περιστραφεί σε σχέση με το αρχικό διάνυσμα V_P κατά μια γωνία που εξαρτάται από τη διαδρομή και την καμπυλότητα της πολλαπλότητας. (b) Παράλληλη μεταφορά του διανύσματος V_P στην κλειστή διαδρομή $PQRS$ μιας επίπεδης πολλαπλότητας. Το τελικό διάνυσμα, όπως και κάθε άλλο παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα κατά μήκος της διαδρομής, συμπίπτει με το αρχικό.

Αφού λοιπόν σε μια καμπυλωμένη πολλαπλότητα δεν μπορούμε να διατηρήσουμε ένα διάνυσμα απόλυτα σταθερό, μπορούμε να ορίσουμε την παράλληλη μετατόπιση ώστε να προνοεί ότι το διάνυσμα παραμένει συναλλοίωτα σταθερό πάνω σε μια καμπύλη υπό την έννοια ότι διατηρεί τη γενική κατεύθυνση του (δεν "στρίβει") αλλά και το μήκος του. Η απαίτηση αυτή θα οδηγήσει σε μια εξίσωση (εξίσωση παράλληλης μεταφοράς) που περιγράφει τη μεταβολή των συνιστωσών ενός διανύσματος κατά μήκος μιας καμπύλης, με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα να παραμένει συναλλοίωτα σταθερό.

Έστω λεία καμπύλη $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ με παράμετρο λ και συντεταγμένες $x^\mu(\lambda)$, η οποία έχει εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $V = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu = V^\mu \partial_\mu$. Η συναλλοιώτη παράγωγος $\frac{D}{d\lambda}$ κατά μήκος της καμπύλης γ ορίζεται ως η συναλλοιώτη κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου V στην γ :

$$\frac{D}{d\lambda} = \nabla_V = V^\mu \nabla_\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (2.9.23)$$

Ορισμός 2.13: Παράλληλη μεταφορά (Parallel transport)

Θεωρούμε λεία καμπύλη $\gamma : \lambda \rightarrow \gamma(\lambda) \equiv x^\mu(\lambda)$ με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο V . Λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X είναι παράλληλο ή μεταφέρεται παράλληλα (parallelly transported) ή είναι συναλλοίωτα σταθερό (covariantly constant) κατά μήκος της καμπύλης γ αν:

$$\frac{D}{d\lambda} X = 0 \Leftrightarrow \nabla_V X = 0 \quad (2.9.24)$$

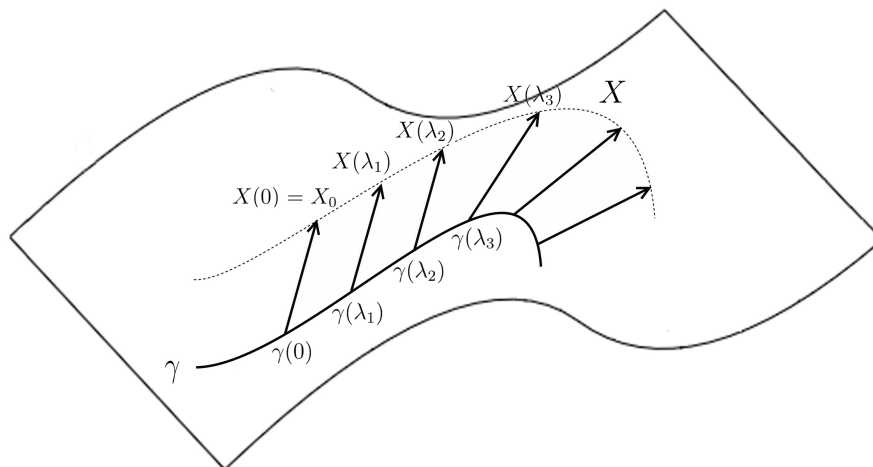
σε κάθε σημείο της γ . Με όρους συνιστωσών, η συνθήκη 2.9.24 δίνει:

$$\frac{dX^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} X^\rho = 0 \quad (2.9.25)$$

Η (2.9.25) λέγεται εξίσωση της παράλληλης μεταφοράς και αποτελεί κατ' ακρίβεια ένα σύστημα n πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων 1^{ου} βαθμού με αγνώστους τις συνιστώσες $X^\mu(\lambda) \equiv X^\mu(\gamma(\lambda))$ του παράλληλου διανυσματικού πεδίου X . Δεδομένου του διανύσματος $X_0 \in T_{\gamma(0)}M$ σε κάποιο αρχικό σημείο $\gamma(0)$ της καμπύλης, το διανυσματικό πεδίο X προσδιορίζεται μοναδικά κατά μήκος της καμπύλης ως η λύση της εξίσωσης (2.9.25) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $X(0) = X_0$ (δηλαδή το X είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $\nabla_V X = 0$, $X(0) = X_0$).

Σημείωση: Για να περιγράψουμε την παράλληλη μεταφορά χρειαζόμαστε μόνο τις τιμές του X επί της $\gamma(\lambda)$ (άρα το X μπορεί να ορίζεται μόνο κατά μήκος της $\gamma(\lambda)$ και όχι παντού στην M).

Η τιμή του παράλληλου πεδίου X στο σημείο $\gamma(s)$ αντιστοιχεί στο διάνυσμα $X(s) \in T_{\gamma(s)}M$ το οποίο ονομάζεται παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα του X_0 στο $\gamma(s)$. Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ παίρνουμε διαφορετικό σημείο $\gamma(\lambda)$ επάνω στην καμπύλη, στο οποίο το παράλληλο διανυσματικό πεδίο X απεικονίζει ένα μοναδικό παράλληλο διάνυσμα $X(\lambda) \in T_{\gamma(\lambda)}M$. Έτσι το αρχικό διάνυσμα X_0 ορίζει με μοναδικό τρόπο ένα παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της καμπύλης, με το καθένα να ορίζεται στο σημείο $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$ και να έχει συνιστώσες $X^\mu(\lambda)$.



Σχήμα 2.9.3.2: Το παράλληλο πεδίο X στην καμπύλη γ , που προκύπτει ως μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $\nabla_V X = 0$, $X(0) = X_0$ απεικονίζει σε κάθε σημείο $\gamma(\lambda)$ της καμπύλης ένα μοναδικό παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα $X(\lambda)$.

Σημείωση: Ο ορισμός της παράλληλης μεταφοράς γενικεύεται άμεσα και σε τανυστικά πεδία οποιασδήποτε τάξης. Το τανυστικό πεδίο T μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της καμπύλης γ με παράμετρο λ και εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο V αν:

$$\frac{D}{d\lambda} T = \nabla_V T = 0 \quad (2.9.26)$$

Στη γενική σχετικότητα όπου η σύνδεση είναι η Levi-Civita, η μετρική μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης εξαιτίας της συμβατότητας της σύνδεσης με τη μετρική ($\nabla_V g = 0$). Αυτό συνεπάγεται ότι το εσωτερικό γινόμενο $g(X, Y)$ δύο διανυσμάτων X, Y που μεταφέρονται παράλληλα πάνω σε μια καμπύλη $\gamma(\lambda)$ με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο V (οπότε $\nabla_V X = 0$ και

$\nabla_V Y = 0$) παραμένει αμετάβλητο κατά μήκος της καμπύλης:

$$\frac{D}{d\lambda}g(X, Y) = \nabla_V(g(X, Y)) = (\nabla_V g)(X, Y) + g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y) = 0 \quad (2.9.27)$$

Έστω δύο σημεία $\gamma(\lambda_0) \in M$ και $\gamma(\lambda) \in M$ από τα οποία διέρχεται η καμπύλη γ . Η παράλληλη μετατόπιση επάγει έναν γραμμικό (αφού η 2.9.25 είναι γραμμική) ισομορφισμό

$$\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma : T_{\gamma(\lambda_0)}M \rightarrow T_{\gamma(\lambda)}M \quad (2.9.28)$$

που απεικονίζει ένα διάνυσμα $X_0 = X(\lambda_0)$ του εφαπτόμενου χώρου $T_{\gamma(\lambda_0)}M$ στο παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα $X(\lambda) \in T_{\gamma(\lambda)}M$ κατά μήκος της γ :

$$\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma(X(\lambda_0)) = X(\lambda) \quad (2.9.29)$$

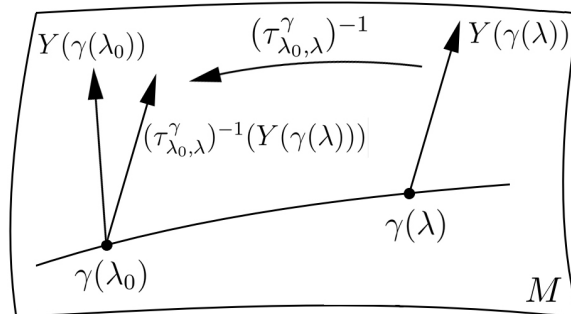
όπου X το μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ με $X(\gamma(\lambda_0)) = X_0$. Ο ισομορφισμός $\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma$ λέγεται παράλληλη μετατόπιση από το σημείο $\gamma(\lambda_0)$ στο $\gamma(\lambda)$ κατά μήκος της καμπύλης γ και διαθέτει τις ιδιότητες:

1. $\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma \circ \tau_{s, \lambda_0}^\gamma = \tau_{s, \lambda}^\gamma$
2. $\tau_{\lambda, \lambda}^\gamma = \mathbb{1}$

Παρ' όλο που ορίσαμε πρώτα την συναλλοιώτη παράγωγο και μέσω αυτής την παράλληλη μετατόπιση, θα μπορούσαμε να ορίσουμε πρώτα την παράλληλη μετατόπιση υπό την έννοια του ισομορφισμού μεταξύ εφαπτόμενων χώρων και μέσω αυτής να ανακτήσουμε την αφινική σύνδεση. Αποδεικνύεται ότι η παράλληλη μετατόπιση καθορίζει πλήρως τη σύνδεση ∇ της πολλαπλότητας και κατ' επέκταση τη συναλλοιώτη παράγωγο. Αν γ λεία καμπύλη με παράμετρο λ και εφαπτόμενο διάνυσμα V_p στο σημείο $p = \gamma(\lambda_0)$ τότε ορίζουμε τη συναλλοιώτη παράγωγο του διανυσματικού πεδίου Y κατά την κατεύθυνση του διανύσματος V_p , υπολογισμένη στο σημείο p :

$$(\nabla_{V_p} Y)_p = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{(\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma)^{-1}(Y(\gamma(\lambda))) - Y(\gamma(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} \quad (2.9.30)$$

Ο ορισμός (2.9.30) της συναλλοιώτης παραγώγου υπονοεί ότι μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $Y_q = Y(\gamma(\lambda))$ από το σημείο $q = \gamma(\lambda)$ πίσω στο σημείο $p = \gamma(\lambda_0)$ μέσω της αντίστροφης απεικόνισης $(\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma)^{-1}$ και συγκρίνουμε το προκύπτον διάνυσμα με το διάνυσμα $Y_p = Y(\gamma(\lambda_0))$.



Σχήμα 2.9.3.3: Ορισμός της συναλλοιώτης παραγώγου του διανυσματικού πεδίου Y κατά την κατεύθυνση του διανύσματος X_0 , υπολογισμένη στο σημείο $p = \gamma(\lambda_0)$, με χρήση της παράλληλης μετατόπισης. Συγκρίνουμε το διάνυσμα $(\tau_{\lambda_0, \lambda}^\gamma)^{-1}(Y(\gamma(\lambda)))$ με το διάνυσμα $Y(\gamma(\lambda_0))$, καθότι και τα δύο ορίζονται στο σημείο p .

2.10 Γεωδαισιακές Καμπύλες- Geodesics

Η γεωμετρία του χωρόχρονου καθορίζει τις τροχιές που ακολουθούν τα ελεύθερα σωματίδια. Τα ελεύθερα σωματίδια, σωματίδια δηλαδή στα οποία δεν ασκούνται δυνάμεις (υπενθυμίζουμε ότι η βαρύτητα στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας δεν εκλαμβάνεται ως δύναμη αλλά είναι συνυφασμένη με τη γεωμετρία του χωρόχρονου) κινούνται στον χωρόχρονο πάνω σε κοσμικές γραμμές που λέγονται γεωδαισιακές ή γεωδαιτικές. Αναφερόμαστε πάντοτε σε σωματίδια των οποίων η μάζα είναι αρκούντως μικρή ώστε να αμελείται η επίδρασή της στη καμπυλότητα του χωρόχρονου, γι'αυτό και τα χαρακτηρίζουμε δοκιμαστικά σωματίδια. Προκειμένου να εξάγουμε την εξίσωση κίνησης - γεωδαισιακή εξίσωση ενός ελεύθερου δοκιμαστικού σωματιδίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο ισοδύναμους ορισμούς:

Ορισμός 2.14: Γεωδαισιακή Καμπύλη - Geodesic

Γεωδαισιακή ή γεωδαιτική ονομάζεται η λεία καμπύλη $\gamma : I \rightarrow M$:

1. της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα V μετατοπίζεται παράλληλα κατά μήκος της:

$$\nabla_V V = 0 \quad (2.10.1)$$

2. η οποία ελαχιστοποιεί το διάστημα/μεγιστοποιεί τον ιδιόχρονο ανάμεσα σε δύο σταθερά σημεία (γεγονότα) $A = \gamma(\lambda_A)$ και $B = \gamma(\lambda_B)$

$$\delta \tau = 0 \Rightarrow \delta \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left(-g_{\mu\nu}(\gamma(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda = 0 \quad (2.10.2)$$

Ο πρώτος ορισμός είναι ο "διαφορικός" ορισμός που αναφέρεται στο σχήμα της καμπύλης ενώ ο δεύτερος είναι ο "ολοκληρωτικός" ορισμός ο οποίος σχετίζεται με την αρχή των μεταβολών (εύρεση καμπύλης που καθιστά τον ιδιόχρονο ακρότατο). Νοείται ότι για να είναι οι δύο ορισμοί πράγματι ισοδύναμοι, ο χωρόχρονος πρέπει να είναι εφοδιασμένος με τη σύνδεση Levi-Civita.

Οι δύο ορισμοί γενικεύουν τις ιδιότητες που διαθέτει μια ευθεία γραμμή στον επίπεδο χώρο, ειδικότερα η ευθεία έχει την ιδιότητα να μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμα σ'αυτήν καθώς και την ιδιότητα να είναι η γραμμή ελάχιστου μήκους που συνδέει δύο σημεία. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι οι γεωδαισιακές καμπύλες αποτελούν την γενίκευση στον καμπυλωμένο χώρο της έννοιας της ευθείας γραμμής, είναι δηλαδή "οι πιο ευθείες" γραμμές ενός καμπυλωμένου χώρου υπό την έννοια ότι δεν "στρίβουν".

Με βάση τον πρώτο ορισμό, ο οποίος συνεπάγεται $\nabla_V V = 0 \Rightarrow \nabla_V V^\mu = 0$, λαμβάνουμε:

$$V^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0 \Rightarrow V^\nu \partial_\nu V^\mu + V^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho = 0$$

Από τον ορισμό του εφαπτόμενου διανύσματος V σε μια χρονοειδή καμπύλη (τετραταχύτητα) έχουμε ότι $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ και $V^\mu \partial_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}$ όπου τ ο ιδιόχρονος κατά μήκος της καμπύλης (για φωτεινές καμπύλες αντί του ιδιόχρονου τ χρησιμοποιείται μια άλλη παράμετρος λ). Αντικαθιστώντας τις

εκφράσεις αυτές στην πιο πάνω σχέση καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (2.10.3)$$

Η εξίσωση (2.10.3) ονομάζεται **γεωδαισιακή εξίσωση** (geodesic equation) και είναι ένα σύστημα n συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης για τις n συναρτήσεις $x^\mu(\tau)$ που αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της γεωδαισιακής καμπύλης $\gamma(\tau)$. Η $\gamma(\tau)$ που ικανοποιεί τη γεωδαισιακή εξίσωση (2.10.3) καλείται **αφινικά παραμετροποιημένη γεωδαισιακή καμπύλη**. Δεδομένης της αρχικής θέσης και της αρχικής ταχύτητας του σωματιδίου, δηλαδή αν δοθεί ένα σημείο $p = \gamma(0)$ με συνταγμένες x_p^μ και το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό με συνιστώσες V_p^μ , υπάρχει μια μοναδική γεωδαισιακή $\gamma(\tau) \equiv x^\mu(\tau)$ που διέρχεται από το p και έχει ως εφαπτόμενο διάνυσμα στο p το V_p .

$$\text{Αρχικές Συνθήκες} \quad \begin{cases} x^\mu(0) = x_p^\mu \\ \left. \frac{dx^\mu}{d\tau} \right|_{\tau=0} = V_p^\mu \end{cases} \quad (2.10.4)$$

Σημείωση: Μια ασθενέστερη συνθήκη για να είναι μια καμπύλη γεωδαισιακή είναι η $\nabla_V V = fV$ που οδηγεί στην εξίσωση $\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = f(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma}$ όπου f μια βαθμωτή συνάρτηση και σ μια γενική παράμετρος. Με κατάλληλη αναπαραμετροποίηση $\sigma \rightarrow \tau = \tau(\sigma)$ της καμπύλης μπορούμε πάντα να φέρουμε τη συνθήκη στη μορφή (2.10.1) που οδηγεί στη γεωδαισιακή εξίσωση (2.10.3).

Η παράμετρος τ της καμπύλης που ικανοποιεί τη συνθήκη $\nabla_V V = \frac{D}{d\tau} V = 0$ ονομάζεται **αφινική παράμετρος** (affine parameter) και μας επιτρέπει να γράψουμε τη γεωδαισιακή εξίσωση στην αφινική μορφή (2.10.3). Κάθε άλλη παράμετρος λ που συνδέεται γραμμικά με την αφινική παράμετρο τ δηλαδή $\lambda = a\tau + b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ σταθερές με $a \neq 0$, είναι επίσης αφινική παράμετρος αφού μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη γεωδαισιακή εξίσωση στην αφινική της μορφή.

Σημείωση: Στον επίπεδο χωρόχρονο με καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου τα σύμβολα Christoffel είναι μηδενικά $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$, η γεωδαισιακή εξίσωση ανάγεται στην $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$ η οποία αναφέρει ότι ελεύθερα σωματίδια κινούνται σε ευθείες γραμμές με σταθερή ταχύτητα. Επομένως οι γεωδαισιακές καμπύλες στον επίπεδο χωρόχρονο είναι πράγματι ευθείες, με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής:

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + u^\mu \tau \quad (2.10.5)$$

Υπάρχουν τριών ειδών γεωδαισιακές: χωροειδείς, φωτοειδείς και χρονοειδείς ανάλογα με το πρόσημο που έχει το τετράγωνο του μέτρου του εφαπτόμενου διανύσματος s' αυτές. Στον χωρόχρονο, τα ελεύθερα σωματίδια με μάζα κινούνται σε χρονοειδείς γεωδαισιακές ενώ ελεύθερα άμαζα σωματίδια όπως τα φωτόνια κινούνται σε φωτοειδείς γεωδαισιακές. Από την άλλη, οι χωροειδείς γεωδαισιακές δεν αντιστοιχούν στις κοσμικές γραμμές κάποιου υπαρκτού σωματιδίου. Εφόσον εξ' ορισμού μια γεωδαισιακή καμπύλη μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμα s' αυτή ($\nabla_V V = 0$) και επειδή ο χωρόχρονος εφοδιάζεται με τη σύνδεση Levi-Civita που είναι συμβατή με τη μετρική, ισχύει:

$$\nabla_V(g(V, V)) = \cancel{(\nabla_V g)}(V, V) + g(\cancel{\nabla_V V}, V) + g(V, \cancel{\nabla_V V}) = 0 \quad (2.10.6)$$

Συνεπώς αν V το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας γεωδαισιακής, το μέτρο του $g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ παραμένει αναλλοίωτο κατά μήκος της άρα ο χαρακτήρας μιας γεωδαισιακής δεν μπορεί να αλλάξει.

Από φυσικής άποψης, η συνθήκη ότι μια γεωδαισιακή καμπύλη μετατοπίζει παράλληλα το εφαπτόμενό της διάνυσμα μπορεί να ιδωθεί ως ο μηδενισμός της τετραεπιτάχυνσης του σωματιδίου που κινείται κατά μήκος της. Η (συναλλοίωτη) τετραεπιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται σε μια τυχαία καμπύλη με εφαπτόμενο διάνυσμα V όπου $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ (τετραταχύτητα του σωματιδίου) ορίζεται ως το διάνυσμα:

$$a \equiv \frac{D}{d\tau} V \equiv \nabla_V V \quad (2.10.7)$$

Με όρους συνιστωσών:

$$a^\mu \equiv (\nabla_V V)^\mu = V^\nu \nabla_\nu V^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (2.10.8)$$

Υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας, η οποία είναι γεωμετρία και όχι δύναμη, το σωματίδιο έχει μηδενική επιτάχυνση: $a = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σωματίδιο εκτελεί ελεύθερη πτώση ή απλά ότι είναι ελεύθερο και θέτοντας $a^\mu = 0$ στην (2.10.8) ανακτούμε τη γεωδαισιακή εξίσωση.

Αν το σωματίδιο δεν εκτελεί ελεύθερη πτώση, σημαίνει ότι δέχεται εξωτερικές δυνάμεις (π.χ ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz) που το αποτρέπουν από το να ακολουθήσει την τροχιά μιας γεωδαισιακής καμπύλης. Η εξίσωση κίνησης σε αυτή την περίπτωση αποτελεί γενίκευση του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα και είναι της μορφής:

$$ma^\mu = f^\mu \quad (2.10.9)$$

όπου m η μάζα του σωματιδίου και f^μ η τετραδύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, η οποία είναι μη-βαρυτικής φύσεως.

Η τετραεπιτάχυνση εμπεριέχει λοιπόν πληροφορίες για τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σωματίδιο, οι οποίες το εξαναγκάζουν να κινείται πάνω σε μη-γεωδαισιακές καμπύλες (π.χ για δύναμη Lorentz είναι $a^\mu = \frac{q}{m} F_{\nu}^{\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ όπου q το φορτίο του σωματιδίου και $F_{\mu\nu}$ ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής).

Καθότι η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου με μάζα είναι κανονικοποιημένη, $g(V, V) = V^\mu V_\mu = -1$, και η σύνδεση είναι συμβατή με τη μετρική, εξάγουμε ότι η τετραεπιτάχυνση είναι ορθογώνια στην τετραταχύτητα σε κάθε σημείο της (μη-γεωδαισιακής) καμπύλης:

$$a^\mu V_\mu = 0 \quad (2.10.10)$$

Αυτό ισχύει διότι:

$$0 = \nabla_V (\underbrace{V^\mu V_\mu}_{-1}) = (\nabla_V V)^\mu V_\mu + V^\mu (\nabla_V V)_\mu = 2(\nabla_V V)^\mu V_\mu = 2a^\mu V_\mu \quad (2.10.11)$$

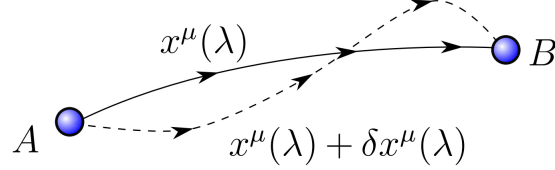
Με παρόμοιο συλλογισμό, από τη σχέση $\nabla_\nu (\underbrace{V^\mu V_\mu}_{-1}) = 0$ συνάγουμε ότι:

$$V^\mu \nabla_\nu V_\mu = 0 \quad (2.10.12)$$

2.10.1 Στασιμοποίηση Ιδιόχρονου - Extremizing proper time

Ο δεύτερος ορισμός αναφέρει ότι απ' όλες τις δυνατές κοσμικές γραμμές που συνδέουν δύο δεδομένα σημεία, τα ελεύθερα σωματίδια ακολουθούν την καμπύλη που μεγιστοποιεί τον ιδιόχρονο (ελαχιστοποιεί το ιδιομήκος). Η καμπύλη μέγιστου ιδιόχρονου είναι ακριβώς η γεωδαισιακή καμ-

πύλη. Έστω λοιπόν δύο σταθερά σημεία A, B και μια καμπύλη $\gamma(\lambda) \equiv x^\mu(\lambda)$ που έχει αρχή το $A = \gamma(\lambda_A)$ και πέρασ το $B = \gamma(\lambda_B)$. Θεωρούμε μικρές μεταβολές στις συντεταγμένες της καμπύλης $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$, κρατώντας τα άκρα της σταθερά $\delta x^\mu(\lambda_A) = \delta x^\mu(\lambda_B) = 0$, οι οποίες επάγουν την εξής μεταβολή στη μετρική $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma$ βάσει του αναπτύγματος Taylor. Έχουμε δηλαδή $\delta g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma$.



Σχήμα 2.10.1.1: Θεωρούμε μικρή μεταβολή $x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$ στις συντεταγμένες της καμπύλης που συνδέει τα σταθερά σημεία A και B . Για να είναι η καμπύλη $x^\mu(\lambda)$ γεωδαισιακή, πρέπει κάθε μεταβολή $\delta x^\mu(\lambda)$ στις συντεταγμένες της να καθιστά τον ιδιόχρονο κατά μήκος της στάσιμο-ακρότατο: $\delta\tau = 0$.

Η επακόλουθη μεταβολή στον ιδιόχρονο της καμπύλης είναι:

$$\delta\tau = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \frac{1}{2} \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} \delta \left[-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right]$$

Αφού ο ιδιόχρονος δεν εξαρτάται από την παραμετροποίηση της καμπύλης, αναπαραμετροποιούμε την καμπύλη αντικαθιστώντας την τυχαία παράμετρο λ με τον ιδιόχρονο τ της καμπύλης. Έτσι ο πρώτος όρος στο ολοκλήρωμα γίνεται $-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1$ λόγω της κανονικοποίησης της τετραταχύτητας, οπότε λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \delta\tau &= -\frac{1}{2} \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \delta \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} (\delta x^\nu) \right] \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι στο ολοκλήρωμα ταυτίζονται, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta\tau &= -\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} (\delta x^\nu) \right] \\ &= -\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu \right) - \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \delta x^\nu \right] \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα το μεσαίου όρου μηδενίζεται, καθότι τα άκρα της καμπύλης είναι σταθερά δηλαδή $\delta x^\mu(\tau_A) = \delta x^\mu(\tau_B) = 0$ οπότε:

$$\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu \right) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu \Big|_{\tau_A}^{\tau_B} = 0$$

Έτσι απομένει:

$$\begin{aligned}
 \delta\tau &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \delta x^\nu \right] \\
 &\stackrel{\sigma \leftrightarrow \nu}{=} \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[-\frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \right] \delta x^\nu \\
 &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[-\frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right] \delta x^\nu \\
 &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[-\frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right] \delta x^\nu \\
 &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left[-\frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\sigma\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right] \delta x^\nu
 \end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau}$ ενώ στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του όρου $\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ κάτω από την εναλλαγή $\sigma \leftrightarrow \mu$. Η απαίτηση ο ιδιόχρονος ανάμεσα στα A και B να καθίσταται στάσιμος (extremal) και ειδικότερα μέγιστος συνεπάγεται $\delta\tau = 0$ για κάθε μεταβολή δx^ν . Αυτό προνοεί ότι η υπό ολοκλήρωση ποσότητα που βρίσκεται σε αγκύλες οφείλει να μηδενίζεται:

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την πιο πάνω εξίσωση με $g^{\rho\nu}$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (2.10.14)$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι ακριβώς η γεωδαισιακή εξίσωση (2.10.3) αρκεί βέβαια οι συντελεστές σύνδεσης να είναι τα σύμβολα Christoffel. Οπότε για να συμφωνούν οι δύο ορισμοί χρειάζεται η σύνδεση να είναι η σύνδεση Levi-Civita, κάτι το οποίο πάντοτε ισχύει καθώς η σύνδεση Levi-Civita είναι η μόνη σύνδεση που χρησιμοποιείται στη (συμβατική) γενική σχετικότητα.

2.10.2 Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου - Free particle Lagrangian

Όπως έχουμε προαναφέρει, η κίνηση των ελεύθερων σωματιδίων πάνω σε γεωδαισιακές καμπύλες είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της αρχής των μεταβολών για την εύρεση του ακροτάτου του ιδιόχρονου. Αυτό παραπέμπει στην αρχή ακρότατης (ελάχιστης) δράσης της αναλυτικής μηχανικής, όπου εκεί η στασιμοποίηση της δράσης οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange για την κίνηση ενός σωματιδίου. Με βάση αυτή την αντιστοιχία, μπορούμε να γράψουμε τη "δράση" ενός ελεύθερου σωματιδίου ως:

$$S_0 \equiv \tau = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \left(-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} \quad (2.10.15)$$

Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα παριστάνει τη Λαγκρατζιανή του ελεύθερου σωματιδίου:

$$\mathcal{L}_0\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) \equiv \left(-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{1/2} \quad (2.10.16)$$

Αφού η δράση είναι ανεξάρτητη από την παραμετροποίηση της καμπύλης, προκειμένου να απλουστεύσουμε την έκφραση της δράσης και κατ' επέκταση της Λαγκρατζιανής, χρησιμοποιούμε ως παράμετρο της καμπύλης τον ιδιόχρονο τ αντί της αυθαίρετης παραμέτρου λ . Με αυτή την αλλαγή παραμέτρου η μεταβολή της δράσης λόγω της μεταβολής στις συντεταγμένες της καμπύλης δίνεται από την εξίσωση (2.10.13):

$$\delta S_0 = - \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \delta \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \quad (2.10.17)$$

Διαπιστώνουμε ότι η στασιμοποίηση της δράσης S_0 είναι ισοδύναμη με τη στασιμοποίηση μιας πιο απλής δράσης S :

$$S = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.10.18)$$

αφού ισχύει $\delta S_0 = \delta S$. Ορίσαμε την S μετονομάζοντας την παράμετρο τ σε λ για να συμπεριλάβουμε την περίπτωση άμαζων σωματιδίων (όπου τώρα λ ο ιδιόχρονος για σωματίδια με μάζα και λ αφινική παράμετρος για σωματίδια μηδενικής μάζας). Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε μια απλούστερη Λαγκρατζιανή για τα ελεύθερα σωματίδια:

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.10.19)$$

όπου $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Η \mathcal{L} δίνει τις ίδιες εξισώσεις Euler-Lagrange με την αρχική Λαγκρατζιανή \mathcal{L}_0 καθότι σχετίζονται μέσω της $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_0^2$ που έπεται $\delta \mathcal{L} = -\mathcal{L}_0 \delta \mathcal{L}_0$, άρα το ακρότατο της \mathcal{L}_0 είναι ακρότατο της \mathcal{L} . Οι καμπύλες που καθιστούν τη δράση ακρότατη είναι εκείνες οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.10.20)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αντικαθιστώντας την έκφραση της $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ στις εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουμε τη γεωδαισιακή εξίσωση (2.10.3) για το ελεύθερο σωματίδιο.

2.10.3 Σταθερές της Κίνησης σε Γεωδαισιακές - Constants of Geodesic motion

Η επίλυση του συστήματος των τεσσάρων συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη γεωδαισιακή εξίσωση είναι γενικά δύσκολη, ειδικά αν η μετρική του χωρόχρονου είναι περίπλοκη. Συνήθως το σύστημα αυτό επιλύεται αριθμητικά εκτός αν η μετρική είναι σχετικά απλή οπότε η λύση μπορεί να βρεθεί με αναλυτικές μεθόδους. Παρ' όλα αυτά, με τη βοήθεια των νόμων διατήρησης, οι οποίοι οδηγούν σε διατηρούμενες ποσότητες - σταθερές της γεωδαισιακής κίνησης, μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της γεωδαισιακής καμπύλης συναρτήσει ποσοτήτων που διατηρούνται κατά την κίνηση πάνω στη γεωδαισιακή. Αυτό διευκολύνει σημαντικά την επίλυση της γεωδαισιακής εξίσωσης.

Ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης που είναι πάντα διαθέσιμο, ανεξαρτήτως του συστήματος συντεταγμένων και της μετρικής, προκύπτει από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας. Γνωρίζουμε ήδη από την εξίσωση (2.10.6) ότι το τετράγωνο του μέτρου του εφαπτόμενου διανύσματος είναι σταθερό

κατά μήκος της γεωδαισιακής και η σταθερή αυτή ποσότητα εξαρτάται από τον χαρακτήρα της γεωδαισιακής ή ισοδύναμα από το είδος του σωματιδίου που τη διατρέχει.

Συγκεκριμένα αν ένα σωματίδιο με μάζα/με μηδενική μάζα κινείται σε γεωδαισιακή με παραμετρικές εξισώσεις $x^\mu(\tau)$, τ ο ιδιόχρονος του σωματιδίου/ $x^\mu(\lambda)$, λ αφινική παράμετρος και $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ / $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ οι συνιστώσες του εφαπτόμενου διανύσματος στη γεωδαισιακή (τετραταχύτητα του σωματιδίου με μάζα / τετραορμή του σωματιδίου μηδενικής μάζας), τότε:

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = C \quad (2.10.21)$$

όπου C σταθερά η οποία, λόγω της πιο πάνω επιλογής αφινικών παραμέτρων, λαμβάνει τις εξής τιμές:

$$C = \begin{cases} -1 & \text{για σωματίδιο με μάζα} \\ 0 & \text{για σωματίδιο με μηδενική μάζα} \end{cases} \quad (2.10.22)$$

Επιπλέον, η ύπαρξη διανυσματικών πεδίων Killing οδηγεί σε διατηρούμενες ποσότητες κατά μήκος των γεωδαισιακών. Συγκεκριμένα, το εσωτερικό γινόμενο $\xi_\mu u^\mu$ ενός διανύσματος Killing ξ με το εφαπτόμενο διάνυσμα u μιας γεωδαισιακής παραμένει αναλλοίωτο κατά την κίνηση πάνω στη γεωδαισιακή καμπύλη:

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \xi_\mu u^\mu = \text{const.} \quad (\text{Κατά μήκος της γεωδαισιακής}) \quad (2.10.23)$$

Πράγματι, η συναλλοίωτη παράγωγος της ποσότητας $\xi_\mu u^\mu$ κατά μήκος της γεωδαισιακής καμπύλης μηδενίζεται:

$$\frac{D}{d\tau} (\xi_\mu u^\mu) = \nabla_u (\xi_\mu u^\mu) = u^\nu \nabla_\nu (\xi_\mu u^\mu) = u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu + \xi_\mu \underbrace{u^\nu \nabla_\nu u^\mu}_{=0} = \frac{1}{2} u^\nu u^\mu \underbrace{(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu)}_{=0} = 0 \quad (2.10.24)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ αφού η γεωδαισιακή μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμα u σ'αυτή. Έπειτα σπάσαμε τον συμμετρικό ως προς την εναλλαγή $\nu \leftrightarrow \mu$ όρο $u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu$ σε δύο ίσους μεταξύ τους όρους και αξιοποιήσαμε την εξίσωση του Killing (2.8.15) για να δείξουμε ότι ο όρος αυτός μηδενίζεται.

Στα ίδια αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Noether για τη Λαγκρατζιανή του ελεύθερου σωματιδίου. Το Θεώρημα Noether αναφέρει ότι σε κάθε συνεχή συμμετρία της Λαγκρατζιανής (ή ισοδύναμα της δράσης) ενός φυσικού συστήματος, αντιστοιχεί μια διατηρούμενη ποσότητα. Εδώ οι συμμετρίες της Λαγκρατζιανής ισοδυναμούν με συμμετρίες της μετρικής, δηλαδή μετασχηματισμούς που αφήνουν τη μετρική αμετάβλητη ή με άλλα λόγια ισομετρίες.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η Λαγκρατζιανή δεν εξαρτάται ρητά από την παράμετρο λ της γεωδαισιακής, δηλαδή $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$. Θέτοντας $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ στη σχέση που δίνει την ολική παράγωγο της \mathcal{L} ως προς λ :

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{d\dot{x}^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu \right) \quad (2.10.25)$$

λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \right) = 0 \quad (2.10.26)$$

Συνεπώς η ποσότητα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ διατηρείται κατά μήκος της γεωδαισιακής. Η σταθερή τιμή της $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ προκύπτει από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας, όπως ακριβώς στην εξίσωση (2.10.21), όπου $u^\mu = \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ και $\lambda = \tau$ για σωματίδια με μάζα, λ αφινική παράμετρος για σωματίδια χωρίς μάζα.

Ακολουθώντας, υποθέτουμε ότι η μετρική $g_{\mu\nu}(x)$ είναι ανεξάρτητη από κάποια συντεταγμένη x^κ , δηλαδή $\partial_\kappa g_{\mu\nu} = 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι η Λαγκραϊζιανή είναι επίσης ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη συντεταγμένη: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\kappa} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο απειροστός μετασχηματισμός της συντεταγμένης x^κ , δηλαδή $x^\kappa \rightarrow x^\kappa + \delta x^\kappa$ αφήνει τη μετρική αμετάβλητη, αποτελεί επομένως μια ισομετρία. Το διάνυσμα $\xi = \partial_\kappa$ που γεννάει την ισομετρία ($\delta x^\kappa = \varepsilon \xi^\kappa$) έχει συνιστώσες $\xi^\mu = \delta^\mu_\kappa$ και είναι διάνυσμα Killing εφόσον η παράγωγος Lie της μετρικής κατά την κατεύθυνση του άξονα x^κ μηδενίζεται. Η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς τη συντεταγμένη x^κ για την οποία $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\kappa} = 0$ δίνει:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} \right) = 0 \quad (2.10.27)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η ποσότητα:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} = \dot{x}_\kappa = g_{\mu\kappa} \dot{x}^\mu = g_{\mu\nu} \delta^\nu_\kappa \dot{x}^\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu u^\mu = \xi_\mu u^\mu \quad (2.10.28)$$

παραμένει σταθερή κατά μήκος της γεωδαισιακής καμπύλης, όπως δείξαμε στη (2.10.24) χρησιμοποιώντας γεωμετρικά επιχειρήματα.

Σημείωση: Ένας εναλλακτικός τρόπος για να επιβεβαιώσουμε ότι το ξ είναι διάνυσμα Killing είναι θεωρώντας ότι μετασχηματισμός $x^\kappa \rightarrow x^\kappa + \varepsilon \xi^\kappa$, $\varepsilon > 0$ είναι ισομετρία και άρα συμμετρία της δράσης S της (2.10.18). Απαιτώντας η δράση να παραμείνει αναλλοίωτη, $\delta S = 0$, καταλήγουμε στην εξίσωση του Killing $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$.

2.11 Καμπυλότητα - Curvature

Η καμπυλότητα αποτελεί γεωμετρική ιδιότητα μιας πολλαπλότητας. Εφόσον η μετρική περιγράφει την εσωτερική γεωμετρία μιας πολλαπλότητας, είναι αναμενόμενο ότι εμπεριέχει πληροφορίες για την ενδογενή της καμπυλότητα, η οποία είναι το είδος καμπυλότητας που θα μας απασχολήσει στην ενότητα αυτή. Φυσικά, δεν μπορούμε πάντοτε να διαπιστώσουμε αν μια πολλαπλότητα είναι επίπεδη ή καμπυλωμένη (και πόσο) εξετάζοντας απλά τη μετρική της, η οποία ενδέχεται να είναι περίπλοκη (αναλόγως του συστήματος συντεταγμένων). Το πραγματικό "μέτρο" της ενδογενούς καμπυλότητας μιας πολλαπλότητας είναι ο τανυστής καμπυλότητας, γνωστός ως τανυστής Riemann (Riemann tensor) του οποίου οι συνιστώσες υπολογίζονται από τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους της μετρικής.

Σημειώνουμε ότι πέραν της ενδογενούς καμπυλότητας, που είναι η εσωτερική καμπυλότητα που αντιλαμβάνονται παρατηρητές περιορισμένοι μέσα στην πολλαπλότητα, υπάρχει και η εξωγενής ή εξωτερική καμπυλότητα. Η εξωγενής καμπυλότητα αναφύεται όταν εμβαπτίσουμε μια n -διάστατη πολλαπλότητα σε έναν $n + 1$ -διάστατο χώρο και σχετίζεται με το σχήμα της πολλαπλότητας όπως το αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται έξω από αυτή. Προσδιορίζεται μέσω του τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας $K_{\mu\nu}$ ο οποίος είναι τάξης $(0, 2)$ και συμμετρικός.

Ορισμός 2.15: Τανυστής Riemann - Riemann Tensor

Ο τανυστής Riemann μιας πολλαπλότητας (M, g) ορίζεται ως ο τανυστής τάξης $(1, 3)$ που δρα στα διανυσματικά πεδία $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ και στο πεδίο 1-form ω σύμφωνα με τη σχέση:

$$R(\omega, X, Y, Z) = \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \quad (2.11.1)$$

όπου ∇ η σύνδεση Levi-Civita. Γράφοντας $\nabla_X \nabla_Y Z$ εννοούμε ότι λαμβάνουμε τη συναλλοώτη παράγωγο ως προς X του διανύσματος $\nabla_Y Z$ δηλαδή $\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_X(\nabla_Y Z)$.

Μια πολλαπλότητα (M, g) θα λέγεται **επίπεδη** (flat) αν ο τανυστής Riemann μηδενίζεται ταυτοτικά $R = 0$ ή με όρους συνιστωσών $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$ παντού στην πολλαπλότητα. Σε διαφορετική περίπτωση θα λέγεται **καμπυλωμένη** (curved), με την καμπυλότητά της να ποσοτικοποιείται από τις συνιστώσες $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ του τανυστή Riemann. Οι πιο πάνω χαρακτηρισμοί είναι ανεξάρτητοι του συστήματος συντεταγμένων, εφόσον αν ένας τανυστής μηδενίζεται (ή δεν μηδενίζεται) σε ένα σύστημα συντεταγμένων τότε μηδενίζεται (αντίστοιχα δεν μηδενίζεται) σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Σημείωση: Εναλλακτικά, ο τανυστής Riemann μπορεί να ειπωθεί ως η απεικόνιση $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ τριών διανυσματικών πεδίων σε ένα τέταρτο:

$$R(X, Y, Z) \equiv R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.11.2)$$

Επειδή η σύνδεση ∇ δεν έχει στρέψη, ισχύει $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ οπότε παίρνουμε:

$$R(X, Y, Z) \equiv R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - (\nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \quad (2.11.3)$$

Αυτό μας επιτρέπει να διατυπώσουμε έναν ορισμό ισοδύναμο με τον (2.11.2) χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συναλλοιώτη παράγωγο η οποία διαφορίζει τον $(1, 1)$ τανυστή ∇Z και δίνει τον $(1, 2)$ τανυστή $\nabla^2 Z \equiv \nabla(\nabla Z)$. Η δεύτερη συναλλοιώτη παράγωγος στην κατεύθυνση του Y και έπειτα του X ορίζεται $\nabla^2_{X, Y} Z \equiv (\nabla(\nabla Z))(\cdot, Y, X) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z = X^\mu Y^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu Z$. Μέσω αυτής έχουμε:

$$R(X, Y, Z) \equiv R(X, Y)Z = \nabla^2_{X, Y} Z - \nabla^2_{Y, X} Z \quad (2.11.4)$$

η οποία ονομάζεται ταυτότητα Ricci (Ricci identity) και ισχύει για συνδέσεις με μηδενική στρέψη. Η σχέση (2.11.4) διατυπώνεται συνήθως στη βιβλιογραφία με χρήση αφηρημένων δεικτών. Με τον συμβολισμό αφηρημένων δεικτών (abstract index notation) γράφουμε $(\nabla^2_{\mu, \nu} V)^\alpha \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha$ όπου με την έκφραση $\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha$ εννοούμε ότι παραγωγίζουμε τον $(1, 1)$ τανυστή $\nabla_\nu V^\alpha$ που παριστάνει τον τανυστή ∇V στα πλαίσια του συμβολισμού αυτού. Συνεπώς η ταυτότητα Ricci εκφράζεται με αφηρημένους δείκτες ως εξής:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (2.11.5)$$

Σημείωση: Αν η σύνδεση της πολλαπλότητας δεν ήταν η Levi-Civita αλλά μια σύνδεση με στρέψη, η σχέση (2.11.5) θα γραφόταν: $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\alpha$ με $T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$.

Σημείωση: Δεδομένου ότι οι συναλλοιώτες παράγωγοι μετατίθενται για βαθμωτές συναρτήσεις, αναπτύσσοντας την $[\nabla_\mu, \nabla_\nu](\omega_\alpha V^\alpha) = 0$ βρίσκουμε τη δράση του μεταθέτη $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ σε 1-forms:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \omega_\alpha = -R^\lambda_{\alpha\mu\nu} \omega_\lambda \quad (2.11.6)$$

2.11.1 Συνιστώσες του τανυστή Riemann - Components of the Riemann tensor

Με όρους συνιστωσών, ο ορισμός (2.11.1) έπεται:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv R(dx^\alpha, \partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\beta) \quad (2.11.7)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ως βάση των διανυσμάτων την coordinate basis $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$ και τη δυική της ως βάση των 1-forms $\{\theta^\mu\} = \{dx^\mu\}$. Τονίζουμε ότι κατά σύμβαση, ο πρώτος κάτω δείκτης στις συνιστώσες του τανυστή Riemann αναφέρεται στο τρίτο στη σειρά διάνυσμα που εισέρχεται στο όρισμα.

Οι συνιστώσες του τανυστή Riemann, χρησιμοποιώντας τη συναλλοίωτη παράγωγο της σύνδεσης Levi-Civita, υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} &\equiv R(dx^\alpha, \partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\beta) = dx^\alpha (\nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu} \partial_\beta - \nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} \partial_\beta - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \partial_\beta) \\ &= dx^\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu \partial_\beta) \\ &= dx^\alpha [\nabla_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\beta} \partial_\sigma) - \nabla_\nu (\Gamma^\sigma_{\mu\beta} \partial_\sigma)] \\ &= dx^\alpha [(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\beta}) \partial_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \nabla_\mu \partial_\sigma - (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\beta}) \partial_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \nabla_\nu \partial_\sigma] \\ &= dx^\alpha [(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\beta}) \partial_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\kappa_{\mu\sigma} \partial_\kappa - (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\beta}) \partial_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} \partial_\kappa] \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\beta}) \delta^\alpha_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\kappa_{\mu\sigma} \delta^\alpha_\kappa - (\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\beta}) \delta^\alpha_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} \delta^\alpha_\kappa \end{aligned}$$

Επομένως οι συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \quad (2.11.8)$$

2.11.2 Γεωμετρική Ερμηνεία του τανυστή Riemann - Geometric Interpretation of the Riemann Tensor

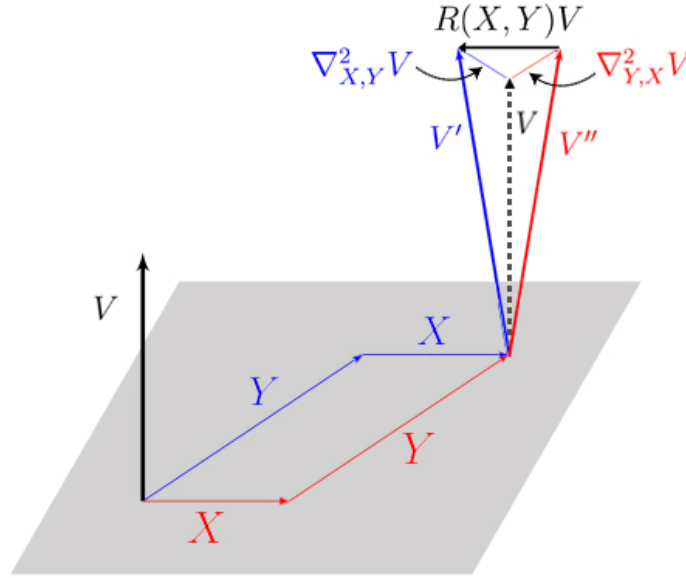
Εκ πρώτης όψεως η γεωμετρική σημασία του τανυστή Riemann δεν διαφαίνεται από τον φορμαλιστικό ορισμό που δόθηκε. Θα δούμε όμως ότι ο ορισμός αυτός έχει ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ερμηνείες. Συγκεκριμένα, ο τανυστής Riemann ποσοτικοποιεί την καμπυλότητα υπό την έννοια ότι σχετίζεται με:

1. τη μεταβολή που υφίσταται ένα διάνυσμα όταν μεταφερθεί παράλληλα κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής
2. τη μη-μεταθετικότητα δύο συναλλοίωτων παραγώγων όταν δρουν σε τανυστές
3. την απόκλιση μεταξύ γειτονικών γεωδαισιακών καμπυλών (αρχικώς παράλληλες γεωδαισιακές δεν παραμένουν παράλληλες)

Για να μελετήσουμε γεωμετρικά την έννοια του ορισμού (2.11.4) και γενικότερα της μη-μεταθετικότητας των δευτέρων παραγώγων, θεωρούμε ένα απειροστό "παραλληλόγραμμο" Levi-Civita (Levi-Civita parallelogramoid), του οποίου οι πλευρές σχηματίζονται από τα διανύσματα X και Y . Υπενθυμίζουμε από τον ορισμό (2.9.30) ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς κάποια κατεύθυνση συγκρίνει ένα αρχικό διάνυσμα με το διάνυσμα που προκύπτει αν το αρχικό διάνυσμα μεταφερθεί παράλληλα κατά απειροστή απόσταση στη συγκεκριμένη κατεύθυνση, εκφράζει δηλαδή την αλλαγή που υφίσταται ένα διάνυσμα κατά τη δεδομένη κατεύθυνση. Συνεπώς, αν μεταφέρουμε παράλληλα ένα διάνυσμα V στην κατεύθυνση του διανύσματος Y και έπειτα μεταφέρουμε παράλληλα το προκύπτον διάνυσμα στην κατεύθυνση του X τότε θα πάρουμε ένα διάνυσμα V' που διαφέρει από το V κατά

$\nabla_{X,Y}^2 V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_{\nabla_X Y} V$. Αν τώρα μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα V πρώτα στη διεύθυνση του X και ακολούθως στην κατεύθυνση του Y θα πάρουμε ένα νέο διάνυσμα V'' που διαφέρει από το V κατά $\nabla_{Y,X}^2 V = \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{\nabla_Y X} V$. Η διαφορά των δύο διανυσμάτων V', V'' που προκύπτουν από την παράλληλη μεταφορά του V κατά μήκος των δύο διαδρομών εκφράζεται από το διάνυσμα:

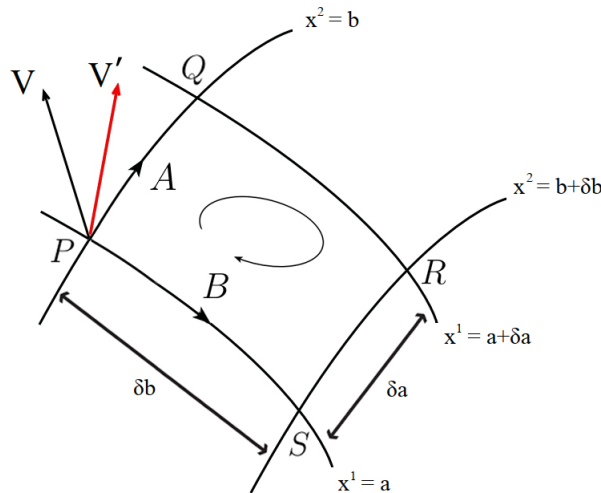
$$V' - V'' = \nabla_{X,Y}^2 V - \nabla_{Y,X}^2 V = R(X, Y, V) = R(X, Y)V \quad (2.11.9)$$



Σχήμα 2.11.2.1: Γεωμετρική ερμηνεία του τανυστή Riemann. Το διάνυσμα $R(X, Y, V)$ παριστάνει τη διαφορά ανάμεσα στα διανύσματα V', V'' που προκύπτουν από την παράλληλη μεταφορά του V κατά τις διαδρομές $Y \rightarrow X$ (μπλε) και $X \rightarrow Y$ (κόκκινο) αντίστοιχα.

Η πιο πάνω σχέση είναι η ταυτότητα Ricci. Η γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας Ricci είναι ότι σε έναν καμπυλωμένο χώρο η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος V στην κατεύθυνση ενός διανύσματος και έπειτα ενός άλλου θα δώσει διαφορετικό διάνυσμα σε σύγκριση με την περίπτωση όπου οι δύο κατευθύνσεις ακολουθούνται με την αντίστροφη σειρά. Αυτό απορρέει από το γεγονός ότι οι δεύτερες συναλλοίωτες παράγωγοι ενός διανυσματικού πεδίου (και γενικότερα ενός τανυστή) δεν μετατίθενται και ο τανυστής Riemann μετράει αυτή τη μη-μεταθετικότητα.

Η πιο πάνω ερμηνεία οδηγεί άμεσα σε μια δεύτερη ερμηνεία, συγκεκριμένα συνδέει τον τανυστή Riemann με τη μεταβολή που προκαλεί στις συνιστώσες ενός διανύσματος η παράλληλη μεταφορά του κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής. Μεταφέροντας παράλληλα ένα διάνυσμα σε μια κλειστή διαδρομή διαπιστώνουμε ότι επιστρέφοντας στην αρχική του θέση, το διάνυσμα θα έχει αλλάξει εξαιτίας της καμπυλότητας της πολλαπλότητας, με τον τανυστή Riemann να μετράει την εξάρτηση της μεταβολής αυτής από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε. Θεωρούμε πάλι απειροστό "παράλληλογραμμο" Levi-Civita, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται στις γραμμές συντεταγμένων $x^\mu = a, x^\mu = a + \delta a$ (για συγκεκριμένο μ , έστω $\mu = 1$ στο κάτωθι σχήμα) οι οποίες συνδέονται με το διάνυσμα A και $x^\nu = b, x^\nu = b + \delta b$ (για συγκεκριμένο ν , έστω $\nu = 2$) οι οποίες συνδέονται με το διάνυσμα B .

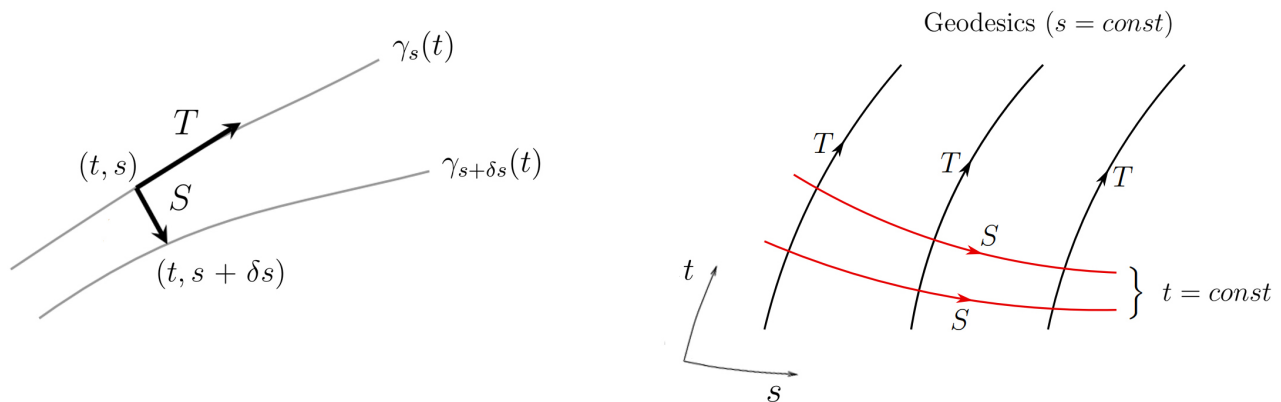


Σχήμα 2.11.2.2: Διάνυσμα V μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της απειροστής κλειστής διαδρομής $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$ που σχηματίζουν οι γραμμές των συντεταγμένων. Η απόκλιση ανάμεσα στο παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα V' και στο αρχικό διάνυσμα V είναι ανάλογη του τανυστή Riemann.

Αποδεικνύεται ότι κατά την παράλληλη μεταφορά του V κατά μήκος της κλειστής διαδρομής οι συνιστώσες του V (σε δεύτερη τάξη ως προς $\delta a, \delta b$) αλλάζουν κατά:

$$\delta V^\alpha = V'^\alpha - V^\alpha = (\delta a)(\delta b) R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta A^\mu B^\nu \quad (2.11.10)$$

Η τρίτη γεωμετρική ερμηνεία του τανυστή Riemann συνδέεται με την απόκλιση ανάμεσα σε γειτονικές γεωδαισιακές καμπύλες (παράλληλες γραμμές δεν παραμένουν παράλληλες όταν επεκταθούν), η οποία είναι αποτέλεσμα της καμπυλότητας που προκαλεί εστίαση ή απεστίαση μιας ομάδας γεωδαισιακών. Θεωρούμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαισιακών καμπυλών $\gamma_s(t) \equiv x^\mu(t; s)$, όπου η κάθε γεωδαισιακή παραμετροποιείται από την αφινική παράμετρο t και η ταυτοποιείται από την παράμετρο s . Συμβολίζουμε T το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στις γεωδαισιακές (καμπύλες με $s = const.$) το οποίο μεταφέρεται παράλληλα $\nabla_T T = 0$ και S το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στις μη-γεωδαισιακές καμπύλες με $t = const.$ Το S λέγεται διάνυσμα διαχωρισμού (separation/deviation vector) διότι συνδέει σημεία με την ίδια συντεταγμένη t που βρίσκονται σε γειτονικές γεωδαισιακές οι οποίες απέχουν απειροστή απόσταση, άρα παριστάνει τον σχετικό διαχωρισμό δύο γεωδαισιακών.



Σχήμα 2.11.2.3: Το διάνυσμα διαχωρισμού S συνδέει σημεία δύο απειροστά κοντινών γεωδαισιακών, οι οποίες έχουν εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο T . Η μονοπαραμετρική οικογένεια γεωδαισιακών $\gamma_s(t), s \in \mathbb{R}$ σχηματίζει τη διδιάστατη επιφάνεια $\Sigma \subset M$ με συντεταγμένες (t, s) , οπότε $T = \partial_t$ και $S = \partial_s$, άρα $[T, S] = 0$.

Η οικογένεια $\gamma_s(t)$, $s \in \mathbb{R}$ σχηματίζει μια διδιάστατη επιφάνεια $\Sigma \subset M$ στην οποία χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους t και s ως συντεταγμένες, οπότε $T = \frac{\partial}{\partial t}$ και $S = \frac{\partial}{\partial s}$. Αφού τα διανυσματικά πεδία T και S αποτελούν coordinate basis vectors, μετατίθενται: $[T, S] = 0$. Εφόσον η σύνδεση δεν έχει στρέψη, αυτό συνεπάγεται $\nabla_T S = \nabla_S T \Leftrightarrow T^\nu \nabla_\nu S^\mu = S^\nu \nabla_\nu T^\mu$. Αν λοιπόν S είναι το διάνυσμα που συνδέει δύο σημεία που βρίσκονται σε γειτονικές γεωδαισιακές, η συναλλοίωτη παράγωγος του S κατά μήκος της γεωδαισιακής θα δώσει τη σχετική τους ταχύτητα U δηλαδή τον ρυθμό με τον οποίο δύο απειροστά κοντινές γεωδαισιακές απομακρύνονται μεταξύ τους:

$$U = \frac{D}{dt}S = \nabla_T S \quad (2.11.11)$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε την σχετική επιτάχυνση ανάμεσα σε δύο απειροστά κοντινές γειτονικές γεωδαισιακές λαμβάνοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο του U κατά μήκος της γεωδαισιακής:

$$A = \frac{D^2}{dt^2}S = \frac{D}{dt}U = \nabla_T U = \nabla_T \nabla_T S \quad (2.11.12)$$

Για την σχετική επιτάχυνση λαμβάνουμε:

$$A = \nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T \stackrel{2.11.1}{=} R(T, S)T + \nabla_S \underbrace{\nabla_T T}_{=0} + \nabla_{[T, S]} T \quad (2.11.13)$$

Τελικά λοιπόν

$$A = R(T, S)T \quad (2.11.14)$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση της γεωδαισιακής απόκλισης (geodesic deviation equation) και υπό μορφή συνιστωσών γράφεται:

$$A^\mu = [R(T, S)T]^\mu = [R(T, S, T)]^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (2.11.15)$$

Σε συμβολισμό αφηρημένων δεικτών, διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} A^\mu &= T^\rho \nabla_\rho (T^\nu \nabla_\nu S^\mu) = T^\rho \nabla_\rho (S^\nu \nabla_\nu T^\mu) = (T^\rho \nabla_\rho S^\nu) \nabla_\nu T^\mu + T^\rho S^\nu \nabla_\rho \nabla_\nu T^\mu \\ &= (S^\rho \nabla_\rho T^\nu) \nabla_\nu T^\mu + T^\rho S^\nu \nabla_\rho \nabla_\nu T^\mu \\ &= S^\rho \nabla_\rho \underbrace{(T^\nu \nabla_\nu T^\mu)}_{=0} - S^\rho T^\nu \nabla_\rho \nabla_\nu T^\mu + T^\rho S^\nu \nabla_\rho \nabla_\nu T^\mu \\ &= T^\rho S^\nu \underbrace{(\nabla_\rho \nabla_\nu T^\mu - \nabla_\nu \nabla_\rho T^\mu)}_{R^\mu{}_{\lambda\rho\nu} T^\lambda} \\ &= R^\mu{}_{\lambda\rho\nu} T^\lambda T^\rho S^\nu \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, η σχετική επιτάχυνση δύο γειτονικών γεωδαισιακών μας παρέχει ένα μέτρο για την τοπική καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας και υπολογίζεται μέσω του τανυστή Riemann. Η γεωδαισιακή απόκλιση αναφέρεται στην τάση των ελεύθερων σωματιδίων, τα οποία κινούνται σε γεωδαισιακές του καμπυλωμένου χωρόχρονου, να πλησιάζουν (σε περιοχές θετικής καμπυλότητας) ή να απομακρύνονται (σε περιοχές αρνητικής καμπυλότητας) το ένα από το άλλο. Από φυσικής άποψης το φαινόμενο αυτό αποδίδεται στις βαρυτικές παλιρροϊκές δυνάμεις (gravitational tidal forces). Στη γενική σχετικότητα, οι παλιρροϊκές δυνάμεις οφείλονται στον μη-μηδενισμό των δευτέρων παραγώγων της μετρικής ενός καμπυλωμένου χωρόχρονου, που έχει ως αποτέλεσμα ο τανυστής Riemann να

προκύπτει μη-μηδενικός: $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$. Στη Νευτώνεια βαρύτητα, οι παλιρροϊκές δυνάμεις που δέχονται δύο σωματίδια ή ένα σώμα μη-αμελητέων διαστάσεων οφείλονται στο γεγονός ότι το βαρυτικό πεδίο έχει διαφορετική ένταση και κατεύθυνση σε διαφορετικά σημεία του χώρου (ανομοιογένεια). Αυτό προκαλεί εστίαση στις τροχιές των σωματιδίων και παραμόρφωση στην περίπτωση ενός εκτεταμένου σώματος.

Μπορούμε να επαναδιατυπώνουμε την εξίσωση γεωδαισιακής απόκλισης ως εξίσωση που ικανοποιεί το διάνυσμα διαχωρισμού, ορίζοντας τον τανυστή παλιρροϊκής τάσης (tidal stress tensor):

$$E^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_{\lambda\rho\nu} T^\lambda T^\rho \quad (2.11.16)$$

όπου εδώ το εφαπτόμενο διάνυσμα T παίζει τον ρόλο της τετραταχύτητας ενός εκ των δύο σωματιδίων, έστω αυτού που κινείται στην πρώτη γεωδαισιακή. Έτσι οι συνιστώσες $S^\mu(t)$ του διανύσματος διαχωρισμού προκύπτουν από τη σχέση:

$$\frac{D^2 S^\mu}{dt^2} = E^\mu{}_\nu S^\nu \quad (2.11.17)$$

2.11.3 Συμμετρίες του τανυστή Riemann - Symmetries of the Riemann Tensor

Ο τανυστής Riemann ικανοποιεί χρήσιμες ιδιότητες συμμετρίας, με κάποιες να απορρέουν από την κατασκευή του και κάποιες άλλες να προκύπτουν από το γεγονός ότι η σύνδεση ∇ της πολλαπλότητας είναι η Levi-Civita.

Κατ' αρχή ο τανυστής Riemann είναι, βάσει του ορισμού (2.11.2) και της σύμβασης που ακολουθείται για τους δείκτες του, αντισυμμετρικός στους δύο τελευταίους δείκτες του:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha{}_{\beta\nu\mu} \quad (2.11.18)$$

Επιπλέον, λόγω της μηδενικής στρέψης της σύνδεσης Levi-Civita, ικανοποιεί την 1^η ταυτότητα του Bianchi που αναφέρει ότι το άθροισμα των κυκλικών μεταθέσεων των τριών κάτω δεικτών του τανυστή Riemann μηδενίζεται:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0 \Leftrightarrow R^\alpha{}_{[\beta\mu\nu]} = 0 \quad (2.11.19)$$

Οι πιο πάνω καθώς και ορισμένες επιπλέον συμμετρίες του τανυστή Riemann γίνονται εμφανείς εξετάζοντας τον τανυστή $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_{\beta\nu\mu}$ με όλους του δείκτες κάτω.

Συμμετρίες τανυστή Riemann

Οι συμμετρίες που διαθέτει ο τανυστής $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_{\beta\nu\mu}$, στη σύνδεση Levi-Civita, είναι:

1. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$
2. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$
3. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$

Επιπρόσθετα υπακούει στις δύο ταυτότητες του Bianchi:

- 1^η Ταυτότητα Bianchi (Αλγεβρική): $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0 \Leftrightarrow R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$
- 2^η Ταυτότητα Bianchi (Διαφορική): $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\alpha R_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\lambda\alpha\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{[\lambda} R_{\alpha\beta]\mu\nu} = 0$

Οι συμμετρίες (1),(2),(3) σε συνδυασμό με την 1^η Ταυτότητα Bianchi θέτουν περιορισμούς στις συνιστώσες του τανυστή Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Έστω ότι η πολλαπλότητα (M, g) έχει διάσταση n οπότε οι δείκτες α, β, μ, ν λαμβάνουν τιμές στο εύρος $0, 1, \dots, n-1$. Αν θεωρήσουμε το πρώτο ζεύγος $[\alpha\beta]$ αντισυμμετρικών δεικτών του τανυστή Riemann λαμβάνουμε $N = \frac{n(n-1)}{2}$ ανεξάρτητους συνδυασμούς. Ομοίως έχουμε $N = \frac{n(n-1)}{2}$ ανεξάρτητους συνδυασμούς για το δεύτερο ζεύγος $[\mu\nu]$ αντισυμμετρικών δεικτών. Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπόψη τη συμμετρικότητα του τανυστή Riemann στην εναλλαγή $[\alpha\beta] \leftrightarrow [\mu\nu]$, όπου κάθε ζεύγος λαμβάνει N τιμές επομένως καταλήγουμε ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες είναι $\frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right)$. Ο τελευταίος περιορισμός προέρχεται από την 1^η ταυτότητα Bianchi $R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$, η οποία λόγω των υπόλοιπων ιδιοτήτων συμμετρίας γράφεται ισοδύναμα $R_{[\alpha\beta\mu\nu]} = 0$. Η ταυτότητα αυτή δίνει $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ ανεξάρτητες εξισώσεις - περιορισμούς, μιας και όλοι οι δείκτες πρέπει να είναι διαφορετικοί, χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους. Συνεπώς σε μια n διάστατη πολλαπλότητα ο αριθμός ανεξάρτητων συνιστωσών του τανυστή Riemann προκύπτει:

$$\frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad (2.11.20)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως στον τετραδιάστατο χωρόχρονο της γενικής σχετικότητας, ο τανυστής Riemann διαθέτει 20 ανεξάρτητες συνιστώσες.

2.11.4 Συστολές του τανυστή Riemann - Contractions of the Riemann Tensor

Από το contraction των δεικτών του τανυστή Riemann, δεδομένων των συμμετριών που ικανοποιεί (θεωρώντας πάντοτε σύνδεση Levi-Civita) μπορούμε να λάβουμε έναν τανυστή τάξης $(0, 2)$, ο οποίος είναι και ο μοναδικός ανεξάρτητος τανυστής που προκύπτει από contractions, καθώς και ένα βαθμωτό μέγεθος. Τα δύο αυτά αντικείμενα, παρότι περιέχουν σαφώς λιγότερη πληροφορία από τον τανυστή Riemann, έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία αφού υπεισέρχονται στις εξισώσεις πεδίου του Einstein.

- Ο **τανυστής Ricci** (Ricci tensor) είναι ο συμμετρικός τανυστής τάξης $(0, 2)$ που προκύπτει από το contraction του άνω δείκτη με τον μεσαίο κάτω δείκτη του τανυστή Riemann:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (2.11.21)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή Ricci υπολογίζονται από τα σύμβολα Christoffel:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \quad (2.11.22)$$

Λόγω συμμετρίας $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, ο τανυστής Ricci μιας n -διάστατης πολλαπλότητας διαθέτει $\frac{n(n+1)}{2}$ ανεξάρτητες συνιστώσες (στον χωρόχρονο έχει 10 ανεξάρτητες συνιστώσες). Ο τανυστής Ricci περιέχει πληροφορίες για την καμπυλότητα κατά μήκος μιας συγκεκριμένης κατεύθυνσης.

Σημείωση: Αν $R_{\mu\nu} = 0$ σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας (π.χ. κενός χωρόχρονος), τότε την αποκαλούμε Ricci-επίπεδη (Ricci flat). Εννοείται πως αν μια πολλαπλότητα είναι επίπεδη ($R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$) είναι και Ricci επίπεδη, εντούτοις το αντίστροφο δεν ισχύει.

- Το **βαθμωτό Ricci** (Ricci scalar) ή **βαθμωτή καμπυλότητα** (scalar curvature) ορίζεται ως το ίχνος του τανυστή Ricci:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (2.11.23)$$

Το βαθμωτό Ricci παριστάνει τη "μέση" (προς όλες τις κατευθύνσεις) τοπική καμπυλότητα σε ένα σημείο της πολλαπλότητας.

Συστέλλοντας δύο φορές τη $2^{\text{η}}$ (διαφορική) ταυτότητα Bianchi: $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\alpha R_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\lambda\alpha\mu\nu} = 0$ με τη μετρική, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας την με $g^{\nu\beta}g^{\mu\lambda}$, παίρουμε:

$$\begin{aligned} g^{\nu\beta}g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\alpha R_{\beta\lambda\mu\nu} + \nabla_\beta R_{\lambda\alpha\mu\nu}) &= 0 \\ g^{\nu\beta}(\nabla^\mu R_{\alpha\beta\mu\nu} - \nabla_\alpha R^\mu_{\beta\mu\nu} + \nabla_\beta R^\mu_{\alpha\mu\nu}) &= 0 \\ g^{\nu\beta}(\nabla^\mu R_{\alpha\beta\mu\nu} - \nabla_\alpha R_{\beta\nu} + \nabla_\beta R_{\alpha\nu}) &= 0 \\ g^{\nu\beta}(\nabla^\mu R_{\beta\alpha\nu\mu} - \nabla_\alpha R_{\beta\nu} + \nabla_\beta R_{\alpha\nu}) &= 0 \\ \nabla^\mu R^\nu_{\alpha\nu\mu} - \nabla_\alpha R^\nu_{\nu} + \nabla^\nu R_{\alpha\nu} &= 0 \\ 2\nabla^\mu R_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha R &= 0 \end{aligned}$$

Γράφοντας $\nabla_\alpha R = g_{\alpha\mu}\nabla^\mu R$ και πολλαπλασιάζοντας με $1/2$ την παραπάνω εξίσωση, καταλήγουμε στην συνεσταλμένη ταυτότητα Bianchi (Contracted Bianchi Identity) γνωστή και ως conservation identity:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 0 \quad (2.11.24)$$

Ισχύει λοιπόν $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$ άρα εν γένει η απόκλιση του τανυστή Ricci δεν μηδενίζεται (εκτός αν $R = 0$). Ωστόσο μπορούμε να ορίσουμε έναν νέο τανυστή, τον οποίο καλούμε **τανυστή Einstein**:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.11.25)$$

ο οποίος, λόγω της συνεσταλμένης ταυτότητας Bianchi, έχει μηδενική συναλλοίωτη απόκλιση:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.11.26)$$

Εξ' ορισμού, ο τανυστής Einstein είναι τάξης $(0, 2)$ και συμμετρικός: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$. Κατασκευάζεται από τη μετρική, τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους της οπότε περιέχει πληροφορίες για την εσωτερική γεωμετρία του χωρόχρονου και συγκεκριμένα για την τοπική του καμπυλότητα. Ειδικότερα, όπως θα δούμε από τις εξισώσεις Einstein, ο τανυστής Einstein περιγράφει πώς ο χωρόχρονος καμπυλώνεται παρουσία πηγών ύλης ή και ενέργειας.

2.12 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής - Stress-Energy Tensor

Η κεντρική ιδέα στη γενική σχετικότητα είναι ότι η βαρύτητα είναι γεωμετρία και συγκεκριμένα καμπυλότητα, και είναι γνωστό ότι η καμπυλότητα του χωρόχρονου οφείλεται στη μάζα και γενικότερα στην ενέργεια που εμπεριέχεται σ'αυτόν (ισοδυναμία μάζας-ενέργειας). Ακόμη όμως και στα πλαίσια της ειδικής σχετικότητας, που ισχύει σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα, τόσο ο όγκος όσο και η ενέργεια που περικλείει μια κατανομή σωματιδίων εξαρτώνται από τον παρατηρητή που εκτελεί τη μέτρηση. Προκύπτει λοιπόν η ανάγκη έκφρασης της πυκνότητας ενέργειας ενός συστήματος με τρόπο που να είναι ανεξάρτητος του παρατηρητή (δηλαδή του συστήματος συντεταγμένων) και αυτό είναι δυνατό μόνο αν η ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος γραφεί υπό μορφή τανυστή. Όπως θα δούμε, ο ζητούμενος τανυστής είναι ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης $T^{\mu\nu}$ γνωστός ως **τανυστής ενέργειας - ορμής** (energy-momentum tensor ή stress-energy tensor) και περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες για το ενεργειακό περιεχόμενο μιας συνεχούς κατανομής ύλης. Με τον όρο ενεργειακό

περιεχόμενο εννοούμε κάθε φυσική ποσότητα που αντιστοιχεί σε κάποια κάποια μορφή ενέργειας (μάζα, ορμή, πίεση, διατμητικές τάσεις, ηλεκτρομαγνητικά πεδία, κβαντικά πεδία κτλ.).

Για να ορίσουμε τις συνιστώσες $T^{\mu\nu}$ του τανυστή ενέργειας-ορμής θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με τετραορμή p^μ που βρίσκεται σε έναν στοιχειώδη όγκο dV (όχι κατ' ανάγκη χωρικό). Ο όγκος αυτός αντιστοιχεί σε μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια του τετραδιάστατου χωρόχρονου ο προσανατολισμός της οποίας καθορίζεται από το κάθετο συνδιάνυσμα (1-form) n_μ σ' αυτή. Για να συσχετίσουμε τη μεταφορά τετραορμής dp^μ του συστήματος διαμέσου του προσανατολισμένου όγκου $n_\nu dV$, χρειαζόμαστε έναν τανυστή $T^{\mu\nu}$ τάξης (2, 0) ο οποίος είναι ακριβώς ο τανυστής ενέργειας-ορμής του συστήματος. Γράφουμε λοιπόν:

$$dp^\mu = T^{\mu\nu} n_\nu dV \quad (2.12.1)$$

Αν το κάθετο συνδιάνυσμα n_μ στην τριεπιφάνεια βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα x^k τότε το στοιχείο όγκου dV αντιστοιχεί σε τριεπιφάνεια σταθερού x^k (π.χ σε συντεταγμένες (t, x, y, z) αν $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$ τότε $dV = dx dy dz$ ενώ αν $n_\mu = (0, 1, 0, 0)$ τότε $dV = dt dy dz$ κτλ). Η σχέση (2.12.1) υποδηλώνει ότι η $T^{\mu\nu}$ συνιστώσα του τανυστή ενέργειας-ορμής αντιστοιχεί στη ροή της μ συνιστώσας της τετραορμής από την τριεπιφάνεια $x^\nu = const.$. Για τις διάφορες τιμές των δεικτών μ, ν λαμβάνουμε τους πιο κάτω ορισμούς για τις συνιστώσες $T^{\mu\nu}$:

- T^{00} = Ροή Ενέργειας από την επιφάνεια $t = const.$ = Πυκνότητα Ενέργειας = ρ
- T^{i0} = Ροή i -συνιστώσας ορμής από την επιφάνεια $t = const.$ = Πυκνότητα i -συνιστώσας ορμής = π^i
- T^{0i} = Ροή Ενέργειας από την επιφάνεια $x^i = const.$
- T^{ij} = Ροή i -συνιστώσας ορμής από την επιφάνεια $x^j = const.$ =
$$\begin{cases} \text{Πίεση/Ορθή τάση} & i = j \\ \text{Διατμητική τάση} & i \neq j \end{cases}$$

όπου με τον όρο ροή ενέργειας/ορμής εννοούμε τη μεταφερόμενη ενέργεια/ορμή σε μια τριεπιφάνεια ανά μονάδα τριεπιφανείας και $i, j = 1, 2, 3$. Οι συνιστώσες $T^{\mu\nu}$ που ορίζονται πιο πάνω, λόγω χάρη ρ και π^i , αντιστοιχούν στα μεγέθη που μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας της κατανομής. Βέβαια, ο παρατηρητής αυτός βλέπει το σύστημα σωματιδίων να είναι μακροσκοπικά ακίνητο, όμως εξακολουθεί να καταγράφει ροή ενέργειας και ορμή διότι σε μικροσκοπική κλίμακα υπάρχει ροή ενέργειας/ορμής εξαιτίας φαινομένων μεταφοράς (π.χ θερμική αγωγιμότητα). Ένας άλλος παρατηρητής ο οποίος κινείται στον χωρόχρονο με τετραταχύτητα v^μ μετράει πυκνότητα ενέργειας:

$$\rho^{(v)} = T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (2.12.2)$$

την οποία θεωρούμε μη-αρνητική με την υπόθεση ότι ασχολούμαστε με συνήθη ύλη.

Παρατηρούμε ότι $T^{0i} = T^{i0}$ καθώς η ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας με κάθετο διάνυσμα στην κατεύθυνση i , συμπίπτει ως φυσική έννοια με την πυκνότητα ορμής στην κατεύθυνση i . Επιπλέον, ο 3×3 τανυστής με συνιστώσες T^{ij} παριστάνει τη δύναμη (ρυθμός μεταβολής της ορμής) που ασκείται σε μια επιφάνεια ανά μονάδα της επιφανείας αυτής, όπου η δύναμη βρίσκεται στην κατεύθυνση i και η επιφάνεια έχει κάθετο διάνυσμα στην κατεύθυνση j . Ο τανυστής T^{ij} στην κλασική μηχανική καλείται τανυστής τάσης (stress tensor - σ^{ij}) και είναι συμμετρικός $T^{ij} = T^{ji}$ (αυτό προκύπτει από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας στο στοιχείο όγκου dV). Τα διαγώνια στοιχεία T^{ii} παριστάνουν πιέσεις (ορθές τάσεις) ενώ τα μη-διαγώνια στοιχεία $T^{ij}, i \neq j$ διατμητικές τάσεις.

Επομένως, με τον τρόπο που τον έχουμε ορίσει, ο τανυστής ενέργειας ορμής είναι τάξης $(2, 0)$, αναπαρίσταται από έναν 4×4 πίνακα και είναι συμμετρικός: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \text{energy density} & \text{energy flux} \\ \hline \text{momentum density} & \text{stress tensor} \end{array} \right)$$

Σχήμα 2.12.1: Φυσικό νόημα των συνιστωσών $T^{\mu\nu}$ του τανυστή ενέργειας-ορμής.

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής του Hilbert είναι από μαθηματικής άποψης ο πληρέστερος και ορίζεται θεωρώντας ότι ο χωρόχρονος περιέχει μια πηγή ύλης/ενέργειας της οποίας γνωρίζουμε τη δράση S_M και κατ' επέκταση τη Λαγκρατζιανή \mathcal{L}_M όπου $S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M$, με $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$. Εδώ η Λαγκρατζιανή είναι βαθμωτή συνάρτηση των πεδίων ύλης, των συναλλοίωτων παραγώγων τους και της μετρικής. Ο τανυστής ενέργειας ορμής ορίζεται θεωρώντας τη μεταβολή της δράσης ως προς μεταβολές της μετρικής:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_M = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (2.12.3)$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω τύπου (ή μέσω φυσικών επιχειρημάτων στην περίπτωση ιδανικού ρευστού) υπολογίζονται οι εκφράσεις του τανυστή ενέργειας-ορμής για τις μορφές ύλης και ενέργειας που παρατίθενται πιο κάτω.

- **Ιδανικό Ρευστό:** Θεωρούμε ιδανικό ρευστό, δηλαδή ρευστό χωρίς ιξώδες και χωρίς θερμική αγωγιμότητα (τέτοια ρευστά έχουν εφαρμογή στην κοσμολογία όπου το σύμπαν μοντελοποιείται ως ιδανικό ρευστό). Το ιδανικό ρευστό έχει πεδίο τετραταχύτητας u^μ (με $u^\mu u_\mu = -1$), πυκνότητα ενέργειας ρ και πίεση P και περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (2.12.4)$$

Η πίεση και η ενεργειακή πυκνότητα είναι βαθμωτά μεγέθη τα οποία εν γένει εξαρτώνται από τη θέση: $\rho = \rho(x^\mu)$ και $P = P(x^\mu)$ και συνδέονται μέσω μιας καταστατικής εξίσωσης της μορφής $P = P(\rho)$. Η τιμή τους, όπως εισέρχεται στον πιο πάνω τύπο, είναι αυτή που μετράει ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το ρευστό (comoving observer). Στο τοπικό αδρανειακό σύστημα ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) του παρατηρητή αυτού που συμπίπτει βέβαια με το σύστημα ηρεμίας του ρευστού, το ρευστό είναι ιστροπικό και ο τανυστής ενέργειας-ορμής λαμβάνει διαγώνια μορφή:

$$T_{REST}^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P) \quad (2.12.5)$$

- **Η/Μ Πεδίο:** Σε περιοχή του χωρόχρονου όπου επικρατεί ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που εκφράζεται με τον τανυστή Η/Μ πεδίου $F^{\mu\nu}$, ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής ενέργειας-ορμής γράφεται:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \quad (2.12.6)$$

- **Κβαντικό Πεδίο Klein-Gordon:** Σε περίπτωση όπου στον χωρόχρονο υπάρχει κάποιο spin-0 αφόρτιστο σωματίδιο με μάζα m , το οποίο περιγράφεται από ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο Klein-Gordon $\phi(x)$, ο τανυστής ενέργειας-ορμής γράφεται:

$$T_{\mu\nu} = (\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + m^2\phi^2) \quad (2.12.7)$$

Στον επίπεδο χωρόχρονο της ειδικής σχετικότητας όπου δεν υπάρχει βαρύτητα, η ενέργεια και η ορμή ενός συστήματος διατηρούνται σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.12.8)$$

Η σχέση αυτή παρέχει 4 εξισώσεις, μία για κάθε τιμή του δείκτη ν . Για $\nu = 0$ αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας που περιέχεται σε έναν όγκο ισούται με (μείον) τη ροή ενέργειας που διέρχεται από την επιφάνεια που περικλείει τον όγκο αυτό:

$$\partial_t T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0 \Rightarrow \int_V \partial_t \rho = - \int_V \partial_i \pi^i dV \stackrel{Gauss}{\Rightarrow} \frac{dE}{dt} = - \oint_{\partial V} \pi^i dA_i \quad (2.12.9)$$

Για $\nu = i$ αναφέρει ότι η δύναμη που εξασκεί το σύστημα στα τοιχώματα του όγκου αντισταθμίζει την εξωτερική δύναμη που δέχεται στο σύνορό του ο όγκος λόγω εξωτερικών τάσεων.

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ij} = 0 \Rightarrow \int_V \partial_t \pi^i dV = - \int_V \partial_j T^{ij} dV \stackrel{Gauss}{\Rightarrow} \frac{dp^i}{dt} = - \oint_{\partial V} T^{ij} dA_j \quad (2.12.10)$$

Αν $T^{\mu\nu} = 0$ έξω από τον όγκο που περικλείει το σύστημα καθώς και στο σύνορο ∂V του όγκου αυτού, τότε έχουμε ένα απομονωμένο σύστημα και ανακτούμε τους συνήθεις νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής (διατήρηση τετραορμής) στην ειδική σχετικότητα:

$$\partial_t E = 0 \quad (2.12.11)$$

$$\partial_t \vec{p} = 0 \quad (2.12.12)$$

Σε έναν καμπυλωμένο χωρόχρονο αναμένουμε πως η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής (2.12.8) θα ισχύει τοπικά, δηλαδή σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα όπου ισχύουν οι νόμοι της ειδικής σχετικότητας. Η επέκταση του νόμου διατήρησης $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ σε καμπυλωμένους χωρόχρονους πραγματοποιείται κάνοντας την αλλαγή $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ (minimal coupling). Άρα στη γενική σχετικότητα η συναλλοίωτη απόκλιση του τανυστή ενέργειας-ορμής μηδενίζεται, δηλαδή:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.12.13)$$

Η εξίσωση (2.12.13) όντας τανυστική ισχύει γενικότερα σε κάθε σύστημα αναφοράς και ανάγεται στην (2.12.8) σε ένα LIF. Τονίζουμε ότι ο νόμος της συναλλοίωτης διατήρησης $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ δεν οδηγεί σε έναν καθολικό φυσικό νόμο διατήρησης, μόνο τοπικά αντιστοιχεί σε πραγματικό νόμο διατήρησης, σε αντίθεση με τον $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ στην ειδική σχετικότητα. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε υπολογί-

ζοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο του τανυστή ενέργειας-ορμής:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu}T^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\mu\rho} = 0 \\ \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\rho}(\sqrt{-g})T^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\mu\rho} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\mu\rho} &= 0\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_{\rho}g_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\rho}(\sqrt{-g})$ με $g = \det(g_{\mu\nu})$. Ισοδύναμα:

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\mu\rho} \quad (2.12.14)$$

Εξαιτίας του όρου $\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\mu\rho}$ στο δεξί μέλος, συνάγουμε ότι ο τοπικός νόμος διατήρησης $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ δεν οδηγεί σε καθολική διατήρηση της ενέργειας/ορμής, όταν ολοκληρωθεί σε ολόκληρο τον χωρόχρονο (δεν μπορούμε να σχηματίσουμε διατηρούμενες ποσότητες από τη (2.12.14)). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο $T^{\mu\nu}$ περιλαμβάνει μόνο τη συνεισφορά από συνήθεις πηγές ύλης και ενέργειας και δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. Ένα φυσικό σύστημα μπορεί να ανταλλάξει ενέργεια και ορμή με το βαρυτικό πεδίο του οποίου τη βαρυτική ενέργεια και ορμή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τοπικά, στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας, καθότι η βαρύτητα δεν είναι δύναμη αλλά είναι συνυφασμένη με τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Συμπερασματικά, η ενέργεια δεν διατηρείται στη γενική σχετικότητα πολύ απλά επειδή είναι αδύνατο να ορίσουμε, τουλάχιστον τοπικά, την ενέργεια του ίδιου του βαρυτικού πεδίου.

Εντούτοις υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να ορίσουμε μια μορφή καθολικής (global) συνολικής ενέργειας/μάζας, ορμής και στροφορμής που περιέχει ένας ασυμπτωτικά επίπεδος χωρόχρονος. Αυτό μας οδηγεί στις έννοιες της ADM μάζας και ADM ορμής, μεγέθη τα οποία υπολογίζονται στο χωρικό άπειρο ($r \rightarrow \infty$) όπου ισχύει το όριο ασθενούς πεδίου και εκφράζουν τη συνολική ενέργεια και ορμή που φέρει ένας ασυμπτωτικά επίπεδος χωρόχρονος. Αντίστοιχα μεγέθη είναι η μάζα Komar και η ορμή Komar, οι τιμές των οποίων συμφωνούν με αυτές των ADM μεγεθών. Μια άλλη προσέγγιση είναι να ορίσουμε έναν ψευδοτανυστή ενέργειας-ορμής $t_G^{\mu\nu}$ (π.χ. Landau-Lifshitz pseudotensor $t_{LL}^{\mu\nu}$) που κατασκευάζεται από γεωμετρικές ποσότητες και εκφράζει την ενέργεια και την ορμή του βαρυτικού πεδίου. Η ιδέα είναι ότι το άθροισμα του τανυστή ενέργειας-ορμής της ύλης $T^{\mu\nu}$ και του ψευδοτανυστή ενέργειας-ορμής της βαρύτητας $t_G^{\mu\nu}$ διατηρείται: $\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(T^{\mu\nu} + t_G^{\mu\nu})] = 0$. Υπάρχει ωστόσο το ζήτημα ότι αντικείμενα όπως ο ψευδοτανυστής $t_G^{\mu\nu}$, εφόσον δεν είναι τανυστές, εξαρτώνται από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων έτσι η χρησιμότητά τους είναι περιορισμένη.

2.13 Εξισώσεις πεδίου του Einstein - Einstein field equations

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein είναι οι θεμελιώδεις εξισώσεις της γενικής σχετικότητας καθώς συσχετίζουν τη γεωμετρία-καμπυλότητα ενός χωρόχρονου με την κατανομή ύλης και ενέργειας που υπάρχει σε αυτόν. Διατυπώθηκαν αξιωματικά από τον A. Einstein το 1915 και είναι οι εξής:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.13.1)$$

όπου G η σταθερά βαρύτητας του Νεύτωνα. Χρησιμοποιώντας τον τανυστή Einstein, γράφονται:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.13.2)$$

Η πιο πάνω εξίσωση περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι πηγές ύλης και ενέργειας που περιέχει ένας χωρόχρονος (που αναπαρίστανται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$) καθορίζουν την καμπυλότητα-γεωμετρία του (η οποία εκφράζεται μέσω του τανυστή Einstein $G_{\mu\nu}$). Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein αποτελούν ένα σύστημα 10 μη-γραμμικών, πεπλεγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων 2^{ου} βαθμού για τις συνιστώσες $g_{\mu\nu}(x)$ της μετρικής.

Στην πράξη η επίλυση των εξισώσεων πεδίου του Einstein είναι εξαιρετικά δύσκολη. Αφενός, το σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι μη-γραμμικό ως προς τις συνιστώσες της μετρικής, γεγονός που το καθιστά περίπλοκο. Αφετέρου η τανυστής ενέργειας-ορμής στο δεξί μέλος δεν είναι εκ των προτέρων γνωστός, διότι εν γένει εξαρτάται από τη μετρική η οποία είναι άγνωστη ποσότητα. Έτσι ο όρος που περιέχει τις πηγές καμπυλότητας δεν είναι γνωστός (σε αντίθεση π.χ. με την επίλυση της εξίσωσης Poisson στην ηλεκτροστατική). Εν προκειμένω, λύνουμε συγχρόνως για τις συνιστώσες της μετρικής καθώς και για την κατανομή της ύλης-ενέργειας. Οι ακριβείς αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Einstein που έχουν βρεθεί μέχρι στιγμής είναι περιορισμένες σε αριθμό και αναφέρονται σε συγκεκριμένα αστροφυσικά συστήματα τα οποία υποθέτουμε εξ' αρχής ότι ικανοποιούν ορισμένες συμμετρίες. Αν ο χωρόχρονος παρουσιάζει κάποιες συμμετρίες τότε επιδέχεται διανύσματα Killing άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ειδικά συστήματα συντεταγμένων στα οποία η μετρική αποκτά απλούστερη μορφή (π.χ. στατικός - μετρική ανεξάρτητη t , αξονικά συμμετρικός - μετρική ανεξάρτητη φ , σφαιρικά συμμετρικός - η 2D επιφάνεια σταθερού r, t έχει στοιχείο μήκους $d\sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$). Αν ένα φυσικό σύστημα δεν ικανοποιεί κάποια συμμετρία, τότε υποχρεωτικά καταφεύγουμε στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Einstein, και η παρουσίαση του σχετικού φορμαλισμού αποτελεί τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Οι Choquet-Bruhat & Geroch απέδειξαν ότι σε έναν καθολικά υπερβολικό χωρόχρονο, οι εξισώσεις Einstein σε συνδυασμό με αρχικές συνθήκες για την τιμή της μετρικής $g_{\mu\nu}|_{t_0}$ και την πρώτη χρονική παραγωγό της $\partial_t g_{\mu\nu}|_{t_0}$, που προσδιορίζονται σε μια αρχική χωροειδή υπερεπιφάνεια $\Sigma : t_0 = const.$, συνιστούν ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα Cauchy. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα (up to diffeomorphism) του μεγιστικού χωρόχρονου (M, g) που αποτελεί τη λύση των εξισώσεων Einstein η οποία προκύπτει από τη χρονική εξέλιξη κάποιων αρχικών δεδομένων στη Σ εξασφαλίζεται από το θεώρημα των Choquet-Bruhat & Geroch και λέγεται "Maximal Cauchy development".

Σημείωση: Βάσει του θεωρήματος του Lovelock, στον τανυστή Einstein μπορούμε να προσθέσουμε έναν όρο της μορφής $\Lambda g_{\mu\nu}$, με Λ μια σταθερά, χωρίς να επηρεάσουμε τη συναλλοίωτη διατήρηση $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ του τανυστή. Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις πεδίου του Einstein παίρνουν τη μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.13.3)$$

Ο παράγοντας Λ είναι η λεγόμενη κοσμολογική σταθερά και προέρχεται από την ενεργειακή πυκνότητα του κενού ρ_Λ , ειδικότερα $\Lambda = 8\pi G \rho_\Lambda$. Για τον λόγο αυτό, μπορεί κανείς να ορίσει τον τανυστή ενέργειας-ορμής του κενού $T_{\mu\nu}^\Lambda = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$ και να γράψει:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda) \quad (2.13.4)$$

Η κοσμολογική σταθερά εισήχθηκε από τον Einstein ώστε να μοντελοποιήσει το σύμπαν ως στατικό (μη-διαστελλόμενο και μη-επιταχυνόμενο). Θεωρώντας πως το σύμπαν περιέχει συνηθισμένη ύλη προκύπτει $\Lambda > 0$ και για να μπορούν οι εξισώσεις Einstein να δίνουν το σωστό Νευτώνιο βαρυτικό δυναμικό στην προσέγγιση ασθενούς πεδίου, πρέπει η τιμή του Λ να είναι εξαιρετικά μικρή. Πειραματικές παρατηρήσεις εξασφαλίζουν αυτή την απαίτηση, προσδιορίζοντας $\Lambda \approx 1.11 \cdot 10^{-52} m^{-2}$. Εξαιτίας της πολύ μικρής τιμής της, η σταθερά Λ συνεισφέρει σημαντικά μόνο σε κοσμολογικές κλίμακες ενώ μπορεί να αγνοηθεί σε αστροφυσικές κλίμακες και στη μελέτη αστέρων, μαύρων τρυπών, γαλαξιών κτλ. Συνεπώς η κοσμολογική σταθερά θα αμεληθεί ($\Lambda = 0$) στην παρούσα εργασία και οι εξισώσεις Einstein θα έχουν τη μορφή (2.13.1).

Σημείωση: Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το γεωμετρικό σύστημα μονάδων (geometrized units) όπου $G = c = 1$ και τα υπόλοιπα θεμελιώδη μεγέθη (μάζα, χρόνος) μετρώνται σε μονάδες μήκους ($1 s = 3 \cdot 10^8 m$, $1 kg = 0.743 \cdot 10^{-27} m$). Σε αυτό το σύστημα μονάδων:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.13.5)$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε μια εναλλακτική μορφή των εξισώσεων Einstein που λέγεται "trace-reversed". Πολλαπλασιάζοντας την (2.13.5) με $g^{\mu\nu}$ λαμβάνουμε:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \Leftrightarrow R - \frac{1}{2}\underbrace{\delta^{\mu}_{\mu}}_4 R = 8\pi T \Leftrightarrow R = -8\pi T \quad (2.13.6)$$

όπου $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ το βαθμωτό Ricci και $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής. Αντικαθιστώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα στην (2.13.5) μπορούμε να πάρουμε μια ισοδύναμη μορφή (trace-reversed) των εξισώσεων Einstein που συνδέει τον τανυστή Ricci με τις πηγές ύλης και ενέργειας:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (2.13.7)$$

Στο κενό όπου απουσιάζει κάθε μορφή ύλης-ενέργειας (θεωρούμε $\Lambda = 0$), έχουμε $T_{\mu\nu} = 0$ οπότε από την (2.13.6) έπεται $R = 0$. Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής Einstein συμπίπτει με τον τανυστή Ricci και οι δύο τανυστές μηδενίζονται απουσία ύλης ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = 0$). Άρα οι εξισώσεις Einstein στο κενό (vacuum Einstein equations) ανάγονται στην εύρεση μιας Ricci-επίπεδης μετρικής:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.13.8)$$

Η επίλυση της πιο πάνω εξίσωσης έχει ιδιαίτερη (αστρο)φυσική σημασία καθώς δίνει τη μετρική στον κενό χώρο έξω από διάφορες κατανομές ύλης, όπως αστέρες, μαύρες τρύπες κτλ. Ακόμη όμως και στο κενό, οι εξισώσεις Einstein παραμένουν πολύπλοκες και χωρίς την ύπαρξη συμμετριών στον χωρόχρονο, η εύρεση μιας αναλυτικής γενικής λύσης είναι υπερβολικά δύσκολη.

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι εξισώσεις Einstein στο κενό προβλέπουν την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων, που είναι εγκάρσιες διαταραχές της μετρικής (του "βαρυτικού πεδίου") οι οποίες διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός και διαθέτουν δύο δυνατές πολώσεις: h_+ και h_{\times} . Άρα το "βαρυτικό πεδίο" διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή δύο τρόπους με τους οποίους ενέργεια και ορμή μπορούν να διαδοθούν υπό τη μορφή βαρυτικών κυμάτων στον χωρόχρονο.

2.13.1 Επιλογή συνθηκών βαθμίδος - Fixing the Gauge

Οι 10 εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά συνδέονται μέσω 4 εξισώσεων λόγω των συνεσταλμένων ταυτοτήτων του Bianchi. Συγκεκριμένα, στο αριστερό μέλος οι συνεσταλμένες ταυτοτήτες του Bianchi επιβάλλουν την ταυτότητα $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ η οποία συνάδει με την διατήρηση του τανυστή ενέργειας ορμής στο δεξί μέλος $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Λαμβάνουμε λοιπόν 4 περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται οι 10 εξισώσεις Einstein, πράγμα που σημαίνει ότι απομένουν 6 ανεξάρτητες "δυναμικές" εξισώσεις για τον προσδιορισμό των στοιχείων της μετρικής.

Εκ πρώτης όψεως οι 6 ανεξάρτητες εξισώσεις που πηγάζουν από τις εξισώσεις Einstein δεν επαρκούν για να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο τη μετρική μιας και έχει 10 ανεξάρτητες συνιστώσες. Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται η ελευθερία επιλογής συντεταγμένων/επιλογής βαθμίδας (coordinate freedom/gauge freedom) η οποία μας παρέχει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε 4 συνιστώσες της μετρικής μέσω ισάριθμων εξισώσεων που παρέχονται από τη συνθήκη βαθμίδας, η οποία επιλέγεται κατά βούληση. Η ελευθερία στην επιλογή συντεταγμένων/βαθμίδας είναι εγγενές στοιχείο της γενικής σχετικότητας καθώς οι διαφορομορφισμοί, που αντιστοιχούν πρακτικά στην αλλαγή συντεταγμένων, είναι μετασχηματισμοί βαθμίδος στη γενική σχετικότητα (diffeomorphism invariance of GR). Με άλλα λόγια, αν ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται στον χωρόχρονο (M, g) με ένα τανυστικό πεδίο S , τότε αν $\phi : M \rightarrow N$ διαφορομορφισμός τα σύνολα (M, g, S, \dots) και $(N, \phi^*g, \phi^*S, \dots)$ είναι ισοδύναμα από φυσικής άποψης, περιγράφουν την ίδια φυσική κατάσταση υπό διαφορετική οπτική γωνία/συντεταγμένες. Γι' αυτό άλλωστε οι νόμοι της φυσικής στη γενική σχετικότητα γράφονται σε τανυστική μορφή, ώστε να είναι αναλλοίωτοι σε διαφορομορφισμούς.

Η ελευθερία επιλογής συντεταγμένων/βαθμίδος μας επιτρέπει να επιβάλουμε 4 εξισώσεις που θα ικανοποιούν τα στοιχεία της μετρικής ή πιο απλά να επιλέξουμε αυθαίρετα την τιμή 4 στοιχείων της μετρικής (gauge functions). Αυτό συμβαίνει διότι μπορούμε πάντα να αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\nu$ καθορίζοντας 4 σχέσεις της μορφής $\tilde{x}^\nu = \tilde{x}^\nu(x^\mu)$ με $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$, χωρίς να αλλάξουμε τη γεωμετρία του χωρόχρονου, που προσδιορίζεται από την εξίσωση Einstein που είναι εξίσωση τανυστών. Η μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\nu(x^\mu))$ και η μετρική $g(x^\mu)$ είναι δύο διαφορετικές μετρικές οι οποίες όμως είναι φυσικά ισοδύναμες αφού προκύπτουν από την ίδια τανυστική εξίσωση: $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Δηλαδή, αν μια μετρική g ικανοποιεί την εξίσωση Einstein, μια άλλη μετρική $\tilde{g} = \phi^*g$ που συνδέεται με την πρώτη μέσω ενός διαφορομορφισμού ϕ (μετασχηματισμού βαθμίδος) θα ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. Συνοπτικά, η λύση των εξισώσεων Einstein είναι μια 4-παραμετρική οικογένεια μετρικών όπου όλες έχουν το ίδιο φυσικό περιεχόμενο και για να ξεχωρίσουμε μια συγκεκριμένη μετρική, να λάβουμε δηλαδή μοναδική λύση στις εξισώσεις Einstein, οφείλουμε να προσδιορίσουμε μια συνθήκη βαθμίδας. Εδώ η συνθήκη βαθμίδας αντιστοιχεί στην επιλογή 4 εξισώσεων που θα ικανοποιούν οι συντεταγμένες ή οι συνιστώσες της μετρικής. Επί παραδείγματι, μια επιλογή βαθμίδας είναι η αρμονική βαθμίδα (harmonic gauge): $g^{\nu\rho}\nabla_\nu\nabla_\rho x^\mu = 0 \Rightarrow g^{\nu\rho}\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$ ενώ μια άλλη είναι η αυθαίρετη επιλογή τιμών για 4 στοιχεία της μετρικής. Η επιλογή βαθμίδας προσδιορίζει αυτόματα τους 4 "μη-φυσικούς" βαθμούς ελευθερίας της μετρικής που σχετίζονται με τις συντεταγμένες και αφήνει τους υπόλοιπους 6 φυσικούς βαθμούς ελευθερίας της μετρικής να καθοριστούν από τις "δυναμικές" εξισώσεις Einstein.

2.14 Χωρόχρονος Schwarzschild - Schwarzschild Spacetime

Η μετρική Schwarzschild περιγράφει τη γεωμετρία του κενού χωρόχρονου στο εξωτερικό ενός στατικού (χρονικά αμετάβλητου) σφαιρικού σώματος. Η λύση Schwarzschild είναι ακριβής λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό $R_{\mu\nu} = 0$ και ευρίσκεται με την υπόθεση ότι η μετρική ικανοποιεί τις εξής συμμετρίες:

1. **Στατική:** στάσιμη (χρονικά ανεξάρτητη) & διαγώνια στοιχεία της μορφής $g_{0i} = 0$
2. **Σφαιρικά Συμμετρική:** ομάδα ισομετρίας της μετρικής η ομάδα περιστροφών $SO(3)$ ή μια υποομάδα της, με τροχιές¹ τις 2-σφαίρες (S^2)

Όταν ο χωρόχρονος είναι στάσιμος (stationary), η μετρική σε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι ανεξάρτητη του χρόνου, όμως εν γένει το στοιχείο μήκους ds^2 περιέχει μη διαγώνιους όρους της μορφής $dt dx^i$. Αν επιπλέον είναι και στατικός (static) τότε τα μη-διαγώνια στοιχεία που περιέχουν τον χρόνο μηδενίζονται, διότι $g_{tx^i} = 0$ ώστε η μετρική να είναι αμετάβλητη στην αντιστροφή του χρόνου $t \rightarrow -t$. Η σφαιρική συμμετρία υπονοεί ότι η ομάδα συμμετρίας (ισομετρίας) της μετρικής είναι η $SO(3)$ (ή κάποια ισομορφική υποομάδα της) οπότε η δισδιάστατη επιφάνεια σταθερού r και t αποτελεί τροχιά της $SO(3)$, διαθέτει δηλαδή τις ίδιες συμμετρίες με μια 2-σφαίρα S^2 όσον αφορά στις γωνίες θ και φ των σφαιρικών συντεταγμένων. Λαμβάνοντας υπόψη τις συμμετρίες, επιλέγουμε τις λεγόμενες συντεταγμένες Schwarzschild (t, r, θ, φ) , όπου t η χρονική συντεταγμένη, r η ακτινική συντεταγμένη, θ η πολική γωνία και φ η αζιμουθιακή γωνία με $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Διευκρινίζουμε πως η συντεταγμένη r δεν αντιστοιχεί στην ακτίνα της 2-σφαίρας (απόσταση ενός σημείου από το κέντρο), αφού το σημείο $r = 0$ δεν συμπεριλαμβάνεται κατ' ανάγκη στην πολλαπλότητα, άρα το κέντρο της 2-σφαίρας δεν ορίζεται. Κατ' ακρίβεια, η ακτινική συντεταγμένη r λέγεται "επιφανειακή ακτίνα" (areal radius) διότι ορίζεται με τρόπο ώστε η επιφάνεια σταθερού r και σταθερού t να είναι μια 2-σφαίρα (S^2) εμβαδού A :

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow r = (A/4\pi)^{1/2} \quad (2.14.1)$$

Η στατικότητα και η σφαιρική συμμετρία έπονται ότι ο τετραδιάστατος χωρόχρονος Schwarzschild μπορεί να διαμεριστεί σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες οι οποίες έχουν όλες την ίδια γεωμετρία, συγκεκριμένα είναι ομόκεντρες 2-σφαίρες (S^2). Οπότε η μετρική για σταθερό t και r είναι αυτή της 2-σφαίρας:

$$d\sigma^2 = r^2 d\Omega^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.14.2)$$

Με βάση τις συμμετρίες της μετρικής, η γενική μορφή για το στοιχείο μήκους ενός στατικού, σφαιρικά συμμετρικού χωρόχρονου είναι:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.14.3)$$

Έχουμε απλοποιήσει το πρόβλημα, καθώς αντί να λύσουμε τις εξισώσεις Einstein για να βρούμε τις 6 "φυσικές" συνιστώσες της μετρικής χρειάζεται απλώς να βρούμε τις συναρτήσεις $-f(r) = g_{tt}(r)$ και $h(r) = g_{rr}(r)$. Δεδομένου ότι ο χωρόχρονος Schwarzschild αποτελεί λύση κενού ($T_{\mu\nu} = 0$), ο προσδιορισμός των $f(r)$ και $h(r)$ γίνεται με την αντικατάσταση της πιο πάνω έκφρασης της μετρικής στις εξισώσεις Einstein στο κενό, $R_{\mu\nu} = 0$. Πραγματοποιώντας την αντικατάσταση προκύπτει $f(r) = 1/h(r)$ και $f(r) = 1 + C/r$, με C μια σταθερά ολοκλήρωσης. Η τιμή της σταθεράς C υπολογίζεται με την απαίτηση ότι για $r \rightarrow \infty$ ισχύει η προσέγγιση ασθενούς πεδίου (ισοδύναμα, ο χωρόχρονος είναι

¹τροχιά ενός σημείου p κάτω από τη δράση μιας ομάδας συμμετρίας ορίζεται το σύνολο σημείων που προκύπτει από τη δράση όλων των στοιχείων της ομάδας στο p

ασυμπτωτικά επίπεδος) η οποία συνδέει την g_{tt} συνιστώσα στην περιοχή $r \rightarrow \infty$ με το Νευτώνιο βαρυτικό δυναμικό $\Phi = -M/r$. Σε αυτή την προσέγγιση $g_{tt} = -(1 + 2\Phi) = -(1 - 2M/r)$ οπότε συγκρίνοντας με την $g_{tt} = -f(r) = -1 - C/r$ παίρνουμε $C = -2M$.

Η μετρική του χωρόχρονου Schwarzschild σε συντεταγμένες Schwarzschild (t, r, θ, φ) είναι τελικά (σε γεωμετρικές μονάδες):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.14.4)$$

Η παράμετρος M εκφράζει τη συνολική μάζα της σφαιρικής πηγής καμπυλότητας. Η ποσότητα:

$$R_S \equiv 2M \quad (2.14.5)$$

είναι γνωστή ως **ακτίνα Schwarzschild** και επαναφέροντας τις μονάδες έχουμε: $R_S = 2GM/c^2 \approx 2.95 \frac{M}{M_\odot} km$, όπου M_\odot η μάζα του Ήλιου. Βάσει αυτής της ποσότητας διατυπώνουμε το κλασικό κριτήριο σχηματισμού μελανής οπής: "Σφαιρικό σώμα μάζας M αποτελεί μελανή οπή αν η ακτίνα του R είναι μικρότερη (οριακά ίση) από μια κρίσιμη τιμή, την ακτίνα Schwarzschild $R_S = 2M$ ". Συμπιέζοντας δηλαδή ένα σώμα σε ακτίνα $R \leq R_S$ αυτό καταρρέει σε μελανή οπή. Προφανώς, τα συνήθη αστροφυσικά σώματα όπως πλανήτες, αστέρες κτλ έχουν πολύ μεγαλύτερη ακτίνα από την ακτίνα Schwarzschild που αντιστοιχεί στη μάζα τους.

Μελετώντας την (2.14.4) παρατηρούμε ότι:

- Απουσία της πηγής καμπυλότητας, δηλαδή για $M \rightarrow 0$, η μετρική Schwarzschild ανάγεται στη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ κάτι που αναμέναμε αφού ο χωρόχρονος Minkowski είναι χωρίς καμπυλότητα.
- Όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή, στο όριο $r \rightarrow \infty$, ανακτούμε τη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ και αυτή η ιδιότητα της μετρικής καλείται **ασυμπτωτική επιπεδότητα** (asymptotic flatness).

Επίσης, παρατηρούμε ότι ο χωρόχρονος Schwarzschild επιδέχεται δύο διανύσματα Killing λόγω του ότι η μετρική είναι ανεξάρτητη των συντεταγμένων t και φ . Τα αντίστοιχα διανύσματα Killing είναι επομένως το χρονοειδές (για $r > 2M$) διάνυσμα $\xi = \partial_t$ και το χωροειδές διάνυσμα $\eta = \partial_\varphi$. Από τα δύο αυτά διανύσματα Killing προκύπτουν δύο ποσότητες που διατηρούνται κατά την κίνηση ενός σωματιδίου πάνω σε μια γεωδαισιακή. Συγκεκριμένα, τα ολοκληρώματα της γεωδαισιακής κίνησης για σωματίδιο με τετραταχύτητα $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ είναι:

$$e = \xi^\mu u_\mu = -\delta^\mu_t u_\mu = -u_t = -g_{tt} u^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.14.6)$$

$$l = \eta^\mu u_\mu = \delta^\mu_\varphi u_\mu = u_\varphi = g_{\varphi\varphi} u^\varphi = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.14.7)$$

Η σταθερά e παριστάνει τη διατηρούμενη "ενέργεια" του σωματιδίου ενώ η σταθερά l τη διατηρούμενη "στροφορμή". Ειδικότερα, αν αναφερόμαστε στην κίνηση σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m , η e καλείται ενέργεια ανά μονάδα μάζας ηρεμίας διότι για $r \rightarrow \infty$ έχουμε $e = -u_t = -p_t/m$ και αντίστοιχα η l καλείται στροφορμή ανά μονάδα μάζας ηρεμίας (αφού με αυτό το μέγεθος ισούται η l στο μη-σχετικιστικό όριο).

Σημείωση: Τα διανύσματα Killing που επιδέχεται χωρόχρονος Schwarzschild είναι κατ' ακρίβεια τέσσερα: $\xi = \partial_t$ και $\zeta_1 = -\sin \varphi \partial_\theta - \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi$, $\zeta_2 = \cos \varphi \partial_\theta - \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi$, $\eta \equiv \zeta_3 = \partial_\varphi$. Τα τρία τελευταία διανύσματα συνιστούν τους γεννήτορες της ομάδας ισομετρίας $SO(3)$.

Αποδεικνύεται, με βάση το θεώρημα του Birkhoff που παρατίθεται πιο κάτω, ότι η μετρική Schwarzschild είναι η μοναδική σφαιρικά συμμετρική, ασυμπτωτικά επίπεδη λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2.4: Θεώρημα του Birkhoff - Birkhoff's theorem

Οποιαδήποτε σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein στο κενό είναι υποχρεωτικά στατική (και άρα Schwarzschild).

Ισοδύναμα, η λύση Schwarzschild αποτελεί τη μοναδική σφαιρικά συμμετρική και ασυμπτωτικά επίπεδη λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό.

Το θεώρημα Birkhoff συνεπάγεται πως η μετρική Schwarzschild περιγράφει τη γεωμετρία του χωρόχρονου στο εξωτερικό οποιοδήποτε μη-περιστρεφόμενου, ηλεκτρικά ουδέτερου, σφαιρικά συμμετρικού σώματος, λόγου χάρη ενός αστέρα ή μιας μαύρης τρύπας. Η λύση Schwarzschild ισχύει ανεξάρτητα από το αν ο αστέρας είναι στατικός ή όχι, δηλαδή η γεωμετρία στο εξωτερικό ενός αστέρα που πάλλεται ακτινικά ή καταρρέει σφαιρικά περιγράφεται από τη στατική μετρική Schwarzschild. Ως εκ τούτου, ακτινικώς παλλόμενα σφαιρικά συστήματα δεν εκπέμπουν βαρυτικά κύματα.

2.14.1 Μελανή Οπή Schwarzschild - Schwarzschild Black Hole

Η γεωμετρία Schwarzschild απαντάται και στο εξωτερικό του απλούστερου είδους μελανής οπής η οποία λέγεται μελανή οπή Schwarzschild. Η δημιουργία της ξεκινά όταν ένας αστέρας της κύριας ακολουθίας εξαντλήσει το θερμοπυρηνικό του καύσιμο (κυρίως υδρογόνο), μετατρέποντάς το σε ήλιο, με αποτέλεσμα ο πυρήνας του να συστέλλεται ενώ τα εξωτερικά του στρώματα να διογκώνονται. Αν η μάζα του αρχικού αστέρα είναι αρκετά μεγάλη ($> 25M_\odot$) τότε θα μετατραπεί σε κόκκινο υπεργίγαντα ο οποίος συνεχίζει την καύση όλο και βαρύτερων στοιχείων μέχρι ο πυρήνας του να συντίθεται κυρίως από σίδηρο (Fe). Σε αυτό το στάδιο η θερμική πίεση των αερίων που εξασκεί δύναμη προς τα έξω δεν μπορεί πλέον να εξισορροπήσει τη βαρυτική δύναμη προς τα μέσα οπότε ο αστέρας οδηγείται σε πλήρη βαρυτική κατάρρευση και υπόκειται σε μια έκρηξη υπερκαινοφανούς (supernova). Η έκρηξη αυτή αφήνει πίσω της ένα υπόλειμμα μάζας το οποίο υπερβαίνει το όριο TOV (Tollmann-Oppenheimer-Volkhof) οδηγώντας στο σχηματισμό μιας μελανής οπής από την ύλη που καταρρέει και συγκεντρώνεται σε όλο και μικρότερο όγκο, μέχρι να συρρικνωθεί σε ένα (ιδιόμορφο) σημείο. Η μελανή οπή Schwarzschild είναι μια εξιδανικευμένη απομονωμένη μελανή οπή που προκύπτει από την βαρυτική κατάρρευση ενός μη-περιστρεφόμενου, ηλεκτρικά ουδέτερου σφαιρικού αστέρα, οπότε δεν φέρει στροφορμή ούτε ηλεκτρικό φορτίο και χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τη μάζα της (No-hair theorem).

Ουσιαστικά, στην περίπτωση της μελανής οπής Schwarzschild, όλος ο χωρόχρονος είναι χωρόχρονος Schwarzschild εξαιρουμένης της ιδιομορφίας στη θέση $r = 0$ (κατά την κλασική γενική σχετικότητα εκεί "βρίσκεται" η σημειακή πηγή καμπυλότητας). Ο χωρόχρονος αυτός περιλαμβάνει τη (φωτοειδή) υπερεπιφάνεια $r = 2M$ και επίσης μπορούμε να πλησιάσουμε αυθαίρετα κοντά στο σημείο $r = 0$ παραμένοντας στο εξωτερικό της πηγής καμπυλότητας όπου ισχύει η λύση Schwarzschild. Στις δύο

αυτές τιμές $r = 0$ και $r = 2M$ η μετρική Schwarzschild εκδηλώνει ιδιαίζουσα συμπεριφορά, ειδικότερα:

$$r \rightarrow 2M : \quad g_{tt} \rightarrow 0 \quad \& \quad g_{rr} \rightarrow \infty \quad (2.14.8)$$

$$r \rightarrow 0 : \quad g_{tt} \rightarrow \infty \quad \& \quad g_{rr} \rightarrow 0 \quad (2.14.9)$$

Προφανώς για έναν συνηθισμένο αστέρα ακτίνας $R > R_S = 2M$ η λύση Schwarzschild ισχύει μόνο στο εξωτερικό του: $r > R > 2M$. Εφόσον οι τιμές $r = 0$ και $r = 2M$ εμπίπτουν στο εσωτερικό του αστέρα όπου η γεωμετρία δεν είναι Schwarzschild (υπάρχει κατανομή ύλης $T_{\mu\nu} \neq 0$), δεν εγείρονται ζητήματα παθολογικής συμπεριφοράς της μετρικής για $r = 0$ και $r = 2M$.

Οι ιδιομορφίες διακρίνονται σε:

(i) ιδιομορφίες καμπυλότητας/φυσικές ιδιομορφίες (curvature/physical singularities)

(ii) ιδιομορφίες συντεταγμένων/φαινομενικές ιδιομορφίες (coordinate singularities)

Οι πρώτες αποτελούν εγγενή ιδιότητα του χωρόχρονου και εμφανίζονται σε κάθε σύστημα συντεταγμένων ενώ οι δεύτερες οφείλονται στην "κακή" επιλογή συντεταγμένων και σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων παύουν να υπάρχουν. Προκειμένου να εξακριβώσουμε αν μια ιδιομορφία είναι όντως φυσική ιδιομορφία του χωρόχρονου, εξετάζουμε την τιμή που λαμβάνουν στην ιδιομορφία ορισμένα βαθμωτά μεγέθη που κατασκευάζονται από συστολές του τανυστή καμπυλότητας του Riemann. Η τιμή των βαθμωτών της καμπυλότητας είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων, γι'αυτό αποτελούν κατάλληλο κριτήριο για τον προσδιορισμό του είδους της ιδιομορφίας. Ειδικότερα, ο απειρισμός των βαθμωτών της καμπυλότητας σε κάποιο σημείο/υπερεπιφάνεια του χωρόχρονου αποτελεί ικανή συνθήκη η οποία καθιστά το σημείο/υπερεπιφάνεια φυσική ιδιομορφία. Εν προκειμένω δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο το βαθμωτό Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ούτε το βαθμωτό $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ αφού μηδενίζονται, μιας και η μετρική Schwarzschild είναι λύση κενού. Απαιτείται λοιπόν η κατασκευή άλλων βαθμωτών μεγεθών από υψηλότερης τάξης συστολές του τανυστή Riemann, για παράδειγμα το βαθμωτό Kretschmann:

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.14.10)$$

Για τη μετρική Schwarzschild, οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Riemann είναι:

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= -\frac{2M}{r^3} \\ R_{t\theta t\theta} &= \frac{M}{r^2}(r - 2M), \quad R_{t\varphi t\varphi} = \frac{M}{r^2}(r - 2M) \sin^2 \theta \\ R_{\theta\varphi\theta\varphi} &= 2Mr \sin^2 \theta \\ R_{r\theta r\theta} &= \frac{M}{2M - r}, \quad R_{r\varphi r\varphi} = \frac{M}{2M - r} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Συνεπώς το βαθμωτό Kretschmann υπολογίζεται:

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.14.11)$$

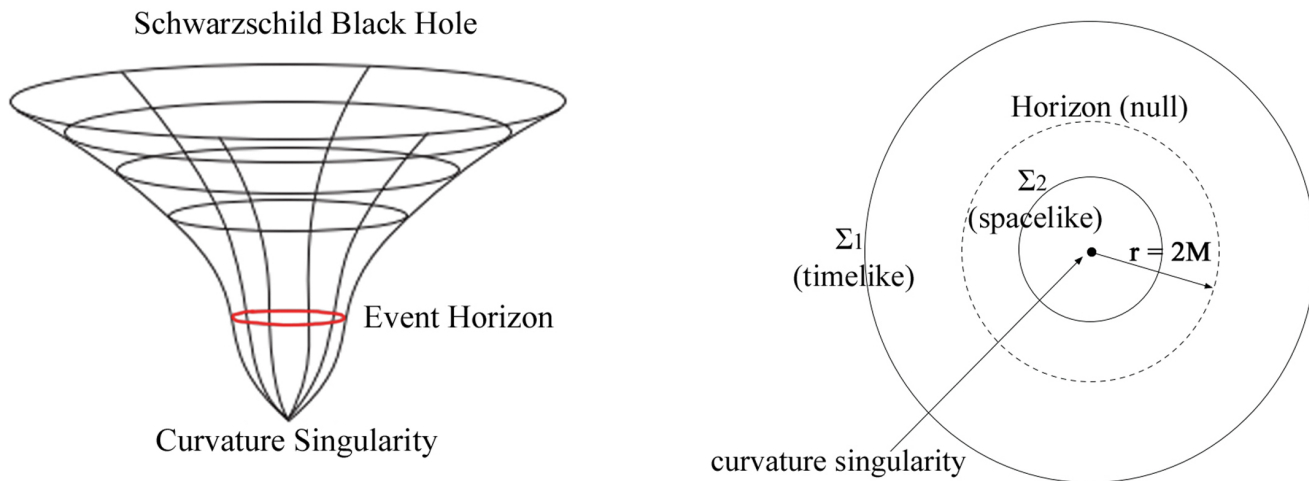
Αντικαθιστώντας $r = 2M$ διαπιστώνουμε ότι το βαθμωτό Kretschmann δεν εκρήγνυται, συγκεκριμένα λαμβάνει την πεπερασμένη τιμή $K = \frac{3}{4M^4}$ επομένως συμπεραίνουμε ότι η ιδιομορφία $r = 2M$ δεν είναι πραγματική ιδιομορφία αλλά ιδιομορφία συντεταγμένων. Από την άλλη, για $r \rightarrow 0$ έχουμε

$K \rightarrow \infty$ γεγονός που καταδεικνύει ότι το σημείο $r = 0$ είναι μια φυσική-πραγματική ιδιομορφία του χωρόχρονου Schwarzschild.

Παρόλο που δεν αποτελεί φυσική ιδιομορφία, η φωτοειδής υπερεπιφάνεια $r = 2M$ έχει σημαντικό φυσικό νόημα γι' αυτό και ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων** (event horizon) ή απλά ορίζοντας της μελανής οπής. Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι φωτοειδής υπερεπιφάνεια διότι ορίζεται από τη συνάρτηση $f(r) = r - 2M = 0$ με κάθετο συνδιάνυσμα που έχει συνιστώσες $n_\mu = \partial_\mu f = \partial_\mu r = \delta^r_\mu$. Το μέτρο του κάθετου διανύσματος στον ορίζοντα γεγονότων μηδενίζεται άρα είναι φωτοειδές, το ίδιο και ο ορίζοντας:

$$|n|^2 = n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\mu\nu} \delta^r_\mu \delta^r_\nu = g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} \Big|_{r=2M} = 0 \quad (2.14.12)$$

Συγκεκριμένα για $r > 2M \Rightarrow n^\mu n_\mu > 0$ και η υπερεπιφάνεια Σ είναι χρονοειδής: ο τοπικός κώνος φωτός σε κάθε σημείο της χρονοειδούς επιφάνειας Σ τέμνει την υπερεπιφάνεια, άρα ένα σωματίδιο μηδενικής ή μη-μηδενικής μάζας μπορεί να διασχίσει την Σ τόσο προς τα μέσα όσο και προς τα έξω. Από την άλλη, $r < 2M \Rightarrow n^\mu n_\mu < 0$ και η υπερεπιφάνεια Σ είναι χωροειδής: ο τοπικός κώνος φωτός σε κάθε σημείο της χωροειδούς επιφάνειας Σ δεν τέμνει την υπερεπιφάνεια, άρα ένα σωματίδιο μηδενικής ή μη-μηδενικής μάζας μπορεί να διασχίσει την Σ μόνο προς μία κατεύθυνση, την κατεύθυνση όπου η χρονοειδής συντεταγμένη αυξάνεται. Όπως θα δούμε, για $r < 2M$ χρονοειδής συντεταγμένη είναι η r και το πέρασμα του χρόνου ισοδυναμεί με κίνηση προς μειούμενες τιμές της συντεταγμένης r . Κατά συνέπεια, οποιοδήποτε σωματίδιο (είτε σωματίδιο με μάζα είτε φωτόνιο χωρίς μάζα) εισέλθει στον ορίζοντα γεγονότων δεν μπορεί να διαφύγει και αναπόφευκτα πέφτει στην ιδιομορφία $r = 0$. Το γεγονός ότι ο ορίζοντας γεγονότων είναι φωτοειδής σημαίνει ότι σωματίδια με μάζα μπορούν να τον διασχίσουν μόνο προς μία κατεύθυνση, προς την ιδιομορφία $r = 0$, ενώ άμαζα σωματίδια μπορούν είτε να τον διασχίσουν είτε να κινηθούν επί αυτού.

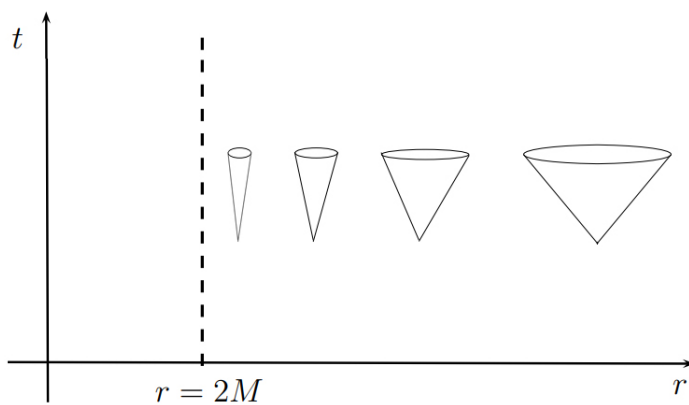


Σχήμα 2.14.1.1: Απεικόνιση του χωρόχρονου Schwarzschild γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild. Στη θέση $r = 0$ όπου βρίσκεται η σημειακή πηγή καμπυλότητας υπάρχει πραγματική ιδιομορφία καμπυλότητας ενώ στη θέση $r = 2M$ βρίσκεται ο ορίζοντας γεγονότων που είναι φωτοειδής υπερεπιφάνεια. Οι υπερεπιφάνειες στο εξωτερικό του ορίζοντα, π.χ. η Σ_1 , είναι χρονοειδείς ενώ οι υπερεπιφάνειες στο εσωτερικό του, π.χ. η Σ_2 , είναι χωροειδείς. Σήματα που ξεκινούν από την Σ_1 μπορούν να κινηθούν προς μεγαλύτερα ή μικρότερα r ενώ σήματα που ξεκινούν από την Σ_2 κινούνται υποχρεωτικά προς μικρότερα r μέχρι να πέσουν στην ιδιομορφία $r = 0$.

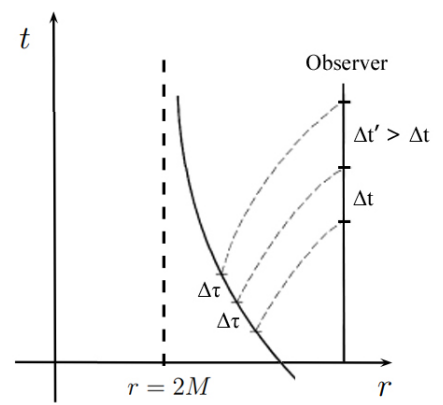
Η φυσική σημασία του οριζοντα ως "επιφάνεια χωρίς επιστροφή" γίνεται φανερή μέσω της μελέτης των κώνων φωτός του χωρόχρονου Schwarzschild, για δεδομένα θ και φ (ακτινικές φωτοειδείς γεωδαισι-ακές). Οι γενέτειρες του κώνου φωτός για σταθερά θ, φ προκύπτουν θέτοντας $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (2.14.13)$$

όπου dt/dr παριστάνει την κλίση των γενετειρών του κώνου φωτός στο διάγραμμα $t - r$. Μακριά από την πηγή καμπυλότητας ($r \rightarrow \infty$) όπου η μετρική Schwarzschild αναγεται στη μετρική Minkowski, η κλίση των γενετειρών γίνεται $dt/dr = \pm 1$ δηλαδή οι γενέτειρες τέμνονται σε ορθή γωνία όπως ακριβώς και στο χωροχρονικό διάγραμμα Minkowski. Από την άλλη καθώς προσεγγίζουμε τον οριζοντα γεγονότων οι κώνοι φωτός "κλείνουν" (μειώνεται η γωνία κορυφής) μέχρι που στο όριο $r \rightarrow R_S = 2M$ έχουμε ότι $dt/dr \rightarrow \pm\infty$ δηλαδή οι γενέτειρες του κώνου φωτός καταλήγουν να συμπίπτουν. Συνεπώς στο σύστημα συντεταγμένων Schwarzschild τα φωτεινά σήματα δεν διασχίζουν την ακτίνα Schwarzschild, την προσεγγίζουν μόνο ασυμπτωτικά. Ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή στο άπειρο, του οποίου ο ιδιόχρονος όπως μετράται από το ρολόι του ταυτίζεται με τον συντεταγμένο χρόνο t , τα φωτεινά σήματα φαίνεται να παραμένουν στάσιμα στην επιφάνεια $r = 2M$ διότι απαιτείται άπειρος συντεταγμένος χρόνος t ώστε το φως που εκπέμπει ένα σώμα το οποίο φτάνει στον οριζοντα γεγονότων να καταφτάσει σ'αυτόν. Οπότε ένας ακίνητος μακρινός παρατηρητής βλέπει το σώμα να "παγώνει" καθώς προσεγγίζει τη θέση $r = 2M$. Στην πραγματικότητα, το σώμα διασχίζει τον οριζοντα γεγονότων σε πεπερασμένο ιδιόχρονο, όπως μετράται από το δικό του ρολόι, χωρίς να αντιληφθεί κάποια ανωμαλία. Για παράδειγμα, σώμα που ηρεμεί για $r \rightarrow \infty$ ($e = 1$) και εκτελεί ακτινική ($l = 0$) ελεύθερη πτώση προς την οπή από απόσταση R , χρειάζεται ιδιόχρονο $\Delta\tau = \frac{4M}{3} \left[\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} \right]_{r=2M}^{r=R}$ για να φτάσει στον οριζοντα. Η αδυναμία μας να περιγράψουμε τι συμβαίνει στον οριζοντα αλλά και στο εσωτερικό του οφείλεται αποκλειστικά στην επιλογή μη-κατάλληλων συντεταγμένων.



(a)



(b)

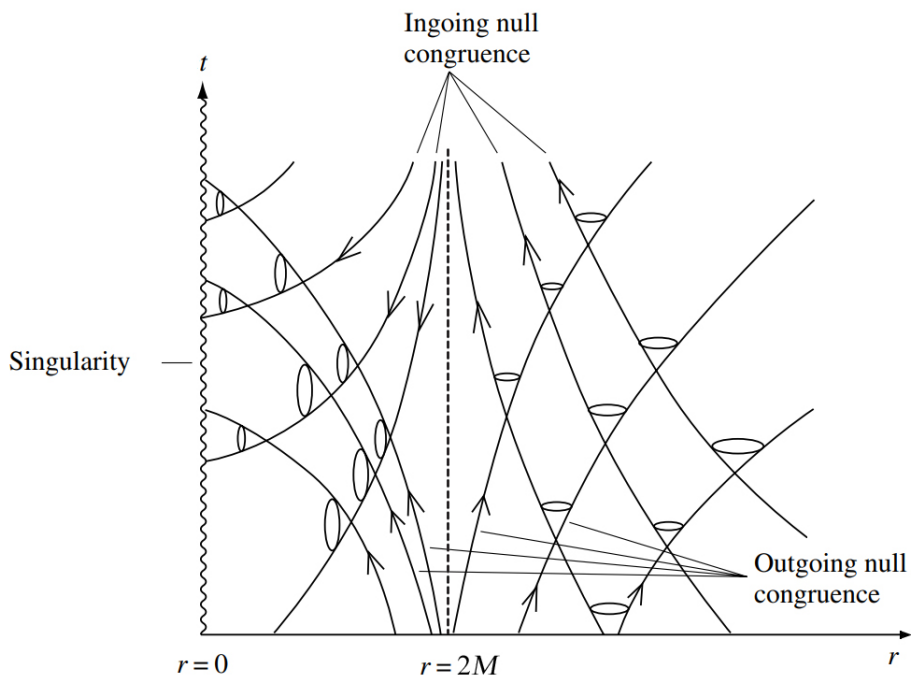
Σχήμα 2.14.1.2: (a) Σε συντεταγμένες Schwarzschild, οι κώνοι φωτός "κλείνουν" τον άνοιγμά τους καθώς πλησιάζουν στον οριζοντα $r = 2M$, πράγμα που σημαίνει ότι το φως δεν φτάνει ούτε στον οριζοντα, τον προσεγγίζει ασυμπτωτικά. (b) Φωτεινά σήματα που εκπέμπονται σε ίσους ιδιόχρονους από σώμα που πλησιάζει στον οριζοντα χρειάζονται όλο και περισσότερο συντεταγμένο χρόνο για να φτάσουν σε ακίνητο παρατηρητή στο άπειρο. Το φωτεινό σήμα που στάλθηκε οριακά έξω από τον οριζοντα χρειάζεται άπειρο χρόνο ($t \rightarrow \infty$) ώστε να ληφθεί από τον παρατηρητή, οπότε ως προς αυτόν τίποτα δεν μπορεί να διασχίσει τον οριζοντα.

Μόλις διασχίσουμε τον ορίζοντα, δηλαδή για $r < 2M$, οι συντεταγμένες t και r ανταλλάζουν ρόλους: η t γίνεται χωροειδής ($g_{tt} > 0$) και μετράει χωρικές αποστάσεις ενώ η r γίνεται χρονοειδής ($g_{rr} < 0$) και μετράει χρόνο. Ως εκ τούτου οι συντεταγμένες (t, r) είναι κατάλληλες για να περιγράψουν τον χωρόχρονο Schwarzschild μόνο στην περιοχή $r > 2M$, ενώ για την περιοχή $r \leq 2M$ θα χρειαστούμε καινούργιες συντεταγμένες. Αυτό που μπορούμε να πούμε για την περιοχή $r < 2M$ είναι ότι οι κώνοι φωτός μέσα στον ορίζοντα είναι κεκλιμένοι κατά 90° και δείχνουν προς το σημείο $r = 0$ όπου βρίσκεται η ιδιομορφία, οπότε το αιτιακό μέλλον ενός σωματιδίου που εισέρχεται στον ορίζοντα είναι να πέσει στην ιδιομορφία. Το γεγονός ότι ο χρόνος αυξάνεται κατά μήκος κάθε μελλοντικά προσανατολισμένης αιτιακής καμπύλης ισοδυναμεί με ελάττωση της ακτινικής θέσης r του σωματιδίου που βρίσκεται μέσα στον ορίζοντα, οπότε η φυσική εξέλιξη ενός τέτοιου σωματιδίου είναι να καταλήξει στην ιδιομορφία $r = 0$. Το ίδιο ισχύει και για τις ακτίνες φωτός, δηλαδή φως που εκπέμπεται από σημεία $r < 2M$ δεν μπορεί να διαφύγει και στο γεγονός αυτό οφείλουν το όνομά τους οι μελανές οπές.

Η λύση της (2.14.13) δίνει την εξίσωση $t = t(r)$ των φωτοειδών γεωδαισιακών για ακτινική κίνηση του φωτός:

$$t = \pm \left[r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + k \quad (2.14.14)$$

όπου το πρόσημο (+) αντιστοιχεί σε εξερχόμενο φωτόνιο ($dr/dt > 0$ για $r > 2M$) ενώ το πρόσημο (-) σε εισερχόμενο φωτόνιο ($dr/dt < 0$ για $r > 2M$), και k μια σταθερά. Το διάγραμμα $t = t(r)$ των ακτινικών φωτοειδών γεωδαισιακών του χωρόχρονου Schwarzschild για εισερχόμενα και εξερχόμενα φωτόνια, τόσο στην περιοχή $r > 2M$ όσο και στην $r < 2M$, φαίνεται πιο κάτω.



Σχήμα 2.14.1.3: Φωτοειδείς ακτινικές γεωδαισιακές του χωρόχρονου Schwarzschild σε συντεταγμένες Schwarzschild, για εισερχόμενα και εξερχόμενα φωτόνια. Στην περιοχή $r > 2M$ τα φωτόνια μπορούν να πλησιάσουν ασυμπτωτικά ή να απομακρυνθούν από τον ορίζοντα ενώ για $r < 2M$ οι κώνοι φωτός είναι κεκλιμένοι κατά 90° διότι οι συντεταγμένες t και r ανταλλάζουν χαρακτήρα, οπότε τα φωτόνια στην περιοχή αυτή καταλήγουν αναπόφευκτα στη φυσική ιδιομορφία $r = 0$.

2.14.2 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres - Kruskal-Szekeres Coordinates

Σύμφωνα με την πιο πάνω ανάλυση, οι συντεταγμένες Schwarzschild δεν είναι κατάλληλες για να περιγράψουν την περιοχή $0 < r \leq 2M$ του χωρόχρονου Schwarzschild, εξαιτίας της ιδιομορφίας συντεταγμένων στον ορίζοντα γεγονότων $r = 2M$. Δεδομένου ότι η ιδιομορφία αυτή δεν αποτελεί φυσική ανωμαλία, αλλά πηγάζει από την επιλογή μη-κατάλληλων συντεταγμένων, μπορούμε να την απαλείψουμε επιλέγοντας βολικότερες συντεταγμένες για τη μελέτη του χωρόχρονου Schwarzschild. Προκειμένου οι νέες συντεταγμένες να περιγράφουν πλήρως όλο τον χωρόχρονο, πρέπει να είναι ομαλές και να διατηρούν τον χαρακτήρα τους παντού εκτός από την ιδιομορφία καμπυλότητας. Μια καλή επιλογή συντεταγμένων είναι οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres καθότι πληρούν τις πιο πάνω απαιτήσεις και επιπλέον επεκτείνουν στο μέγιστο τον χωρόχρονο Schwarzschild (maximally extended Schwarzschild solution), καλύπτουν δηλαδή ολόκληρο τον χωρόχρονο, συμπεριλαμβανομένων της μελανής και της (υποθετικής) λευκής οπής.

Οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres ή απλά Kruskal (T, X, θ, φ) αντικαθιστούν τις συντεταγμένες Schwarzschild (t, r, θ, φ) σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} T &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) \\ X &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) \end{aligned} \right\} r > 2M \quad (2.14.15)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) \\ X &= \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) \end{aligned} \right\} r < 2M \quad (2.14.16)$$

τις οποίες μπορούμε να λύσουμε ως προς τις παλιές συντεταγμένες:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} = X^2 - T^2 \quad (2.14.17)$$

$$\tanh \left(\frac{t}{4M} \right) = \begin{cases} \frac{T}{X}, & r > 2M \\ \frac{X}{T}, & r < 2M \end{cases} \quad (2.14.18)$$

Σε συντεταγμένες Kruskal-Szekeres, η μετρική του χωρόχρονου Schwarzschild (τόσο για $r > 2M$ όσο και για $r < 2M$) λαμβάνει τη μορφή:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.14.19)$$

όπου στην πιο πάνω σχέση νοείται ότι το r είναι συνάρτηση των T και X δηλαδή $r = r(T, X)$ και δίνεται από τη σχέση (2.14.17). Η συντεταγμένη T διαδραματίζει παντού τον ρόλο χρονικής συντεταγμένης ($g_{TT} < 0$) και η X είναι παντού η χωρική συντεταγμένη ($g_{XX} > 0$).

Η αιτιακή δομή σε συντεταγμένες Kruskal-Szekeres γίνεται κατανοητή από τη μελέτη των κώνων φωτός για σταθερά θ και φ . Θέτοντας $ds^2 = 0$ στην (2.14.19) για να βρούμε τους κώνους φωτός παίρνουμε:

$$-dT^2 + dX^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{dX} = \pm 1 \quad (2.14.20)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι κώνοι φωτός, όπως και στον χώροχρονο Minkowski, τέμνονται κάθετα και οι γενέτειρές τους σχηματίζουν γωνία $\pm 45^\circ$ με τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι σε συντεταγμένες Kruskal-Szekeres με $d\theta = d\varphi = 0$ η μετρική Schwarzschild συνδέεται με τη μετρική Minkowski μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού (είναι conformally flat) άρα οι δύο χώροχρονοί έχουν ίδια αιτιακή δομή. Συνεπώς, κατ' αναλογία με τον χώροχρονο Minkowski, οι ακτινικές φωτεινικές γεωδαισιακές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της (2.14.20) είναι ευθείες κλίσης ± 1 :

$$T = \pm X + \text{const.} \quad (2.14.21)$$

Οι επιφάνειες σταθερού r ($r = \text{const.}$) αναπαρίστανται ως υπερβολές στο διάγραμμα Kruskal-Szekeres $T - X$ (με κύριο άξονα τον X για $r = \text{const.} > 2M$ και κύριο άξονα τον T για $r = \text{const.} < 2M$), βάσει της (2.14.17):

$$T^2 - X^2 = \text{const.} \quad (2.14.22)$$

Ο ορίζοντας γεγονότων $r = 2M$ αποτελεί ειδική περίπτωση καθότι απεικονίζεται στις ασύμπτωτες ευθείες των υπερβολών, που παριστάνουν κατ' ακρίβεια δύο φωτεινικές υπερεπιφάνειες:

$$T = \pm X \quad (2.14.23)$$

Μάλιστα, για $X > 0$, η φωτεινική επιφάνεια $T = X$ είναι ο ορίζοντας γεγονότων της μελανής οπής (μελλοντικός ορίζοντας) ενώ η φωτεινική επιφάνεια $T = -X$ είναι ο ορίζοντας γεγονότων της λευκής οπής (παρελθοντικός ορίζοντας). Η λευκή οπή είναι μια υποθετική περιοχή του χώροχρονου που διαθέτει τις "χρονικά ανεστραμμένες" ιδιότητες της μελανής οπής. Η λευκή οπή αποβάλλει ύλη από το εσωτερικό της προς το εξωτερικό και τίποτα δεν μπορεί να εισέλθει από τον ορίζοντά της.

Οι επιφάνειες σταθερού t ($t = \text{const.}$) είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων του διαγράμματος Kruskal-Szekeres $T - X$ και έχουν κλίση $\tanh(t/4M)$, βάσει της (2.14.18):

$$\frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \text{const.} \quad (2.14.24)$$

Σημειώνουμε ότι στο όριο $t \rightarrow \pm\infty$ οι ευθείες αποκτούν κλίση $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tanh(t/4M) = \pm 1$ δηλαδή οι επιφάνειες $t = \pm\infty$ αντιστοιχούν σε $T = \pm X$ έτσι συμπίπτουν με τις επιφάνειες που παριστάνουν τον ορίζοντα $r = 2M$.

Η φυσική ιδιομορφία $r = 0$ οριοθετεί τον χώροχρονο και απεικονίζεται σε δύο υπερβολές, μία για $T > 0$ και μία για $T < 0$, οι οποίες παριστάνουν χωροειδείς επιφάνειες. Ειδικότερα:

$$r = 0 \Rightarrow T = \pm\sqrt{X^2 + 1} \quad (2.14.25)$$

Η χωροειδής επιφάνεια που αντιστοιχεί στην υπερβολή $T = +\sqrt{X^2 + 1}$ ονομάζεται μελλοντική ιδιομορφία (future singularity) και είναι η ιδιομορφία της μελανής οπής ενώ η χωροειδής επιφάνεια που αντιστοιχεί στην υπερβολή $T = -\sqrt{X^2 + 1}$ ονομάζεται παρελθοντική ιδιομορφία (past singularity) και είναι η ιδιομορφία της λευκής οπής. Κάθε αιτιακή (φωτεινική ή χωροειδής) κοσμική γραμμή στην περιοχή $r < 2M$ με $T > 0$ θα συναντήσει την ιδιομορφία $r = 0$ της μελανής οπής στο αιτιακό της μέλλον, ενώ κάθε αιτιακή κοσμική γραμμή στην περιοχή $r < 2M$ με $T < 0$ έχει αναδυθεί-"γεννηθεί" από την ιδιομορφία $r = 0$ της λευκής οπής στο αιτιακό της παρελθόν. Οτιδήποτε εισέλθει στον ορίζοντα $r = 2M$ της μαύρης τρύπας θα καταλήξει αναπόδραστα στη μελλοντική ιδιομορφία $r = 0$ ενώ

οποιοδήποτε σωματίδιο (φωτόνιο, ύλη, κτλ.) γεννηθεί από την παρελθοντική ιδιομορφία $r = 0$ θα εξέλθει αναγκαστικά από τον ορίζοντα $r = 2M$ της λευκής οπής σε πεπερασμένο ιδιόχρονο.

Διαπιστώνουμε από την πιο πάνω ανάλυση ότι με χρήση των συντεταγμένων Kruskal-Szekeres έχουμε καλύψει περιοχές του χωρόχρονου Schwarzschild οι οποίες προηγουμένως δεν ήταν προσβάσιμες από τις συντεταγμένες Schwarzschild (t, r) (II: εσωτερικό μελανής οπής, IV: εσωτερικό λευκής οπής & III: διαφορετικό σύμπαν). Έχουμε δηλαδή επεκτείνει το εύρος τιμών που μπορούν να λάβουν οι συντεταγμένες T και X πέραν του αρχικού πεδίου $X > 0$ και $|T| < X$ που αντιστοιχούσε στην περιοχή I έξω από τον ορίζοντα $r > 2M$, $t \in \mathbb{R}$, την οποία μπορούσαμε να περιγράψουμε με τις συντεταγμένες (t, r) . Εν προκειμένω, ο μόνος φυσικός περιορισμός που θέσαμε στο πεδίο ορισμού των συντεταγμένων T και X είναι η συνθήκη $r > 0$, δηλαδή οι συντεταγμένες (T, X) μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή αρκεί να μην κτυπούν στην ιδιομορφία $r = 0$. Οι επιτρεπτές τιμές των T και X μετά την επέκταση είναι λοιπόν:

$$-\infty < X < \infty \quad (2.14.26)$$

$$T^2 < X^2 + 1 \Leftrightarrow |T| < \sqrt{X^2 + 1} \quad (2.14.27)$$

Η επέκταση αυτή καλείται "Maximal/Kruskal Extension of Schwarzschild spacetime". Μετά την επέκταση του εύρους τιμών των συντεταγμένων, η μετρική εξακολουθεί να ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein στο κενό, σε ολόκληρο τον μέγιστα εκτεταμένο χωρόχρονο Schwarzschild. Αναφερόμαστε σε μέγιστη επέκταση διότι όλες οι γεωδαισιακές στον εκτεταμένο χωρόχρονο είτε συνεχίζουν στο άπειρο της αφινικής τους παραμέτρου είτε τερματίζουν στη μελλοντική ή παρελθοντική ιδιομορφία. Αυτή η μαθηματική επέκταση, αν και ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein στο κενό, δεν οδηγεί κατ' ανάγκη σε νέα φυσική. Παρόλο που η γενική σχετικότητα δεν απαγορεύει την ύπαρξη μιας λευκής οπής και ενός διαφορετικού σύμπαντος στο οποίο αυτή αποβάλλει ύλη, δεν υπάρχει καμία γνωστή διεργασία που να οδηγεί στη δημιουργία τους. Οπότε οι περιοχές (III) και (IV) δεν μπορούν να προκύψουν από κάποια γνωστή αστροφυσική διεργασία, όπως η βαρυτική κατάρρευση της ύλης.

Οι 4 περιοχές του διαγράμματος Kruskal-Szekeres

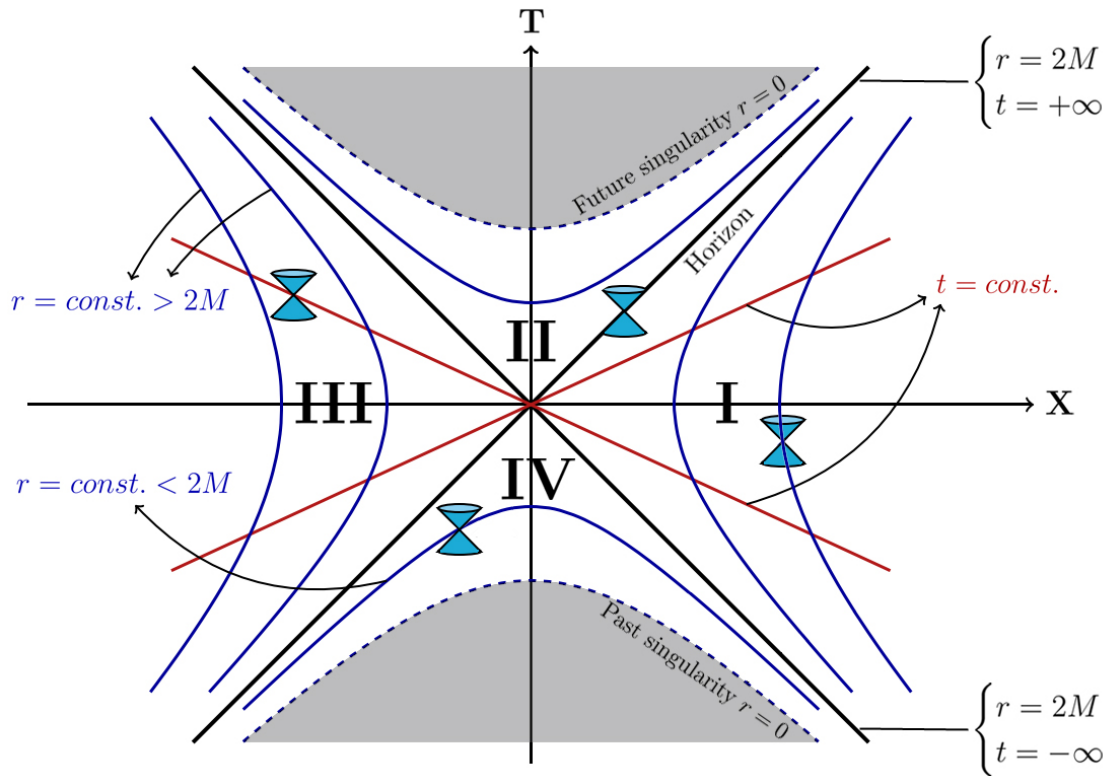
Το χωροχρονικό διάγραμμα Kruskal-Szekeres αναπαριστά ολόκληρο τον (μέγιστα εκτεταμένο) χωρόχρονο Schwarzschild στο επίπεδο $T - X$ με $-\infty < X < \infty$ και $|T| < \sqrt{X^2 + 1}$ για σταθερά θ, φ . Κατά συνέπεια, στο διάγραμμα αυτό κάθε σημείο είναι στην πραγματικότητα μια 2-σφαίρα. Μπορούμε να διακρίνουμε 4 περιοχές/τεταρτημόρια:

- Περιοχή I (Σύμπαν στο οποίο ζούμε - Εξωτερικό του ορίζοντα της μελανής οπής):

Η περιοχή $r > 2M$, $t \in \mathbb{R}$ του χωρόχρονου Schwarzschild απεικονίζεται στην περιοχή I ($X > 0$ και $-X < T < X$). Επομένως η αρχική περιοχή Schwarzschild έξω από τον ορίζοντα της μελανής οπής, που εκφράζει το σύμπαν μας και στην οποία οι αρχικές συντεταγμένες (t, r) ήταν ομαλές, αντιστοιχεί στο 1^ο τεταρτημόριο (περιοχή I) του διαγράμματος Kruskal-Szekeres. Παρατηρητής στην περιοχή I μπορεί να στείλει σήματα (φως ή σωματίδια) στην περιοχή II (μελανή οπή) και να λάβει σήματα από την περιοχή IV (λευκή οπή).

- Περιοχή II (Εσωτερικό του ορίζοντα της μελανής οπής):

Η περιοχή $0 < r < 2M$, $t \in \mathbb{R}$ απεικονίζεται στην περιοχή II ($T > 0$ και $-T < X < T$). Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί στο εσωτερικό του ορίζοντα της μελανής οπής (ingoing Eddington-Finkelstein extension). Οτιδήποτε εισέλθει στην περιοχή II, είτε από την περιοχή I είτε από την



Σχήμα 2.14.2.1: Διάγραμμα Kruskal-Szekeres για τον χωρόχρονο Schwarzschild. Οι κώνοι φωτός σχηματίζουν γωνία 45° με την κατακόρυφο. Οι χωροειδείς επιφάνειες $r = 0$ είναι οι φυσικές ιδιομορφίες (διακεκομμένες γραμμές) και οι φωτεινές επιφάνειες $r = 2M$ είναι οι οριζόντιες γεγονότων. Η περιοχή I είναι το εξωτερικό της μελανής οπής - το σύμπαν μας, η περιοχή II περιλαμβάνει το εσωτερικό της, ενώ η περιοχή III παριστάνει ένα ασυμπτωτικά επίπεδο άλλο σύμπαν και η περιοχή IV το εσωτερικό της λευκής οπής. Οι περιοχές III και IV αποτελούν επέκταση του χωρόχρονου (η οποία από φυσικής άποψης είναι μη-υλοποιήσιμη).

III, δεν μπορεί να διαφύγει και καταλήγει στον μελλοντικό ορίζοντα $r = 0$.

\Rightarrow Συνεπώς ο φυσικός χωρόχρονος $0 < r < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ μέσα και έξω από τον ορίζοντα γεγονότων, παριστάνεται από τα τεταρτημόρια I & II όπου $T > -X$.

- Περιοχή III (Παράλληλο σύμπαν):

Η περιοχή $r > 2M$ του χωρόχρονου Schwarzschild απεικονίζεται επίσης στην περιοχή III ($X < 0$ και $X < T < -X$). Η περιοχή αυτή αναπαριστά ένα ασυμπτωτικά επίπεδο "παράλληλο σύμπαν" το οποίο είναι χωροειδώς χωρισμένο από το δικό μας σύμπαν. Οι περιοχές I και III συνδέονται με μια σκουληκότρυπα (wormhole) ή Einstein-Rosen bridge, όμως δεν επικοινωνούν καθώς είναι χωροειδώς χωρισμένες άρα αιτιακά ασύνδετες. Παρατηρητής στην περιοχή III, κατ' αναλογία με την περιοχή I, μπορεί να στείλει σήματα (φως ή σωματίδια) στην περιοχή II (μελανή οπή) και να λάβει σήματα από την περιοχή IV (λευκή οπή).

- Περιοχή IV (Εσωτερικό του ορίζοντα της λευκής οπής):

Η περιοχή $r < 2M$ απεικονίζεται επίσης στην περιοχή IV ($T < 0$ και $T < X < -T$). Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί στο εσωτερικό του ορίζοντα της λευκής οπής (outgoing Eddington-

Finkelstein extension). Τίποτα δεν μπορεί να εισέλθει στην περιοχή IV και οποιοδήποτε σήμα δημιουργηθεί στον παρελθοντικό ορίζοντα $r = 0$ εξέρχεται και καταλήγει είτε στην περιοχή I είτε στην III.

⇒ Συνεπώς ο υποθετικός/μη-φυσικός χωρόχρονος $0 < r < \infty$ που προέκυψε από την επέκταση Kruskal, παριστάνεται από τα τεταρτημόρια III & IV όπου $T < -X$.

Φορμαλισμός 3+1 - Χωρόχρονος στην Αριθμητική Σχετικότητα

Στόχος της αριθμητικής σχετικότητας είναι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων πεδίου του Einstein για την εύρεση των στοιχείων της μετρικής ενός χωρόχρονου (M, g) . Οι χωρόχρονοι (M, g) που μελετώνται στα πλαίσια της αριθμητικής σχετικότητας είναι χρονικά προσανατολίσιμοι (μπορούμε να ορίσουμε έναν παγκόσμιο άξονα του χρόνου) και καθολικά υπερβολικοί (επιδέχονται επιφάνεια Cauchy Σ και όλα τα σημεία του χωρόχρονου προβλέπονται από δεδομένα στην Σ), καθώς μόνο σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein υπό τη μορφή ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών τιμών.

Γενικά, για την αριθμητική ολοκλήρωση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων χρειάζεται να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών προσδιορίζοντας αρχικά δεδομένα και εξελίσσοντας τα στον χρόνο σύμφωνα με το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Εν προκειμένω επιθυμούμε να λύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις Einstein με αγνώστους τις συνιστώσες της μετρικής, εντούτοις στη γενική σχετικότητα ο χώρος και ο χρόνος συνδυάζονται σε μια συνεχή γεωμετρική δομή χωρίς να υπάρχει διάκριση μεταξύ τους, οπότε οι εξισώσεις Einstein γραμμένες στη συναλλοίωτη μορφή $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ δεν προσφέρονται για αριθμητική ολοκλήρωση. Ιδανικά, θέλουμε να χωρίσουμε τον χωρόχρονο σε χώρο - χωροειδείς 3D υπερεπιφάνειες - και χρόνο, για να μπορέσουμε να ορίσουμε κάποια "χωρικά" γεωμετρικά μεγέθη $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ που περιγράφουν την εσωτερική και εξωτερική γεωμετρία των χωρικών επιφανειών. Οι γεωμετρικές ποσότητες αυτές αποτελούν δυναμικές μεταβλητές των οποίων η χρονική εξέλιξη, βάσει ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων που απορρέει από τις εξισώσεις Einstein, θα δώσει τη γεωμετρία κάθε χωρικής επιφάνειας η οποία αντιστοιχεί σε μια τομή σταθερού χρόνου (ένα στιγμιότυπο) του χωρόχρονου. Με το πέρας της χρονικής εξέλιξης, οι χωροειδείς 3D υπερεπιφάνειες στοιβάζονται όλες μαζί κατά τη διεύθυνση του άξονα του χρόνου ώστε να κατασκευάσουν ολόκληρο τον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Εν κατακλείδι, διαμερίζοντας τον χωρόχρονο σε μια χρονική αλληλουχία χωροειδών τρισδιάστατων επιφανειών μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein σε μορφή κατάλληλη για αριθμητική ολοκλήρωση στον υπολογιστή, διακριτοποιώντας τον χρόνο και υπολογίζοντας τη γεωμετρία της κάθε υπερεπιφάνειας ξεκινώντας από δεδομένα σε μια αρχική υπερεπιφάνεια. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από τον λεγόμενο φορμαλισμό 3+1 ο οποίος παρέχει μια δυναμική περιγραφή των εξισώσεων Einstein, κατάλληλη για υπολογιστική μελέτη.

Σχόλιο: Σε αυτό το κεφάλαιο και στο εξής, γεωμετρικά αντικείμενα όπως διανύσματα, 1-forms και τανυστές θα γράφονται με έντονα γράμματα π.χ. V, Ω, g κτλ. ώστε να διακρίνονται από τα ίχνη τους και στην περίπτωση της μετρικής από την ορίζουσα.

3.1 Διαχωρισμός 3+1 του χωρόχρονου - 3+1 Splitting of spacetime

Επικαλούμενοι το θεώρημα του Geroch 2.2 γνωρίζουμε ότι η τοπολογία ενός καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου (M, g) είναι $\mathbb{R} \times \Sigma$ όπου Σ μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια Cauchy. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι ένας καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος μπορεί να διαμεριστεί σε μια οικογένεια

χωροειδών υπερεπιφανειών $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ όπου κάθε μία είναι επιφάνεια Cauchy. Οι υπερεπιφάνειες Σ_t ορίζονται ως οι ισοσταθμικές επιφάνειες ($t = \text{const.}$) μιας λείας βαθμωτής συνάρτησης $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ με $t = t(x^\alpha)$ και $dt \neq 0$, η οποία ονομάζεται **συνάρτηση καθολικού χρόνου** (global time function):

$$\Sigma_{t_1} = \{p \in M : t(p) = t_1\}, \quad \forall t_1 \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

Η συνάρτηση καθολικού χρόνου t ταυτοποιεί τις υπερεπιφάνειες αφού σε κάθε μια αντιστοιχεί μια διαφορετική σταθερή τιμή του t , λόγω χάρη η Σ_{t_0} είναι η υπερεπιφάνεια $t = t_0 = \text{const.}$ Η συνάρτηση t απεικονίζει κάθε σημείο $p \in M$ σε μία μόνο χρονική τιμή (αυτός είναι ο ορισμός της συνάρτησης), άρα κάθε χωροχρονικό σημείο ανήκει μόνο σε μία υπερεπιφάνεια. Εκ κατασκευής λοιπόν οι υπερεπιφάνειες δεν τέμνονται, όντας επιφάνειες σταθερού χρόνου:

$$\Sigma_{t_1} \cap \Sigma_{t_2} = \emptyset, \quad \text{για } t_1 \neq t_2 \quad (3.1.2)$$

Η κάθε χωροειδής υπερεπιφάνεια παριστάνει τομή του χωρόχρονου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, παριστάνει δηλαδή μια "χωρική φέτα" (spatial slice) όπου όλα τα γεγονότα που ανήκουν σε αυτή συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή (ως προς το σύστημα αναφοράς (t, x^i)). Στοιβάζοντας με συνεχή τρόπο τις 3D χωροειδείς υπερεπιφάνειες (φέτες) κατά μήκος της χρονικής διάστασης t , δημιουργούμε ολόκληρο τον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Με άλλα λόγια, η οικογένεια υπερεπιφανειών $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ καλύπτει πλήρως τον χωρόχρονο M .

$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t \quad (3.1.3)$$

Συνοψίζοντας, με τον όρο **διαμέριση** (foliation/slicing) ενός καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου εννοούμε ότι τον χωρίζουμε σε μια οικογένεια μη-τεμνόμενων χωροειδών επιφανειών $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ που αποτελούν ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης καθολικού χρόνου t και καλύπτουν ολόκληρο τον χωρόχρονο.

Υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων που αντικατοπτρίζει στον τρόπο με τον οποίο έχουμε πραγματοποιήσει τη διαμέριση, είναι δηλαδή ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Σε αυτό το σύστημα η συνάρτηση καθολικού χρόνου t αποτελεί τη φυσική επιλογή για τη χρονική συντεταγμένη $t = x^0$ και μαζί με τις χωρικές συντεταγμένες x^i που περιγράφουν σημεία που βρίσκονται σε μια υπερεπιφάνεια, αποτελούν τις συντεταγμένες x^α του προσαρμοσμένου συστήματος. Ειδικότερα:

Ορισμός 3.1: Συντεταγμένες προσαρμοσμένες στη διαμέριση - Adapted coordinates

Έστω (M, g) ένας καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος που διαμερίζεται στις υπερεπιφάνειες $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ οι οποίες αποτελούν τις ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης καθολικού χρόνου $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ με $dt \neq 0$. Το σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη 3+1 διαμέριση του χωρόχρονου ορίζεται:

$$x^\alpha = (t, x^i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.4)$$

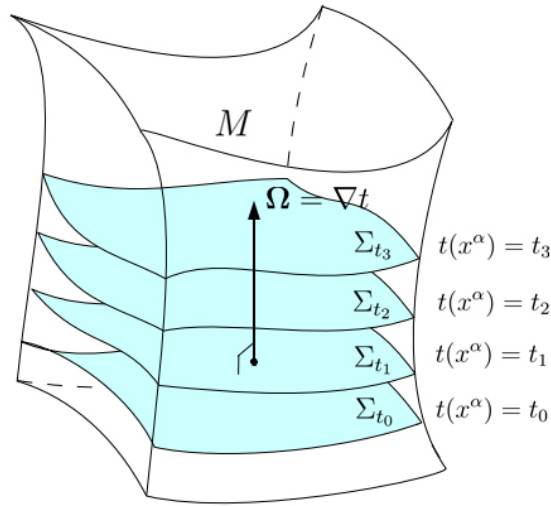
όπου $t = x^0$ η χρονική συντεταγμένη και $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ οι χωρικές συντεταγμένες, που ταυτοποιούν σημεία που ανήκουν σε κάθε χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ_t . Τα διανύσματα βάσης $\{\partial_\alpha\}$ (coordinate basis vectors) του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$ που αντιστοιχούν στις προσαρμοσμένες

συντεταγμένες x^α είναι:

$$\partial_\alpha = (\partial_t, \partial_i) \quad (3.1.5)$$

όπου ∂_t το διάνυσμα χρόνου (time vector) και $\partial_i \in T_p \Sigma_t$ τα τρία χωρικά διανύσματα βάσης που ορίζουν το σύστημα συντεταγμένων κάθε υπερεπιφάνειας Σ_t .

Σημείωση: Τα διανυσματικά και τανυστικά μεγέθη που θα ορίσουμε στη συνέχεια, θα εκφράζονται εν γένει σε συναλλοίωτη μορφή, χωρίς αναφορά σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Είναι όμως χρήσιμο να γράφουμε τις συνιστώσες τους εξειδικεύοντας στο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Το προσαρμοσμένο σύστημα συντεταγμένων είναι το βολικότερο που μπορούμε να επιλέξουμε προκειμένου να μετατρέψουμε τις τανυστικές εξισώσεις σε μερικές διαφορικές εξισώσεις ώστε να επιλυθούν αριθμητικά.



Σχήμα 3.1.1: Διαμέριση ενός καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου (M, g) σε 3D χωροειδείς υπερεπιφάνειες Σ_t που αποτελούν τις ισοσταθμικές επιφάνειες της χρονικής συντεταγμένης t (καθολική συνάρτηση χρόνου). Το διάνυσμα με συνιστώσες $\Omega^\alpha = \nabla^\alpha t$ είναι το κάθετο χρονοειδές διάνυσμα στις Σ_t .

Δεδομένης μιας υπερεπιφάνειας Σ_t που ανήκει στη διαμέριση και περιγράφεται από την εξίσωση $t = const.$, ορίζουμε την κλίση $dt = \nabla t \equiv \Omega$ της συνάρτησης καθολικού χρόνου t ως το συνδιάνυσμα (1-form) κάθετο στη Σ_t και κατ'επέκταση κάθετο σε όλη την οικογένεια υπερεπιφανειών. Οι συνιστώσες Ω_μ του κάθετου 1-form ορίζονται ως γνωστόν μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου της συνάρτησης t :

$$\Omega_\alpha = \nabla_\alpha t (= \partial_\alpha t) \quad (3.1.6)$$

Το διάνυσμα με συνιστώσες $\Omega^\alpha = g^{\alpha\beta} \Omega_\beta = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta t = \nabla^\alpha t$ είναι το δυικό διάνυσμα του 1-form $\Omega = \nabla t$ και αποτελεί το κάθετο διάνυσμα στις υπερεπιφάνειες Σ_t . Εφόσον οι υπερεπιφάνειες είναι χωροειδείς, το κάθετο διάνυσμα $\Omega^\alpha = \nabla^\alpha t$ είναι χρονοειδές και το τετράγωνο του μέτρου του ισούται με:

$$|\Omega|^2 = |\nabla t|^2 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t = \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t \equiv -\frac{1}{\alpha^2} \quad (3.1.7)$$

όπου α μια θετική βαθμωτή συνάρτηση, η οποία ονομάζεται **lapse function** (στα ελληνικά συνάρτηση μετάβασης). Το πρόσημο $(-)$ εισάγεται μπροστά από τον παράγοντα $1/\alpha^2$ καθώς το διάνυσμα με συνιστώσες $\Omega^\alpha = \nabla^\alpha t$ είναι χρονοειδές άρα για το μέτρο του ισχύει $|\Omega|^2 < 0$,

Ορισμός 3.2: Συνάρτηση μετάβασης α - Lapse Function α

Έστω t η καθολική συνάρτηση χρόνου της διαμέρισης του (M, g) σε χωροειδείς επιφάνειες $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Η βαθμωτή συνάρτηση $\alpha = \alpha(x^\alpha)$ λέγεται **lapse function** ή απλά **lapse** και ορίζεται:

$$\alpha \equiv (-|\nabla t|^2)^{-1/2} = (-g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t)^{-1/2} \quad (3.1.8)$$

Εξ' ορισμού το lapse είναι θετικό μέγεθος:

$$\alpha > 0 \quad (3.1.9)$$

διότι προκύπτει από τη ρίζα της ποσότητας $-g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t > 0$ όπου $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha t \nabla_\beta t < 0$ είναι το τετράγωνο του μέτρου του κάθετου διανύσματος στις υπερεπιφάνειες Σ_t .

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n στην οικογένεια υπερεπιφανειών Σ_t έχει συνιστώσες:

$$n^\alpha = -\alpha \nabla^\alpha t \quad (3.1.10)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι με τον τρόπο που το ορίσαμε, το κάθετο διάνυσμα n είναι χρονοειδές και μοναδιαίο, εξαιτίας του παράγοντα κανονικοποίησης α :

$$n^\alpha n_\alpha = \alpha^2 \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t = \alpha^2 \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) = -1 \quad (3.1.11)$$

Λόγω της κανονικοποίησης του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος, έχουμε $\nabla_\mu (n^\alpha n_\alpha) = 0$ οπότε λαμβάνουμε:

$$n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha = n_\alpha \nabla_\mu n^\alpha = 0 \quad (3.1.12)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε μια υπερεπιφάνεια ορίζεται με μοναδικό τρόπο εκτός από τον προσανατολισμό-πρόσημό του, συγκεκριμένα υπάρχουν δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα όπου το ένα είναι μελλοντικά και το άλλο παρελθοντικά κατευθυνόμενο (future/past pointing). Η επιλογή του προσήμου ($-$) στον ορισμό (3.1.10) εξασφαλίζει ότι το κάθετο διάνυσμα n είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο, δείχνει δηλαδή προς την κατεύθυνση όπου η χρονική συντεταγμένη t αυξάνεται, θεωρώντας ότι η t αυξάνεται καθώς οδεύουμε στο μέλλον. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το n κατευθύνεται στο μέλλον εξετάζοντας τη χρονική του συνιστώσα $n^0 = dx^0(n) = dt(n)$ (σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στη διαμέριση) και επιβεβαιώνοντας ότι είναι θετική:

$$n^0 = dt(n) = n^\alpha \nabla_\alpha t = -\alpha \nabla^\alpha t \nabla_\alpha t = \frac{1}{\alpha} > 0 \quad (3.1.13)$$

Εφόσον το διάνυσμα n είναι μοναδιαίο και χρονοειδές, εκλαμβάνεται ως η τετραταχύτητα ($u^\alpha = n^\alpha$) μιας ειδικής ομάδας παρατηρητών που λέγονται **κάθετοι παρατηρητές - Eulerian/normal observers** οι οποίοι κινούνται πάνω στις ολοκληρωτικές καμπύλες του κάθετου διανύσματος n . Δηλαδή οι κοσμικές γραμμές των Eulerian παρατηρητών είναι πάντοτε κάθετες στις χωρικές επιφάνειες Σ_t και ως προς αυτούς τα γεγονότα που ανήκουν σε μια υπερεπιφάνεια συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Η συναλλοίωτη τετραεπιτάχυνση a των Eulerian/normal παρατηρητών ορίζεται, κατά τα γνωστά (εξίσωση 2.10.7), από τη συναλλοίωτη παράγωγο του διανύσματος της τετραταχύτητας n κατά την

κατεύθυνση του εαυτού του:

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \Leftrightarrow a_{\alpha} = n^{\beta} \nabla_{\beta} n_{\alpha} \quad (3.1.14)$$

Το διάνυσμα της τετραεπιτάχυνσης \mathbf{a} είναι κάθετο στο διάνυσμα \mathbf{n} , δηλαδή $a^{\mu} n_{\mu} = 0$, άρα εφάπτεται στις υπερεπιφάνειες Σ_t της διαμέρισης πράγμα που σημαίνει ότι είναι χωρικό διάνυσμα.

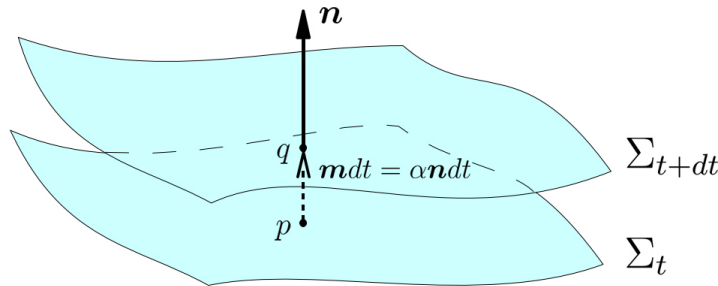
Ορίζουμε το **κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης** (normal evolution vector) $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$ το οποίο είναι χρονοειδές και έχει συνιστώσες:

$$m^{\alpha} = \alpha n^{\alpha} = -\alpha^2 \nabla^{\alpha} t \quad (3.1.15)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$ είναι προφανώς κάθετο στις υπερεπιφάνειες ($\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$) και συνδέει σημεία γειτονικών υπερεπιφανειών κατά τη διεύθυνση κάθετη σ' αυτές. Με άλλα λόγια, η μεταφορά σημείων από μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη γίνεται μέσω Lie dragging στην κατεύθυνση του \mathbf{m} . Για παράδειγμα το διάνυσμα $\mathbf{m} dt$, με dt ένας απειροστός συντεταγμένος χρόνος, συνδέει σημεία της υπερεπιφάνειας Σ_t με σημεία της υπερεπιφάνειας Σ_{t+dt} . Πράγματι, θεωρούμε το απειροστό διάνυσμα $\mathbf{m} dt$ με αρχή το σημείο $p \in \Sigma_t$ και πέρασ το σημείο q με $q = p + \mathbf{m} dt$. Για να δείξουμε ότι το q ανήκει στην Σ_{t+dt} υπολογίζουμε τιμή της συνάρτησης t στο q :

$$t(q) = t(p + \mathbf{m} dt) = t(p) + dt \nabla_{\mathbf{m}} t = t(p) + dt \underbrace{m^{\alpha} \nabla_{\alpha} t}_{=1} = t(p) + dt \quad (3.1.16)$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι $q \in \Sigma_{t+dt}$.



Σχήμα 3.1.2: Το κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$ μεταφέρει σημεία $p \in \Sigma_t$ σε σημεία $q \in \Sigma_{t+dt}$ μέσω Lie dragging κατά απειροστή απόσταση dt στη διεύθυνση κάθετη στις υπερεπιφάνειες. Ισοδύναμα, η υπερεπιφάνεια Σ_t μετασχηματίζεται στη Σ_{t+dt} μέσω Lie dragging από το διάνυσμα $\mathbf{m} dt = \alpha \mathbf{n} dt$.

Το lapse function α φέρει αυτό το όνομα επειδή συσχετίζει το χρονικό διάστημα dt μεταξύ γειτονικών υπερεπιφανειών (όπου t η χρονική συντεταγμένη που ταυτοποιεί κάθε υπερεπιφάνεια) με τον ιδιόχρονο $d\tau$ κατά μήκος των κοσμικών γραμμών κάθετων στις υπερεπιφάνειες, δηλαδή $d\tau$ είναι ο ιδιόχρονος που μετράει ένας κάθετος παρατηρητής.

Πρόταση 3.1: Σχέση dt και ιδιόχρονου $d\tau$

Έστω δύο απειροστά κοντινές υπερεπιφάνειες Σ_t και Σ_{t+dt} που απέχουν χρονικά κατά συντεταγμένο χρόνο dt . Ο ιδιόχρονος $d\tau$ που μεσολαβεί ανάμεσα στις υπερεπιφάνειες Σ_t, Σ_{t+dt} όπως μετράται από έναν κάθετο παρατηρητή (Eulerian/normal observer) στις υπερεπιφάνειες είναι:

$$d\tau = \alpha dt \quad (3.1.17)$$

όπου $\alpha = \alpha(t, x^i)$ το lapse function.

Απόδειξη:

Το εφαπτόμενο διάνυσμα στην κοσμική γραμμή του κάθετου παρατηρητή, αν αυτή παραμετροποιηθεί από τη συντεταγμένη t , είναι το διάνυσμα $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$. Από τον ορισμό του ιδιόχρονου έχουμε:

$$d\tau = \sqrt{-g(\mathbf{m}, \mathbf{m})} dt = \sqrt{-\alpha^2 g(\mathbf{n}, \mathbf{n})} dt = \sqrt{-\alpha^2 \cdot (-1)} dt = \alpha dt$$

Εξετάσαμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται σημεία σε γειτονικές υπερεπιφάνειες, μέσω του κάθετου διανύσματος χρονικής εξέλιξης $\alpha \mathbf{n}$. Θα δούμε τώρα ότι μέσω του shift vector β (στα ελληνικά διάνυσμα ολίσθησης) μπορούμε να συνδέσουμε σημεία της ίδιας υπερεπιφάνειας, όπου το ένα αποτελεί σημείο τομής της υπερεπιφάνειας με τον κάθετο άξονα (normal line) ενώ το άλλο αποτελεί σημείο τομής της υπερεπιφάνειας με τη γραμμή σταθερών χωρικών συντεταγμένων (άξονας χρόνου - time line).

Ορισμός 3.3: Διάνυσμα ολίσθησης β - Shift vector β

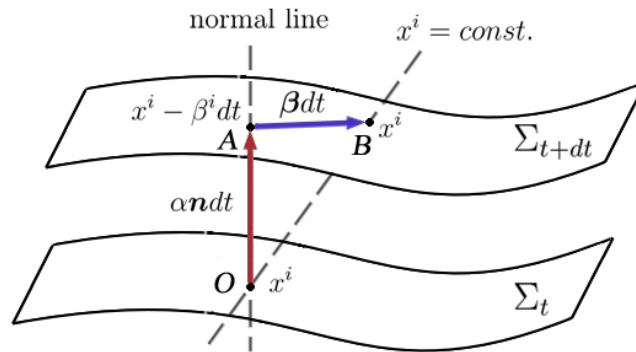
Σε συντεταγμένες (t, x^i) θεωρούμε το σημείο $O \in \Sigma_t$ με χωρικές συντεταγμένες x^i_t . Μεταφέρουμε το σημείο O στη γειτονική υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} μέσω Lie dragging στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος χρονικής εξέλιξης $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$ (normal line) κατά απόσταση dt , οπότε παίρνουμε το σημείο $A \in \Sigma_{t+dt}$ με χωρικές συντεταγμένες x^i_{t+dt} . Μεταφέρουμε πάλι το σημείο O στη Σ_{t+dt} όμως αυτή τη φορά πραγματοποιούμε Lie dragging στην κατεύθυνση της γραμμής σταθερών χωρικών συντεταγμένων $x^i = const.$ (time line) κατά απόσταση dt , οπότε παίρνουμε το σημείο $B \in \Sigma_{t+dt}$ με χωρικές συντεταγμένες $x^i_{t+dt} = x^i_t$. Το διάνυσμα που εφάπτεται στη Σ_{t+dt} και έχει αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B λέγεται shift vector β με συνιστώσες:

$$\beta^i dt = x^i_{t+dt} - x^i_{t+dt} = x^i_t - x^i_{t+dt} \quad (3.1.18)$$

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία το shift vector συμβολίζεται επίσης N^i ενώ το lapse N .

Με τον τρόπο που το έχουμε ορίσει, το shift vector είναι εφαπτόμενο στις υπερεπιφάνειες (αφού ορίζεται ώστε να συνδέει σημεία μέσα στην υπερεπιφάνεια) δηλαδή είναι καθαρά χωρικό, πράγμα που συνεπάγεται:

$$\beta^\alpha n_\alpha = 0 \quad (3.1.19)$$



Σχήμα 3.1.3: Σχηματική απεικόνιση του ορισμού του shift vector β . Αν ένας κάθετος παρατηρητής είχε χωρικές συντεταγμένες x^i στην Σ_t τότε στην επόμενη υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} οι συντεταγμένες του θα είναι $x^i - \beta^i dt$.

Το διάνυσμα ολίσθησης/shift vector β μετράει πόσο αλλάζουν-μετατοπίζονται οι χωρικές συντεταγμένες ενός Eulerian/normal παρατηρητή καθώς κινείται από τη μία υπερεπιφάνεια στην επόμενη ακολουθώντας το κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης $m = \alpha n$. Αν ο κάθετος παρατηρητής είχε χωρικές συντεταγμένες x^i στην υπερεπιφάνεια Σ_t , τότε όταν μεταβεί στην επόμενη υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} θα έχει χωρικές συντεταγμένες $x^i - \beta^i dt$ δηλαδή οι συντεταγμένες του θα έχουν αλλάξει (έχουν γίνει shifted) κατά $-\beta^i dt$, εξ' ου και το όνομα shift vector. Διαισθητικά, το shift vector είναι το χωρικό διάνυσμα που παριστάνει τη σχετική ταχύτητα των γραμμών σταθερών χωρικών συντεταγμένων $x^i = const.$ (time lines) ως προς τον κάθετο παρατηρητή.

Χρησιμοποιώντας το κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης αn καθώς και το shift vector β μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα χρόνου t , το οποίο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στις γραμμές σταθερών χωρικών συντεταγμένων ($x^i = const.$). Οι γραμμές $x^i = const.$ ταυτίζονται με τις γραμμές του χρόνου (time lines), αφού κατά μήκος τους οι χωρικές συντεταγμένες παραμένουν σταθερές και το μόνο που μεταβάλλεται είναι ο χρόνος $x^0 = t$. Κατά συνέπεια, το διάνυσμα χρόνου t εκφράζει τη ροή του χρόνου και συμπίπτει ουσιαστικά με το διάνυσμα βάσης ∂_t του συστήματος συντεταγμένων προσαρμοσμένου στη διαμέριση. Ορίζεται ως:

$$t = \partial_t \equiv \alpha n + \beta \quad (3.1.20)$$

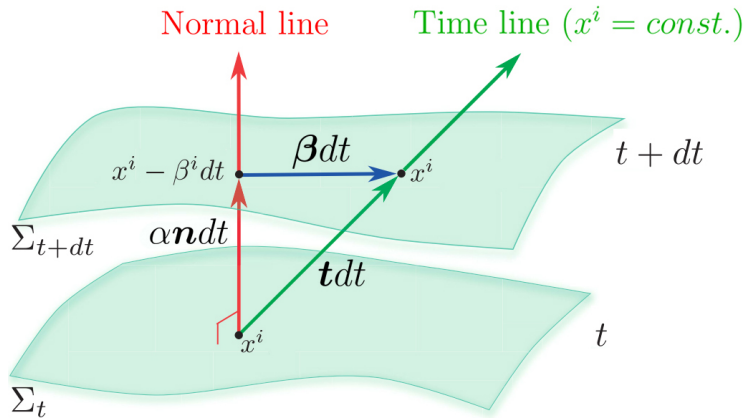
ή σε μορφή συνιστωσών:

$$t^\alpha = (\partial_t)^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha \quad (3.1.21)$$

Από τον ορισμό του διανύσματος χρόνου, παρατηρούμε ότι συντίθεται από ένα "χρονικό" κομμάτι αn , κάθετο στις υπερεπιφάνειες Σ_t , καθώς και ένα χωρικό κομμάτι β εφαπτόμενο στις Σ_t . Είναι εύκολο να δούμε ότι το διάνυσμα t είναι το δυικό του 1-form $\Omega = \nabla t$:

$$t^\alpha \nabla_\alpha t = (\alpha n^\alpha + \beta^\alpha) \left(-\frac{1}{\alpha} n_\alpha \right) = -\underbrace{n^\alpha n_\alpha}_{-1} - \frac{1}{\alpha} \underbrace{\beta^\alpha n_\alpha}_0 = 1 \quad (3.1.22)$$

πράγμα που επιβεβαιώνει ότι το t συμπίπτει με το χρονικό διάνυσμα βάσης ∂_t . Η συνθήκη $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$ έπεται επίσης ότι το απειροστό διάνυσμα $t dt$ μεταφέρει μέσω Lie dragging σημεία της υπερεπιφάνειας Σ_t στην υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} κατά την κατεύθυνση της γραμμής του χρόνου (κατ' αναλογία με το διάνυσμα m).



Σχήμα 3.1.4: Σχηματική απεικόνιση του lapse α και του shift vector β σε δύο γειτονικές υπερεπιφάνειες Σ_t και Σ_{t+dt} της διαμέρισης. Ο ιδιόχρονος του κάθετου παρατηρητή αυξάνεται κατά $d\tau = \alpha dt$ όταν περάσει συντεταγμένος χρόνος dt . Οι χωρικές συντεταγμένες του κάθετου παρατηρητή αλληλλάζουν από x^i στην Σ_t σε $x^i - \beta^i dt$ στην Σ_{t+dt} , δηλαδή υφίστανται ολίσθηση κατά $-\beta^i dt$.

Διευκρινίζεται ότι ο μόνος περιορισμός που θέτουμε στο διάνυσμα χρόνου με την απαίτηση $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$, είναι να μην εφάπτεται στις χωροειδείς υπερεπιφάνειες, ώστε να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τη χρονική εξέλιξη στην κατεύθυνσή του. Επομένως το διάνυσμα χρόνου δεν είναι κατ' ανάγκη χρονοειδές, το τετράγωνο το μήκους του είναι:

$$|\mathbf{t}|^2 = t^\mu t_\mu = -\alpha^2 + \beta^\mu \beta_\mu \quad (3.1.23)$$

Αναλόγως του χαρακτήρα του \mathbf{t} προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις ανάμεσα στο lapse και το μέτρο του shift vector:

- \mathbf{t} χρονοειδές $\Leftrightarrow \beta^\mu \beta_\mu < \alpha^2$
- \mathbf{t} φωτοειδές $\Leftrightarrow \beta^\mu \beta_\mu = \alpha^2$
- \mathbf{t} χωροειδές $\Leftrightarrow \beta^\mu \beta_\mu > \alpha^2$

Στην περίπτωση όπου το διάνυσμα χρόνου είναι χωροειδές (πράγμα που επιτρέπεται αφού είναι απλά διάνυσμα βάσης και δεν αντιστοιχεί στην τετραταχύτητα κάποιου παρατηρητή) τότε το shift vector ικανοποιεί τη σχέση $|\beta| > \alpha$ και λέμε ότι είναι "υπερφωτεινό" (superluminal) ή "ταχιονικό" (tachionic) καθώς οι συντεταγμένες από τη μία υπερεπιφάνεια στην επόμενη αλλάζουν με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του φωτός. Αυτό δεν είναι αφύσικο, καθώς δεν αναφερόμαστε στην κίνηση κάποιου φυσικού αντικειμένου αλλά στην κίνηση των γραμμών χρόνου που έχει να κάνει με την επιλογή χωρικών συντεταγμένων. Μάλιστα, η χρήση υπερφωτεινού shift vector είναι αναγκαία ώστε να κρατήσουμε τον ορίζοντα γεγονότων σε σταθερή χωροχρονική θέση όταν προσομοιώνουμε χωρόχρονους γύρω από μελανές οπές.

3.2 Προβολικοί τελεστές - Projection operators

Ένας γενικός τανυστής στον χωρόχρονο (M, g) μπορεί να χωριστεί σε δύο συνιστώσες: μια χωρική συνιστώσα εφαπτόμενη στις υπερεπιφάνειες Σ και μια συνιστώσα κάθετη στις υπερεπιφάνειες, στη διεύθυνση δηλαδή του διανύσματος \mathbf{n} . Αυτό επιτυγχάνεται συστέλλοντας τον τανυστή με τον χωρικό προβολικό τελεστή και τον κάθετο προβολικό τελεστή αντίστοιχα. Με τους τελεστές αυτούς μπορούμε να αποσυνθέσουμε τον εφαπτόμενο χώρο του M σε κάθε σημείο $p \in \Sigma$ ως εξής:

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus \text{Vect}_p(\mathbf{n}) \quad (3.2.1)$$

όπου $\text{Vect}_p(\mathbf{n})$ ο μονοδιάστατος υπόχωρος του $T_p M$ που γεννάται από το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} και $T_p \Sigma$ ο τρισδιάστατος εφαπτόμενος χώρος της υπερεπιφάνειας Σ .

Ορισμός 3.4: Χωρικός προβολικός τελεστής - Spatial projection operator

Έστω \mathbf{n} το χρονοειδές μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στις χωροειδείς υπερεπιφάνειες Σ_t . Τότε ο χωρικός προβολικός τελεστής (spatial projection operator) που δίνει τη χωρική προβολή ενός τανυστή πάνω στην υπερεπιφάνεια Σ_t ορίζεται:

$$P : T_p M \rightarrow T_p \Sigma$$

με συνιστώσες:

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu \quad (3.2.2)$$

Η χωρική προβολή ενός τανυστή \mathbf{T} (μέρος του \mathbf{T} επαπτόμενο στη Σ_t) τάξης (r, s) έχει συνιστώσες:

$$(\mathbf{T}_{\parallel})^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} = P^{\alpha_1}_{\mu_1} P^{\alpha_2}_{\mu_2} \dots P^{\alpha_r}_{\mu_r} P^{\nu_1}_{\beta_1} P^{\nu_2}_{\beta_2} \dots P^{\nu_s}_{\beta_s} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \quad (3.2.3)$$

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία ο χωρικός προβολικός τελεστής απαντάται με το σύμβολο P^μ_ν , γ^μ_ν ή \perp^μ_ν .

Σημείωση: Η δράση του χωρικού προβολικού τελεστή στο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στις υπερεπιφάνειες δίνει μηδέν, αφού το διάνυσμα \mathbf{n} δεν έχει επαπτόμενη συνιστώσα στις Σ_t .

$$P^\mu_\nu n^\nu = 0$$

Σημείωση: Ο χωρικός τελεστής προβολής δρα σαν τον ταυτοτικό τελεστή όταν εφαρμόζεται σε χωρικούς τανυστές, ικανοποιεί δηλαδή την κάτωθι γενική ιδιότητα των τελεστών προβολής που λέγεται **ταυτοδυναμία** (idempotence):

$$P^\mu_\nu P^\nu_\sigma = P^\mu_\sigma$$

Ορισμός 3.5: Κάθετος προβολικός τελεστής - Normal projection operator

Έστω \mathbf{n} το χρονοειδές μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στις χωροειδείς υπερεπιφάνειες Σ_t . Τότε ο κάθετος προβολικός τελεστής (normal projection operator) που δίνει την προβολή ενός τανυστή στη διεύθυνση κάθετη στην υπερεπιφάνεια Σ_t ορίζεται:

$$N : T_p M \rightarrow \text{Vect}_p(\mathbf{n})$$

με συνιστώσες:

$$N^\mu_\nu = -n^\mu n_\nu = \delta^\mu_\nu - P^\mu_\nu \quad (3.2.4)$$

Η κάθετη προβολή ενός τανυστή \mathbf{T} (μέρος του \mathbf{T} κάθετο στη Σ_t) τάξης (r, s) έχει συνιστώσες:

$$(\mathbf{T}_{\perp})^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} = N^{\alpha_1}_{\mu_1} N^{\alpha_2}_{\mu_2} \dots N^{\alpha_r}_{\mu_r} N^{\nu_1}_{\beta_1} N^{\nu_2}_{\beta_2} \dots N^{\nu_s}_{\beta_s} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \quad (3.2.5)$$

Συνεπώς ένα διάνυσμα \mathbf{V} μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως το άθροισμα μιας συνιστώσας επαπτόμενης στην υπερεπιφάνεια (χωρικό κομμάτι) και μιας συνιστώσας κάθετης στην υπερεπιφάνεια:

$$V^\mu = (\mathbf{V}_{\parallel})^\mu + (\mathbf{V}_{\perp})^\mu = P^\mu_\nu V^\nu + N^\mu_\nu V^\nu \quad (3.2.6)$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύουμε την πιο πάνω ανάλυση σε τετραδιάστατους τανυστές οποιασδήποτε τάξης, χωρίζουμε δηλαδή έναν τανυστή \mathbf{T} στο χωρικό του κομμάτι $P\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{\parallel}$ που ανήκει στη Σ_t και στο κομμάτι $N\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{\perp}$ κάθετο στη Σ_t και άρα στην κατεύθυνση του \mathbf{n} .

Υπό αυτή την έννοια, το κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης αn προκύπτει από την κάθετη προβολή του διανύσματος χρόνου t ενώ το shift vector β προκύπτει από τη χωρική προβολή του t :

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu \Rightarrow \begin{cases} \alpha n^\mu = N^\mu_\alpha t^\alpha \Rightarrow \alpha = -n_\alpha t^\alpha \\ \beta^\mu = P^\mu_\alpha t^\alpha \end{cases} \quad (3.2.7)$$

3.3 Επαγόμενη μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$ στις Σ - Induced metric $\gamma_{\alpha\beta}$ on Σ

Κάθε χωροειδής 3D υπερεπιφάνεια Σ μιας Lorentzian πολλαπλότητας όπως ο χωρόχρονος (M, g) κληρονομεί μια θετικά ορισμένη $(+, +, +)$ Riemmanian μετρική γ η οποία επάγεται από τη μετρική g του ευρύτερου χωρόχρονου. Η χωρική μετρική γ προκύπτει από τον περιορισμό της χωροχρονικής μετρικής g στην υπερεπιφάνεια Σ και περιγράφει την εσωτερική τρισδιάστατη γεωμετρία της υπερεπιφάνειας, καθορίζει δηλαδή τις αποστάσεις και γωνίες ανάμεσα σε σημεία της υπερεπιφάνειας καθώς και την εσωτερική χωρική καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας.

Ορισμός 3.6: Επαγόμενη χωρική μετρική - Induced spatial metric

Η **επαγόμενη μετρική** (induced metric) γνωστή και ως **πρώτη θεμελιώδης μορφή** (first fundamental form) γ μιας χωροειδούς υπερεπιφάνειας Σ είναι ο τανυστής τάξης $(0, 2)$ που προκύπτει από την προβολή της πλήρους μετρικής g του χωρόχρονου επάνω στην υπερεπιφάνεια Σ .

Έστω χωρικά διανύσματα $V, W \in T_p\Sigma$, τότε η επαγόμενη μετρική ορίζεται ως η απεικόνιση:

$$\gamma_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.1)$$

με

$$\gamma_p(V, W) = g_p(V, W) \Leftrightarrow \gamma_{\alpha\beta}(p)V^\alpha W^\beta = g_{\alpha\beta}(p)V^\alpha W^\beta \quad (3.3.2)$$

Οι συνιστώσες της χωρικής μετρικής $\gamma_{\alpha\beta}$ ορίζονται από την χωρική προβολή των συνιστωσών $g_{\alpha\beta}$ της χωροχρονικής μετρικής σύμφωνα με τη σχέση:

$$\gamma_{\alpha\beta} = P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (3.3.3)$$

Η επαγόμενη χωρική μετρική προσδιορίζει το στοιχείο μήκους (σε τρεις διαστάσεις) μεταξύ δύο χωρικών σημείων x^i και $x^i + dx^i$ που ανήκουν σε μια υπερεπιφάνεια Σ_t , σύμφωνα με τη σχέση:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.3.4)$$

Από τη σχέση (3.3.3) συνάγουμε ότι ο τελεστής προβολής σε μια υπερεπιφάνεια δεν είναι τίποτα άλλο παρά η επαγόμενη μετρική της υπερεπιφάνειας, με τον ένα δείκτη ανεβασμένο με χρήση της $g_{\alpha\beta}$:

$$P^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu = g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu} + n_\sigma n_\nu) = g^{\mu\sigma} \gamma_{\sigma\nu} = \gamma^\mu{}_\nu \quad (3.3.5)$$

Εφόσον η χωρική μετρική είναι ταυτόσημη με τον προβολικό τελεστή $\gamma_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}$ θα την χρησιμοποιούμε στο εξής για να προβάλλουμε τανυστές πάνω στις υπερεπιφάνειες Σ_t της διαμέρισης.

Με τον τρόπο που την έχουμε ορίσει, η επαγόμενη μετρική είναι ένας συμμετρικός ($\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}$), μη-ιδιάζων ($\gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta}) \neq 0$), καθαρά χωρικός ($n^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = n^\beta \gamma_{\alpha\beta} = 0$) τανυστής. Ανεβάζοντας τους δείκτες της $\gamma_{\alpha\beta}$ με την $g^{\alpha\beta}$ λαμβάνουμε τις συνιστώσες της αντίστροφης χωρικής μετρικής:

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta \quad (3.3.6)$$

Μπορούμε να ανεβοκατεβάζουμε τους δείκτες καθαρά χωρικών τανυστών είτε με την χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$ των υπερεπιφανειών Σ_t είτε με την πλήρη μετρική $g_{\alpha\beta}$ του χωρόχρονου.

3.3.1 Διάνυσμα χρόνου, κάθετο διάνυσμα και shift σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες - Time vector, normal vector and shift in adapted coordinates

Είναι σκόπιμο να εκφράσουμε τη μετρική καθώς και άλλα συναφή μεγέθη όπως το κάθετο διάνυσμα στις υπερεπιφάνειες και το shift vector στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο στη διαμέριση, διότι οι συντεταγμένες (t, x^i) υιοθετούνται για την αριθμητική επίλυση. Σε αυτές τις συντεταγμένες, η συνθήκη δυκότητας $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1 \Leftrightarrow dt(t) = 1$ επιτάσσει ότι το διάνυσμα χρόνου t είναι το διάνυσμα βάσης ∂_t άρα:

$$t^\alpha = (\partial_t)^\alpha = \delta^\alpha_0 = (1, 0, 0, 0) \quad (3.3.7)$$

Οι συνιστώσες n_α του 1-form που αντιστοιχεί στο κάθετο διάνυσμα n ευρίσκονται από τον ορισμό $n_\alpha = -\alpha \nabla_\alpha t = -\alpha \partial_\alpha t = -\alpha \delta^0_\alpha$ πράγμα που σημαίνει ότι οι χωρικές συνιστώσες $n_i = 0$ ενώ η χρονική συνιστώσα $n_0 = -\alpha$ επομένως:

$$n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (3.3.8)$$

Οι συνιστώσες n^α του κάθετου διανύσματος στις υπερεπιφάνειες ευρίσκονται από τη σχέση:

$$t^\alpha = (\partial_t)^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha \quad (3.3.9)$$

που ορίζει το διάνυσμα χρόνου. Σημειώνουμε ότι το shift vector, λόγω του ότι είναι καθαρά χωρικό διάνυσμα, έχει μηδενική χρονική συνιστώσα: $n_\alpha \beta^\alpha = 0 \Rightarrow n_0 \beta^0 = 0 \Rightarrow \beta^0 = 0$. Έτσι σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες γράφεται:

$$\beta^\alpha = (0, \beta^i) \quad (3.3.10)$$

Αυτό είναι ένα γενικότερο συμπέρασμα, δηλαδή οι χρονικές συνιστώσες των χωρικών διανυσμάτων και χωρικών τανυστών γραμμένων σε ανταλλοίωτη μορφή (με όλους τους δείκτες πάνω) είναι μηδενικές σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στη διαμέριση. Επί παραδείγματι, $\gamma^{00} = 0$ και $\gamma^{0i} = 0$ (εν γένει όμως $\gamma_{00} \neq 0$ και $\gamma_{0i} \neq 0$).

Θέτοντας $\mu = 0$ στη (3.3.9) παίρνουμε $n^0 = 1/\alpha$ ενώ θέτοντας $\mu = i$ παίρνουμε $n^i = -\beta^i/\alpha$. Συνολικά λοιπόν έχουμε:

$$n^\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right) \quad (3.3.11)$$

Οι συνιστώσες του 1-form που αντιστοιχεί στο t , δεδομένου ότι $\beta_0 = t^\alpha \beta_\alpha = \beta^\alpha \beta_\alpha = \beta^k \beta_k$, είναι:

$$t_\alpha = \alpha n_\alpha + \beta_\alpha = (-\alpha^2 + \beta_0, \beta_i) = (-\alpha^2 + \beta_k \beta^k, \beta_i) \quad (3.3.12)$$

3.3.2 Μετρική σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες - Metric in adapted coordinates

Οι συνιστώσες $g_{\alpha\beta}$ της μετρικής g του χωρόχρονου σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες υπολογίζονται σύμφωνα με τον ορισμό:

$$g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) \quad (3.3.13)$$

Αντικαθιστώντας τα διανύσματα βάσης (∂_t, ∂_i) λαμβάνουμε:

- $g_{00} = g(\partial_t, \partial_t) = g(\alpha n + \beta, \alpha n + \beta) = -\alpha^2 + \beta_k \beta^k$
- $g_{0i} = g(\partial_t, \partial_i) = g(\alpha n + \beta, \partial_i) = \beta_\mu (\partial_i)^\mu = \beta_\mu \delta^\mu_i = \beta_i$
- $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \gamma(\partial_i, \partial_j) = \gamma_{ij}$

όπου στο τελευταίο σημείο χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα διανύσματα βάσης ∂_i είναι καθαρά χωρικά, άρα από τον ορισμό της επαγόμενης μετρικής $\mathbf{g}(\partial_i, \partial_j) = \gamma(\partial_i, \partial_j) \Leftrightarrow g_{ij} = \gamma_{ij}$ (όμως εν γένει $g^{ij} \neq \gamma^{ij}$). Είμαστε λοιπόν σε θέση να γράψουμε τις συνιστώσες $g_{\alpha\beta}$ της μετρικής του χωρόχρονου συναρτήσει του lapse α και shift β_i αλλά και της χωρικής μετρικής γ_{ij} των υπερεπιφανειών. Υπό μορφή σύνθετου πίνακα (block matrix) τα στοιχεία της μετρικής γράφονται:

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \hline \beta_i & \gamma_{ij} \end{array} \right) \quad (3.3.14)$$

Τα στοιχεία $g^{\alpha\beta}$ της αντίστροφης μετρικής υπολογίζονται αντιστρέφοντας τον πίνακα (3.3.14) με μεθόδους ανάλυσης πινάκων ή εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τη σχέση $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta$ με $\gamma^{00} = \gamma^{0i} = 0$.

- $g^{00} = \gamma^{00} - n^0 n^0 = -1/\alpha^2$
- $g^{0i} = \gamma^{0i} - n^0 n^i = -1/\alpha \cdot (-\beta^i/\alpha) = \beta^i/\alpha^2$
- $g^{ij} = \gamma^{ij} - n^i n^j = \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2$

Συνεπώς η αντίστροφη μετρική έχει στοιχεία:

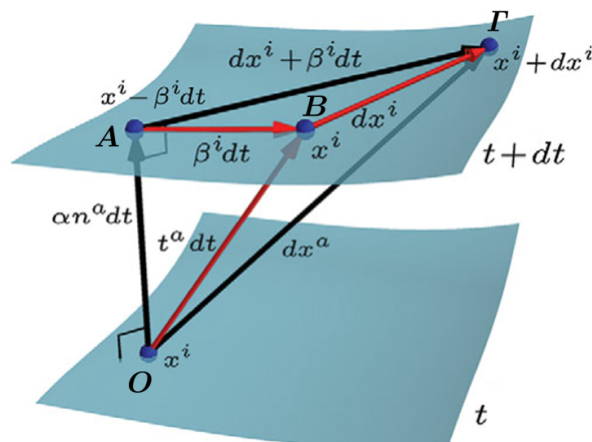
$$g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -1/\alpha^2 & \beta^j/\alpha^2 \\ \hline \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{array} \right) \quad (3.3.15)$$

Το στοιχείο μήκους του τετραδιάστατου χωρόχρονου μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των μεγεθών $\{\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}\}$ του φορμαλισμού 3+1 ως εξής:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j = (-\alpha^2 + \beta_k \beta^k) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.3.16)$$

$$= -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (3.3.17)$$

Η φυσική ερμηνεία του όρου $\alpha^2 dt^2$ είναι ότι παριστάνει το τετράγωνο του στοιχειώδους ιδιόχρονου (ως προς κάθετο παρατηρητή) ανάμεσα στις γειτονικές υπερεπιφάνειες Σ_t, Σ_{t+dt} . Από την άλλη, ο όρος $\gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$ παριστάνει το τετράγωνο της χωρικής απόστασης ανάμεσα στα σημεία της Σ_{t+dt} με συντεταγμένες $x^i - \beta^i dt$ και $x^i + dx^i$ (σημεία A και Γ στο κάτωθι σχήμα).



Σχήμα 3.3.2.1: Το στοιχείο μήκους $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ στον 3+1 χωρόχρονο αναπαριστά το διάστημα ανάμεσα στα σημεία O και Γ που συνδέονται με το διάνυσμα $dx^\alpha = \alpha n^\alpha dt + (dx^i + \beta^i dt)$. Το $ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$ μπορεί υπολογιστεί με εφαρμογή του "πυθαγόρειου θεωρήματος" στο $\triangle OAG$.

Η ορίζουσα $g \equiv \det(g_{\alpha\beta})$ της μετρικής του χωρόχρονου συνδέεται με την ορίζουσα $\gamma \equiv \det\gamma_{ij}$ της χωρικής μετρικής μέσω της σχέσης:

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} \quad (3.3.18)$$

Αυτό είναι εύκολο να το δούμε ανακαλώντας μια γνωστή σχέση της γραμμικής άλγεβρας: $(A^{-1})_{ij} = C_{ji}/\det(A)$ που ισχύει για κάθε αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A . Εξειδικεύοντας για το στοιχείο g^{00} της αντίστροφης μετρικής λαμβάνουμε:

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{\det(g_{\alpha\beta})} \equiv \frac{C_{00}}{g} \quad (3.3.19)$$

όπου ο αριθμός C_{00} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου g_{00} το οποίο ορίζεται $C_{00} = (-1)^{0+0}M_{00}$ με M_{00} η ελάσσονα ορίζουσα του g_{00} δηλαδή η ορίζουσα του 3×3 υποπίνακα που προκύπτει από τη διαγραφή της πρώτης στήλης και της πρώτης γραμμής του πίνακα $(g_{\alpha\beta})$. Εν προκειμένω έχουμε $g^{00} = -\alpha^{-2}$ και $C_{00} = M_{00} = \det(\gamma_{ij}) \equiv \gamma$ οπότε:

$$-\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{g} \Leftrightarrow \sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} \quad (3.3.20)$$

3.3.3 Χωρική Συναλλοίωτη Παράγωγος - Spatial Covariant Derivative

Στη χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$ αντιστοιχεί μια μοναδική χωρική συναλλοίωτη παράγωγος D_μ η οποία απεικονίζει χωρικούς τανυστές σε χωρικούς τανυστές. Η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος είναι απότοκο της σύνδεσης Levi-Civita D της μετρικής γ , την οποία κληρονομούν οι χωροειδείς υπερεπιφάνειες Σ_t από τη σύνδεση Levi-Civita ∇ του περιβάλλοντα χωρόχρονου (M, g) .

Ορισμός 3.7: Χωρική συναλλοίωτη παράγωγος - Spatial covariant derivative

Έστω ο χωρόχρονος (M, g) εφοδιασμένος με τη σύνδεση Levi-Civita ∇ και Σ μια τρισδιάστατη χωροειδής υπερεπιφάνεια του M με επαγόμενη μετρική γ . Τότε η (ολική) χωρική συναλλοίωτη παράγωγος της σύνδεσης D που αντιστοιχεί στη (Σ, γ) ορίζεται:

$$DT = P(\nabla T) \quad (3.3.21)$$

όπου P ο χωρικός προβολικός τελεστής και T ένας χωρικός τανυστής τάξης (r, s) , εφαπτόμενος στη Σ . Με όρους συνιστωσών, ο ορισμός (3.3.21) συνεπάγεται:

$$D_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = P^\sigma_\rho P^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots P^{\alpha_r}_{\mu_r} P^{\nu_1}_{\beta_1} \dots P^{\nu_s}_{\beta_s} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (3.3.22)$$

όπου ∇_μ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που σχετίζεται με τη μετρική g του χωρόχρονου.

Για παράδειγμα, η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης f είναι:

$$D_\alpha f = \gamma^\mu_\alpha \nabla_\mu f \quad (3.3.23)$$

Ακόμη, η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή S τάξης $(1, 2)$ είναι:

$$D_\alpha S^\beta_{\gamma\delta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\beta_\nu \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\delta \nabla_\mu S^\nu_{\rho\sigma} \quad (3.3.24)$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας συναλλοίωτης παραγώγου όπως γραμμικότητα, κανόνας Leibniz, αναγωγή στη μερική παράγωγο όταν δρα σε βαθμωτές συναρτήσεις κτλ., λόγω του ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ∇_μ ικανοποιεί τις ιδιότητες αυτές. Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι η χωρική σύνδεση D είναι Levi-Civita:

Πρόταση 3.2

Η χωρική σύνδεση D που σχετίζεται με τη χωρική συναλλοίωτη παράγωγο D_μ είναι η μοναδική σύνδεση της (Σ, γ) η οποία (i) έχει μηδενική στρέψη (είναι συμμετρική) και (ii) είναι συμβατή με τη μετρική γ , είναι δηλαδή σύνδεση Levi-Civita.

Απόδειξη:

(i) Το γεγονός ότι η χωρική σύνδεση δεν έχει στρέψη αποδεικνύεται από το γεγονός ότι οι χωρικές συναλλοίωτες παράγωγοι μετατίθενται όταν δρουν σε βαθμωτές συναρτήσεις, που ισοδυναμεί με τον μηδενισμό του χωρικού τανυστή στρέψης. Πράγματι, έστω βαθμωτή συνάρτηση f , τότε:

$$D_\alpha D_\beta f = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \nabla_\mu (D_\nu f) = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \nabla_\mu (\partial_\nu f) = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (\partial_\mu \partial_\nu f - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda f)$$

Ομοίως:

$$D_\beta D_\alpha f = \gamma^\mu_\beta \gamma^\nu_\alpha (\partial_\mu \partial_\nu f - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda f) \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} \gamma^\nu_\beta \gamma^\mu_\alpha (\partial_\nu \partial_\mu f - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda f) = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (\partial_\mu \partial_\nu f - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda f)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι μετατίθενται και τα σύμβολα Christoffel της σύνδεσης ∇ είναι συμμετρικά. Συνεπώς:

$$D_\alpha D_\beta f = D_\beta D_\alpha f \Leftrightarrow [D_\alpha, D_\beta]f = 0 \quad (3.3.25)$$

Γενικά $[D_\alpha, D_\beta]f = -T^\rho_{\alpha\beta} \partial_\rho f$ όπου $T^\rho_{\alpha\beta}$ οι συνιστώσες του χωρικού τανυστή στρέψης της υποπολλαπλότητας (Σ, γ) οπότε η σχέση $[D_\alpha, D_\beta]f = 0$ εξασφαλίζει ότι $T^\rho_{\alpha\beta} = 0$ και άρα η σύνδεση D είναι χωρίς στρέψη.

(ii) Προκειμένου να δείξουμε τη συμβατότητα της σύνδεσης D με τη χωρική μετρική γ , υπολογίζουμε τη χωρική συναλλοίωτη παράγωγο της γ και διαπιστώνουμε ότι μηδενίζεται:

$$\begin{aligned} D_\alpha \gamma_{\beta\gamma} &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \gamma_{\nu\rho} \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu (g_{\nu\rho} + n_\nu n_\rho) \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \underbrace{\nabla_\mu g_{\nu\rho}}_0 + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \underbrace{\gamma^\rho_\gamma n_\rho \nabla_\mu n_\nu}_0 + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\rho_\gamma \underbrace{\gamma^\nu_\beta n_\nu \nabla_\mu n_\rho}_0 = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συμβατότητα της ∇ με τη μετρική g και $\gamma^\rho_\gamma n_\rho = \gamma^\nu_\beta n_\nu = 0$.

Δεδομένου ενός συστήματος συντεταγμένων, μπορούμε να εκφράσουμε τη χωρική συναλλοίωτη παράγωγο συναρτήσει των 3D χωρικών συμβόλων Christoffel ${}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ της σύνδεσης D . Τα 3D σύμβολα Christoffel υπολογίζονται στο σύστημα συντεταγμένων αυτό από τις μερικές παραγώγους των συνισ-

ωσών $\gamma_{\alpha\beta}$ της χωρικής μετρικής:

$${}^{(3)}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\partial_{\kappa}\gamma_{\lambda\beta} + \partial_{\lambda}\gamma_{\kappa\beta} - \partial_{\beta}\gamma_{\kappa\lambda}) \quad (3.3.26)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός χωρικού διανύσματος V σε ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$D_{\alpha}V^{\beta} = \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\beta}_{\nu}\nabla_{\mu}V^{\nu} = \gamma^{\mu}_{\alpha}(\partial_{\mu}V^{\beta} + n^{\beta}n_{\nu}\partial_{\mu}V^{\nu} + {}^{(3)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\beta}V^{\sigma}) \quad (3.3.27)$$

Εκφράζοντας τις συνιστώσες του χωρικού διανύσματος V στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο στη διαμέριση (όπου $V^0 = 0$) και αναπτύσσοντας την πιο πάνω σχέση παίρνουμε:

$$D_iV^j = \partial_iV^j + {}^{(3)}\Gamma_{ik}^jV^k$$

Πρόταση 3.3: Σχέση επιτάχυνσης και lapse

Η επιτάχυνση $a_{\beta} = n^{\mu}\nabla_{\mu}n_{\beta}$ ενός κάθετου (Eulerian) παρατηρητή εκφράζεται μέσω της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου του lapse function α σύμφωνα με τη σχέση:

$$a_{\beta} = \frac{1}{\alpha}D_{\beta}\alpha = D_{\beta}\ln\alpha \quad (3.3.28)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} a_{\beta} &= n^{\mu}\nabla_{\mu}n_{\beta} = n^{\mu}\nabla_{\mu}(-\alpha\nabla_{\beta}t) = -n^{\mu}\nabla_{\beta}t\nabla_{\mu}\alpha - \alpha n^{\mu}\nabla_{\mu}\nabla_{\beta}t = -n^{\mu}\nabla_{\beta}t\nabla_{\mu}\alpha - \alpha n^{\mu}\nabla_{\beta}\nabla_{\mu}t \\ &= \frac{1}{\alpha}n^{\mu}n_{\beta}\nabla_{\mu}\alpha - \alpha n^{\mu}\nabla_{\beta}\left(-\frac{1}{\alpha}n_{\mu}\right) = \frac{1}{\alpha}n^{\mu}n_{\beta}\nabla_{\mu}\alpha + \underbrace{n^{\mu}\nabla_{\beta}n_{\mu}}_0 - \frac{1}{\alpha}\underbrace{n^{\mu}n_{\mu}}_{-1}\nabla_{\beta}\alpha = \frac{1}{\alpha}(n^{\mu}n_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta})\nabla_{\mu}\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha}\gamma^{\mu}_{\beta}\nabla_{\mu}\alpha = \frac{1}{\alpha}D_{\beta}\alpha = D_{\beta}\ln\alpha \end{aligned}$$

3.3.4 Χωρικός τανυστής Riemann - Spatial Riemann tensor

Η εσωτερική καμπυλότητα των τρισδιάστατων χωροειδών υπερεπιφανειών Σ της διαμέρισης περιγράφεται από τον 3D τανυστή Riemann ο οποίος ορίζεται μέσω της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου D_{α} που σχετίζεται με τη χωρική μετρική γ , κατ' αντιστοιχία με τον τετραδιάστατο ομόλογό του. Όπως έχει προαναφερθεί, η εσωτερική καμπυλότητα είναι μέγεθος που μπορεί να μετρηθεί (ή να αναγνωριστεί) από έναν παρατηρητή ο οποίος κατοικεί στην υπερεπιφάνεια και καθορίζει τις εσωτερικές γεωμετρικές ιδιότητες της υπερεπιφάνειας, οι οποίες αφορούν τα διανύσματα που εφάπτονται σε αυτή (π.χ. παράλληλη μεταφορά, γεωδαισιακή απόκλιση κτλ.).

Ο 3D τανυστής Riemann ${}^{(3)}\mathbf{R}$ ορίζεται ως ο τανυστής τάξης $(1, 3)$ που δρα σε τρία χωρικά διανυσματικά πεδία $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ και ένα χωρικό 1-form ω βάσει της σχέσης:

$${}^{(3)}\mathbf{R}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V}) = \omega(D_{\mathbf{X}}D_{\mathbf{Y}}\mathbf{V} - D_{\mathbf{Y}}D_{\mathbf{X}}\mathbf{V} - D_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{V}) \quad (3.3.29)$$

Οι συνιστώσες του 3D τανυστή Riemann ορίζονται: ${}^{(3)}R^\alpha_{\beta\mu\nu} = {}^{(3)}\mathbf{R}(dx^\alpha, \partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\beta)$.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, οι συνιστώσες του 3D τανυστή Riemann μπορούν να υπολογιστούν από τα 3D σύμβολα Christoffel και τις παραγώγους τους μέσω μιας σχέσης εντελώς ανάλογης με αυτή στην τετραδιάστατη περίπτωση:

$${}^{(3)}R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu {}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu {}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + {}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} {}^{(3)}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - {}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} {}^{(3)}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (3.3.30)$$

Ισοδύναμα, ο 3D τανυστής Riemann μπορεί να ειπωθεί ως η απεικόνιση τριών χωρικών διανυσματικών πεδίων $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V}$ σε ένα τέταρτο:

$${}^{(3)}\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V}) \equiv {}^{(3)}\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{V} = D_{\mathbf{X}}D_{\mathbf{Y}}\mathbf{V} - D_{\mathbf{Y}}D_{\mathbf{X}}\mathbf{V} - D_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{V} \quad (3.3.31)$$

το οποίο έχει συνιστώσες:

$$\left({}^{(3)}\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{V}) \right)^\alpha = {}^{(3)}R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta X^\mu Y^\nu \quad (3.3.32)$$

Επισημαίνουμε ότι λόγω του χωρικού χαρακτήρα του 3D τανυστή Riemann, ισχύει:

$${}^{(3)}R^\alpha_{\beta\mu\nu} n_\alpha = 0 \quad (3.3.33)$$

Εφόσον η σύνδεση D δεν έχει στρέψη, ισχύει η ταυτότητα Ricci η οποία σε συμβολισμό αφηρημένων δεικτών (abstract index notation) γράφεται:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)V^\alpha = {}^{(3)}R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (3.3.34)$$

όπου \mathbf{V} ένα χωρικό διανυσματικό πεδίο εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια Σ_t . Για ένα χωρικό 1-form ω η ταυτότητα Ricci γράφεται:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\omega_\alpha = -{}^{(3)}R^\sigma_{\alpha\mu\nu}\omega_\sigma = {}^{(3)}R^\sigma_{\alpha\nu\mu}\omega_\sigma \quad (3.3.35)$$

Εκ κατασκευής, ο 3D τανυστής Riemann ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες συμμετρίας με τον 4D τανυστή Riemann, συγκεκριμένα:

1. ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -{}^{(3)}R_{\alpha\beta\nu\mu}$
2. ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = -{}^{(3)}R_{\beta\alpha\mu\nu}$
3. ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R_{\mu\nu\alpha\beta}$
4. ${}^{(3)}R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$
5. $D_{[\lambda}{}^{(3)}R_{\alpha\beta]\nu\mu} = 0$

Πραγματοποιώντας συστολή (contraction) των δεικτών του 3D τανυστή Riemann με χρήση της χωρικής μετρικής γ , μπορούμε να πάρουμε τανυστές χαμηλότερης τάξης. Ειδικότερα, ορίζουμε:

- 3D τανυστής Ricci: ${}^{(3)}R_{\alpha\beta} = {}^{(3)}R^\sigma_{\alpha\sigma\beta} = \gamma^{\rho\sigma} {}^{(3)}R_{\rho\alpha\sigma\beta}$
- 3D βαθμωτό Ricci: ${}^{(3)}R = {}^{(3)}R^\alpha_{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta} {}^{(3)}R_{\alpha\beta}$

3.4 Εξωγενής Καμπυλότητα - Extrinsic Curvature

Η εξωγενής ή εξωτερική καμπυλότητα μιας $n - 1$ διάστατης πολλαπλότητας (εν προκειμένω μιας τρισδιάστατης υπερεπιφάνειας Σ) εμφανίζεται όταν αυτή εμβαπτίζεται σε χώρο διάστασης n (εδώ στον τετραδιάστατο χωρόχρονο). Η εξωγενής καμπυλότητα μιας υπερεπιφάνειας γίνεται αντιληπτή από παρατηρητές που βρίσκονται έξω από αυτήν οι οποίοι μπορούν να εξετάσουν το σχήμα που λαμβάνει η υπερεπιφάνεια μέσα στον χωρόχρονο όπου είναι ενσωματωμένη. Περιγράφεται μέσω του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας \mathbf{K} της Σ που ονομάζεται επίσης δεύτερη θεμελιώδης μορφή της υπερεπιφάνειας. Ο τανυστής \mathbf{K} περιέχει τις πληροφορίες για τον χωρόχρονο που ελλείπονται από τον 3D τανυστή Riemann, περιγράφει δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια συστρέφεται και "διπλώνεται" μέσα στον περιβάλλοντα τετραδιάστατο χωρόχρονο. Αυτό το "δίπλωμα" μιας υπερεπιφάνειας ποσοτικοποιείται από τη μεταβολή που υφίσταται το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στην υπερεπιφάνεια Σ όταν μεταφέρεται παράλληλα σε ένα γειτονικό σημείο της. Η απόκλιση του παράλληλα μεταφερόμενου κάθετου διανύσματος σε ένα σημείο από το πραγματικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο αυτό αποδίδεται στην ύπαρξη εξωτερικής καμπυλότητας και οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.8: Εξωγενής καμπυλότητα - Extrinsic curvature

Έστω Σ μια $n - 1$ διάστατη υπερεπιφάνεια εμβαπτισμένη σε μια n -διάστατη πολλαπλότητα M . Ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας (extrinsic curvature tensor) ή δεύτερη θεμελιώδης μορφή (second fundamental form) της Σ ορίζεται ως ο τανυστής τάξης $(0, 2)$:

$$\mathbf{K} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.4.1)$$

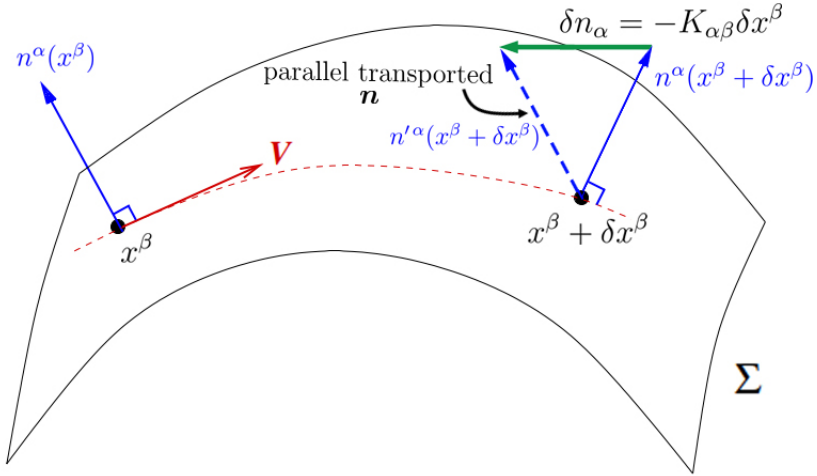
που δρα στα διανυσματικά πεδία \mathbf{V} και \mathbf{W} ως εξής:

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = -\mathbf{W}_{\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{V}_{\parallel}} \mathbf{n} = -P\mathbf{W} \cdot \nabla_{P\mathbf{V}} \mathbf{n} = -\gamma^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\nu}_{\beta} V^{\alpha} W^{\beta} \nabla_{\mu} n_{\nu} \quad (3.4.2)$$

όπου P ο χωρικός προβολικός τελεστής και \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη Σ . Οι συνιστώσες του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας, σύμφωνα με τον ορισμό (3.4.2), δίνονται από τη σχέση:

$$K_{\alpha\beta} \equiv -\gamma^{\mu}_{\alpha} \gamma^{\nu}_{\beta} \nabla_{\mu} n_{\nu} \quad (3.4.3)$$

όπου $\gamma^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} + n^{\mu} n_{\alpha}$ οι συνιστώσες του προβολικού τελεστή πάνω στην υπερεπιφάνεια Σ και n_{μ} οι συνιστώσες του κάθετου μοναδιαίου συνδιανύσματος στη Σ .



Σχήμα 3.4.1: Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού του τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας. Το κάθετο διάνυσμα n με συνιστώσες $n^\alpha(x^\beta)$ μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης του διανύσματος V από το σημείο x^β στο γειτονικό σημείο $x^\beta + \delta x^\beta$. Το κάθετο διάνυσμα στο $x^\beta + \delta x^\beta$ έχει συνιστώσες $n^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta)$ και η διαφορά του με το προκύπτον διάνυσμα $n'^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta)$ της παράλληλης μεταφοράς αποτελεί μέτρο της εξωτερικής καμπυλότητας της Σ , είναι δηλαδή ανάλογη του τανυστή K .

Η γνώση της εσωτερικής καμπυλότητας (χωρικός τανυστής Riemann ${}^{(3)}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ που υπολογίζεται από τη χωρική μετρική $\gamma_{\alpha\beta}$) σε συνδυασμό με την εξωτερική καμπυλότητα $K_{\alpha\beta}$ παρέχει πλήρη περιγραφή της καμπυλότητας του χωρόχρονου (δηλαδή του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$).

Εξ' ορισμού, ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας είναι συμμετρικός ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$) και πλήρως χωρικός ($n^\alpha K_{\alpha\beta} = n^\beta K_{\alpha\beta} = 0$).

- Η συμμετρικότητα προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &\equiv -\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = -\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu (-\alpha \nabla_\nu t) = \alpha \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu t + \gamma^\mu{}_\alpha \underbrace{\gamma^\nu{}_\beta \nabla_\nu t}_{=0} \nabla_\mu \alpha \\ &= \alpha \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu t \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $K_{\beta\alpha} = \alpha \gamma^\mu{}_\beta \gamma^\nu{}_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu t \stackrel{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \alpha \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\nu \nabla_\mu t = \alpha \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu t = K_{\alpha\beta}$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι της σύνδεσης Levi-Civita μετατίθενται όταν δρουν σε βαθμωτές συναρτήσεις: $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]t = 0$.

- Ο χωρικός χαρακτήρας του K προκύπτει εξετάζοντας τα contractions των δεικτών του με το κάθετο διάνυσμα:

$$\begin{aligned} n^\alpha K_{\alpha\beta} &= -n^\alpha \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = 0 \\ n^\beta K_{\alpha\beta} &= -n^\beta \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \nabla_\mu n_\nu = 0 \end{aligned}$$

Πέραν από τη σχέση (3.4.3) που δίνει τις συνιστώσες $K_{\alpha\beta}$ της εξωγενούς καμπυλότητας βάσει του ορισμού (3.4.2), υπάρχουν κι άλλες ισοδύναμες εκφράσεις του $K_{\alpha\beta}$, ειδικότερα:

Πρόταση 3.4: Ισοδύναμες εκφράσεις του $K_{\alpha\beta}$

Θεωρούμε τον τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας K με συνιστώσες που ορίζονται από τη σχέση $K_{\alpha\beta} \equiv -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \nabla_\mu n_\nu$. Οι πιο κάτω αποτελούν ισοδύναμες εκφράσεις του $K_{\alpha\beta}$:

1. $K_{\alpha\beta} = -\gamma^\mu_\alpha \nabla_\mu n_\beta$
2. $K_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha n_\beta - n_\alpha a_\beta$ όπου $a_\mu \equiv n^\nu \nabla_\nu n_\mu$
3. $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} L_n \gamma_{\alpha\beta}$

Απόδειξη:

1.

$$K_{\alpha\beta} \equiv -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \nabla_\mu n_\nu = -\gamma^\mu_\alpha (\delta^\nu_\beta + n^\nu n_\beta) \nabla_\mu n_\nu = -\gamma^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta \nabla_\mu n_\nu - \gamma^\mu_\alpha n_\beta \underbrace{n^\nu \nabla_\mu n_\nu}_{=0} = -\gamma^\mu_\alpha \nabla_\mu n_\beta$$

2.

$$K_{\alpha\beta} = -\gamma^\mu_\alpha \nabla_\mu n_\beta = -(\delta^\mu_\alpha + n^\mu n_\alpha) \nabla_\mu n_\beta = -\nabla_\alpha n_\beta - n_\alpha n^\mu \nabla_\mu n_\beta = -\nabla_\alpha n_\beta - n_\alpha a_\beta$$

3.

$$\begin{aligned} L_n \gamma_{\alpha\beta} &= n^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + \gamma_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu \\ &= n^\mu \nabla_\mu (g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta) + (g_{\mu\beta} + n_\mu n_\beta) \nabla_\alpha n^\mu + (g_{\alpha\mu} + n_\alpha n_\mu) \nabla_\beta n^\mu \\ &= n^\mu \nabla_\mu (n_\alpha n_\beta) + g_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + g_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu \\ &= n_\beta n^\mu \nabla_\mu n_\alpha + n_\alpha n^\mu \nabla_\mu n_\beta + \nabla_\alpha n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha \\ &= \underbrace{n_\beta a_\alpha}_{=0} + \underbrace{n_\alpha a_\beta}_{=0} + \nabla_\alpha n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha \\ &= -K_{\alpha\beta} - K_{\beta\alpha} \\ &= -2K_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Από φυσικής άποψης, η σχέση $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} L_n \gamma_{\alpha\beta}$ αναφέρει ότι η εξωτερική καμπυλότητα εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο "διπλώνεται" μια 3D υπερεπιφάνεια, υπό την έννοια ότι αλλάζει η εσωτερική της γεωμετρία, καθώς κινούμαστε στην κατεύθυνση κάθετη σ'αυτήν. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha n = t - \beta$, συμπεραίνουμε από την έκφραση $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} L_n \gamma_{\alpha\beta}$ ότι η εξωτερική καμπυλότητα συνδέεται με τη χρονική παράγωγο της χωρικής μετρικής.

Το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας ονομάζεται **μέση καμπυλότητα** (mean curvature) και ορίζεται:

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \quad (3.4.5)$$

Αναπτύσσοντας τη σχέση $g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$ γράφοντας $K_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha n_\beta - n_\alpha a_\beta$ λαμβάνουμε:

$$K = -\nabla_\alpha n^\alpha \quad (3.4.6)$$

Η φυσική σημασία του K είναι ότι αντιπροσωπεύει τον μέσο ρυθμό μεταβολής του κάθετου διανύσματος της Σ ως προς όλες τις διευθύνσεις, ή ισοδύναμα τον μέσο ρυθμό με τον οποίο η υπερεπιφάνεια "διπλώνεται" ή "κυρτώνεται" κατά την κάθετη διεύθυνση. Συγκεκριμένα, με τη σύμβαση προσήμου που επιλέξαμε για να ορίσουμε την εξωτερική καμπυλότητα, αν τοπικά ισχύει $K > 0$ τότε η Σ είναι κοίλη - concave και τα κάθετα διανύσματα συγκλίνουν το ένα προς το άλλο (οι γεωδαισιακές καμπύλες των κάθετων παρατηρητών εστιάζονται) ενώ αν τοπικά ισχύει $K < 0$ τότε η Σ είναι κυρτή - convex και τα κάθετα διανύσματα αποκλίνουν μεταξύ τους (οι γεωδαισιακές καμπύλες των κάθετων παρατηρητών απεστιάζονται).

Η συνθήκη $K = 0$ καλείται **μεγιστικός τεμαχισμός** (maximal slicing) διότι συνεπάγεται ότι η υπερεπιφάνεια Σ αποκτά μέγιστο (ιδιο)όγκο ως προς τους κάθετους παρατηρητές, σε σύγκριση με υπερεπιφάνειες ίδιου εμβαδού αλλά με $K \neq 0$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εξετάζοντας τη γεωμετρική ερμηνεία της μέσης καμπυλότητας:

$$K = \gamma^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} L_n \gamma_{\alpha\beta} \quad (3.4.7)$$

Η γνωστή σχέση $L_X \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} L_X g_{\mu\nu} = \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \nabla_\mu X_\nu$, όπου $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ δίνει την παράγωγο Lie της οριζουσας της μετρικής. Εξειδικεύοντας στην περίπτωση μιας χωροειδούς τρισδιάστατης υπερεπιφάνειας Σ_t της διαμέρισης, έχουμε $L_n \sqrt{\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} L_n \gamma_{\alpha\beta}$ με $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$. Συνεπώς:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} L_n \sqrt{\gamma} = -L_n \ln(\sqrt{\gamma}) \quad (3.4.8)$$

Η ποσότητα $\sqrt{\gamma} d^3x$ είναι το στοιχείο (ιδιο)όγκου της υπερεπιφάνειας Σ επομένως η μέση καμπυλότητα με ένα πρόσημο μείον εκφράζει τη μεταβολή στον όγκο της Σ όταν υποστεί μικρή παραμόρφωση στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος n . Μπορεί να δειχθεί ότι η μεταβολή στον όγκο που περικλείει η Σ εξαιτίας μιας μικρής μεταβολής κατά μήκος του n είναι ανάλογη προς ένα ολοκλήρωμα όγκου του K , άρα μηδενισμός του K οδηγεί σε ακρότατο (μέγιστο) όγκο.

3.5 Εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi και Ricci

Οι εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi και Ricci είναι χρήσιμες σχέσεις της διαφορικής γεωμετρίας οι οποίες συσχετίζουν τις προβολές του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ πάνω στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ και πάνω στο χωροειδές κάθετό της διάνυσμα n με χωρικά μεγέθη που ορίζονται στην υπερεπιφάνεια. Τέτοια μεγέθη είναι ο τρισδιάστατος τανυστής Riemann ${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ που περιγράφει την τρισδιάστατη εσωτερική γεωμετρία της υποπολλαπλότητας (Σ, γ) και ορίζεται από την επαγόμενη μετρική $\gamma_{\mu\nu}$ της Σ καθώς και η εξωγενής καμπυλότητα $K_{\mu\nu}$ της Σ μαζί με τις χωρικές συναλλοίωτες παραγώγους της.

Πρόταση 3.5: Εξίσωση Gauss-Codazzi

Η πλήρης προβολή στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ δίνεται από την εξίσωση Gauss γνωστή και ως Gauss-Codazzi:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} \quad (3.5.1)$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι για ένα καθαρά χωρικό διάνυσμα V (διάνυσμα εφαπτόμενο στη Σ) ισχύει:

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - K_{\alpha\beta} \gamma^\gamma_\rho n^\mu \nabla_\mu V^\rho - K_\alpha^\gamma K_{\beta\rho} V^\rho \quad (3.5.2)$$

Χρειαζόμαστε δηλαδή τη χωρική παράγωγο του $(1, 1)$ τανυστή $D_\beta V^\gamma$ η οποία ορίζεται:

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta V^\gamma &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu (D_\nu V^\rho) \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu (\gamma^\lambda_\nu \gamma^\sigma_\rho \nabla_\lambda V^\sigma) \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\lambda_\nu \gamma^\sigma_\rho \nabla_\mu \nabla_\lambda V^\sigma + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\rho \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu (\gamma^\lambda_\nu) + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\lambda_\nu \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu (\gamma^\sigma_\rho) \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\lambda V^\rho + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\rho \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu (\delta^\lambda_\nu + n^\lambda n_\nu) + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\lambda_\nu \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu (\delta^\sigma_\rho + n^\sigma n_\rho) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

- $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\rho \nabla_\lambda V^\sigma (n_\nu \nabla_\mu n^\lambda + n^\lambda \nabla_\mu n_\nu) \stackrel{\gamma^\nu_\beta n_\nu = 0}{=} \underbrace{\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma n^\lambda \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu n_\nu}_{=0} = -K_{\alpha\beta} \gamma^\rho_\gamma n^\lambda \nabla_\lambda V^\sigma$
- $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\lambda_\nu \nabla_\lambda V^\sigma (n_\kappa \nabla_\mu n^\rho + n^\rho \nabla_\mu n_\kappa) \stackrel{\gamma^\rho n^\rho = 0}{=} \underbrace{\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\lambda_\nu n_\kappa \nabla_\lambda V^\sigma \nabla_\mu n^\rho}_{=0} = -K_\alpha^\gamma \gamma^\lambda_\beta n_\kappa \nabla_\lambda V^\sigma$
 $= K_\alpha^\gamma \underbrace{\gamma^\lambda_\beta V^\sigma \nabla_\lambda n_\kappa}_{=0}$
 $= -K_\alpha^\gamma K_{\beta\kappa} V^\sigma$

Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα για τον δεύτερο και τρίτο όρο της (3.5.3) παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\lambda V^\rho - K_{\alpha\beta} \gamma^\gamma_\rho n^\lambda \nabla_\lambda V^\rho - K_\alpha^\gamma K_{\beta\kappa} V^\kappa \quad (3.5.4)$$

Εξ' ορισμού τώρα, ο τρισδιάστατος τανυστής Riemann μετράει τη μη-μεταθετικότητα των χωρικών συναλλοίωτων παραγώγων όταν δρουν σε ένα χωρικό διάνυσμα, δηλαδή:

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma - D_\beta D_\alpha V^\gamma \equiv {}^{(3)}R^\gamma_{\delta\alpha\beta} V^\delta \quad (3.5.5)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.5.4) για να αναπτύξουμε τις χωρικές συναλλοίωτες παραγώγους έχουμε:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R^\gamma_{\delta\alpha\beta} V^\delta &\equiv D_\alpha D_\beta V^\gamma - D_\beta D_\alpha V^\gamma = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\lambda V^\rho - K_{\alpha\beta} \gamma^\gamma_\rho n^\lambda \nabla_\lambda V^\rho - K_\alpha^\gamma K_{\beta\kappa} V^\kappa \\ &\quad - \gamma^\mu_\beta \gamma^\lambda_\alpha \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\lambda V^\rho + K_{\beta\alpha} \gamma^\gamma_\rho n^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + K_\beta^\gamma K_{\alpha\kappa} V^\kappa \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma (\nabla_\mu \nabla_\lambda V^\rho - \nabla_\lambda \nabla_\mu V^\rho) - K_\alpha^\gamma K_{\beta\kappa} V^\kappa + K_\beta^\gamma K_{\alpha\kappa} V^\kappa \\ &\stackrel{2.11.5}{=} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \underbrace{{}^{(4)}R^\sigma_{\mu\lambda}}_{\gamma^\sigma_\delta V^\delta} - K_\alpha^\gamma K_{\beta\delta} V^\delta + K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} V^\delta \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} V^\delta - K_\alpha^\gamma K_{\beta\delta} V^\delta + K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} V^\delta \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\rho_\gamma \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} V^\delta - K_\alpha^\gamma K_{\beta\delta} V^\delta + K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta} V^\delta = {}^{(3)}R^\gamma_{\delta\alpha\beta} V^\delta \quad (3.5.6)$$

Εφόσον η πιο πάνω σχέση ισχύει για αυθαίρετο V^δ παίρνουμε τελικά:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\gamma_\kappa \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} = {}^{(3)}R^\gamma_{\delta\alpha\beta} + K_\alpha{}^\gamma K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\gamma K_{\alpha\delta} \quad (3.5.7)$$

Αυτή είναι η **εξίσωση Gauss-Codazzi**. Είναι βολικότερο να εκφράσουμε τους εμπλεκόμενους τανυστές με όλους τους δείκτες κάτω και αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την (3.5.7) με $g_{\gamma\kappa}$:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\gamma_\kappa \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R_{\gamma\sigma\mu\lambda} = {}^{(3)}R_{\kappa\delta\alpha\beta} + K_{\alpha\kappa} K_{\beta\delta} - K_{\beta\kappa} K_{\alpha\delta} \quad (3.5.8)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες συμμετρίας του τανυστή Riemann (συμμετρία στην εναλλαγή του πρώτου ζεύγους δεικτών με το δεύτερο) και μετονομάζοντας ορισμένους δείκτες παίρνουμε την εξίσωση Gauss-Codazzi όπως είναι γραμμένη στην (3.5.1).

Πρόταση 3.6: Εξίσωση Codazzi-Mainardi

Η προβολή στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ της συστολής του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ με το κάθετο διάνυσμα n^α δίνεται από την εξίσωση Codazzi γνωστή και ως Codazzi-Mainardi:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = D_\beta K_{\alpha\gamma} - D_\alpha K_{\beta\gamma} \quad (3.5.9)$$

Απόδειξη:

Η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας είναι:

$$D_\alpha K_{\beta\gamma} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu K_{\nu\rho} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu (-\nabla_\nu n_\rho - n_\nu a_\rho) \quad (3.5.10)$$

όπου $a_\mu \equiv n^\nu \nabla_\nu n_\mu$ η συναλλοίωτη επιτάχυνση του Eulerian/normal observer, ο οποίος κινείται στην ολοκληρωτική καμπύλη του κάθετου διανύσματος n στις υπερεπιφάνειες. Υπενθυμίζουμε ότι η επιτάχυνση αυτή είναι ένα καθαρά χωρικό διάνυσμα διότι $a_\mu n^\mu = 0$.

$$\begin{aligned} D_\alpha K_{\beta\gamma} &= -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho - \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma a_\rho \nabla_\mu n_\nu - \underbrace{\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma n_\nu}_{=0} \nabla_\mu a_\rho \\ &= -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho - \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta a_\gamma \nabla_\mu n_\nu \\ &= -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho + a_\gamma K_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο χωρικών παραγώγων:

$$\begin{aligned} D_\beta K_{\alpha\gamma} - D_\alpha K_{\beta\gamma} &= -\gamma^\mu_\beta \gamma^\nu_\alpha \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho + a_\gamma K_{\beta\alpha} + \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma \nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho - a_\gamma K_{\alpha\beta} \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma (\nabla_\mu \nabla_\nu n_\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu n_\rho) \\ &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma {}^{(4)}R_{\rho\sigma\mu\nu} n^\sigma \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του τετραδιάστατου τανυστή Riemann για 1-forms, ο οποίος συνεπάγεται: $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \omega_\lambda = -{}^{(4)}R^\kappa_{\lambda\mu\nu} \omega_\kappa = -g^{\sigma\kappa} {}^{(4)}R_{\sigma\lambda\mu\nu} \omega_\kappa = {}^{(4)}R_{\lambda\sigma\mu\nu} \omega^\sigma$. Εναλλάσσοντας το πρώτο ζεύγος δεικτών του τανυστή Riemann με το δεύτερο καταλήγουμε στην εξίσωση Codazzi-Mainardi:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\rho_\gamma n^\sigma {}^{(4)}R_{\rho\sigma\mu\nu} = D_\beta K_{\alpha\gamma} - D_\alpha K_{\beta\gamma} \quad (3.5.11)$$

Πρόταση 3.7: Εξίσωση Ricci

Η προβολή στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ της διπλής συστολής του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ με το κάθετο διάνυσμα n^α δίνεται από την εξίσωση Ricci:

$$\gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = L_n K_{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + K_{\beta\rho} K_\alpha{}^\rho \quad (3.5.12)$$

όπου $\alpha > 0$ το lapse function.

Απόδειξη:

Η προβολή δύο δεικτών του τανυστή Riemann στην κάθετη διεύθυνση στις υπερεπιφάνειες (άξονας χρόνου) μας προϊδεάζει ότι το ανάπτυγμα θα περιλαμβάνει κάποια "χρονική" παράγωγο της εξωγενούς καμπυλότητας και ειδικότερα την παράγωγο Lie στην "χρονοειδή" κατεύθυνση του διανύσματος n .

$$\begin{aligned} L_n K_{\alpha\beta} &= n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + K_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu \\ &= n^\mu \nabla_\mu (-\nabla_\alpha n_\beta - n_\alpha a_\beta) + K_{\mu\beta} (-K_\alpha{}^\mu - n_\alpha a^\mu) + K_{\alpha\mu} (-K_\beta{}^\mu - n_\beta a^\mu) \\ &= -n^\mu \nabla_\mu \nabla_\alpha n_\beta - n^\mu a_\beta \nabla_\mu n_\alpha - n^\mu n_\alpha \nabla_\mu a_\beta - K_{\mu\beta} K_\alpha{}^\mu - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\mu - K_{\mu\beta} n_\alpha a^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta a^\mu \\ &= -n^\mu \nabla_\mu \nabla_\alpha n_\beta - a_\alpha a_\beta - n^\mu n_\alpha \nabla_\mu a_\beta - K_{\mu\beta} K_\alpha{}^\mu - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\mu - K_{\mu\beta} n_\alpha a^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta a^\mu \end{aligned}$$

Στη θέση του πρώτου όρου αντικαθιστούμε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή Riemann:

$$\begin{aligned} n^\mu \nabla_\mu \nabla_\alpha n_\beta &= n^\mu (\nabla_\alpha \nabla_\mu n_\beta + {}^{(4)}R_{\beta\sigma\mu\alpha} n^\sigma) \\ &= n^\mu \nabla_\alpha \nabla_\mu n_\beta + n^\mu n^\sigma {}^{(4)}R_{\beta\sigma\mu\alpha} \\ &= \nabla_\alpha (n^\mu \nabla_\mu n_\beta) - (\nabla_\alpha n^\mu) (\nabla_\mu n_\beta) - n^\mu n^\sigma {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} \\ &= \nabla_\alpha a_\beta - (\nabla_\alpha n^\mu) (\nabla_\mu n_\beta) - n^\mu n^\sigma {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} \end{aligned}$$

όπου $(\nabla_\alpha n^\mu) (\nabla_\mu n_\beta) = (-K_\alpha{}^\mu - n_\alpha a^\mu) (-K_{\mu\beta} - n_\mu a_\beta) = K_{\mu\beta} K_\alpha{}^\mu + n_\alpha a^\mu K_{\mu\beta}$.

Με αυτή την αντικατάσταση απαλείφονται οι όροι που περιέχουν $K_{\mu\beta}$ οπότε έχουμε:

$$L_n K_{\alpha\beta} = n^\mu n^\sigma {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} - \nabla_\alpha a_\beta - a_\alpha a_\beta - n^\mu n_\alpha \nabla_\mu a_\beta - K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\mu - K_{\alpha\mu} n_\beta a^\mu$$

Ο τανυστής $L_n K_{\alpha\beta}$ είναι πλήρως χωρικός, καθότι ο $K_{\alpha\beta}$ είναι πλήρως χωρικός. Η απόδειξη παρατίθεται στο [παράρτημα Α](#). Άρα η δράση του προβολικού τελεστή στο $L_n K_{\alpha\beta}$ το αφήνει αναλλοίωτο. Πολλαπλασιάζοντας με $\gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta$ την πιο πάνω σχέση παρατηρούμε ότι ο τέταρτος και ο τελευταίος όρος μηδενίζονται ενώ οι υπόλοιποι όροι γράφονται:

$$\begin{aligned} L_n K_{\gamma\delta} &= n^\mu n^\sigma \gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} - \gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta \nabla_\alpha a_\beta - \gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta a_\alpha a_\beta - \gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta K_{\alpha\mu} K_\beta{}^\mu \\ &= n^\mu n^\sigma \gamma^\alpha_\gamma \gamma^\beta_\delta {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} - D_\gamma a_\delta - a_\gamma a_\delta - K_{\gamma\mu} K_\delta{}^\mu \end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα είναι να εκφράσουμε τον όρο $D_\gamma a_\delta + a_\gamma a_\delta$ συναρτήσει του lapse α . Αυτό καθίσταται

εφικτό μέσω της σχέσης $a_\mu = D_\mu \ln \alpha = \frac{D_\mu \alpha}{\alpha}$. Κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} D_\gamma a_\delta + a_\gamma a_\delta &= D_\gamma \left(\frac{D_\delta \alpha}{\alpha} \right) + \frac{D_\gamma \alpha}{\alpha} \frac{D_\delta \alpha}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} D_\gamma D_\delta \alpha - \frac{1}{\alpha^2} D_\gamma \alpha D_\delta \alpha + \frac{D_\gamma \alpha}{\alpha} \frac{D_\delta \alpha}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} D_\gamma D_\delta \alpha \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς τον τανυστή Riemann έχουμε τελικά τη ζητούμενη εξίσωση Ricci:

$$\gamma^\beta_\delta n^\sigma \gamma^\alpha_\gamma n^\mu {}^{(4)}R_{\beta\sigma\alpha\mu} = L_n K_{\gamma\delta} + \frac{1}{\alpha} D_\gamma D_\delta \alpha + K_{\gamma\mu} K_\delta{}^\mu \quad (3.5.13)$$

3.5.1 Συστολές των εξισώσεων Gauss-Codazzi & Codazzi-Mainardi - Contracted Gauss-Codazzi & Codazzi-Mainardi equations

Οι συστολές των εξισώσεων Gauss-Codazzi και Codazzi-Mainardi είναι απαραίτητες διότι σε συνδυασμό τις εξισώσεις πεδίου του Einstein οδηγούν στις εξισώσεις των περιορισμών (constraints) αλλά και στις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης των δυναμικών μεταβλητών $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Πρόταση 3.8: Συστολές εξίσωσης Gauss-Codazzi

(i) Η συστολή της εξίσωσης Gauss-Codazzi με τη χωρική μετρική δίνει τη συνεσταλαμμένη εξίσωση Gauss (contracted Gauss equation):

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma^\mu_\alpha n^\rho \gamma^\nu_\beta n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma \quad (3.5.14)$$

(ii) Η διπλή συστολή της εξίσωσης Gauss-Codazzi με τη χωρική μετρική δίνει τη βαθμωτή εξίσωση Gauss (scalar Gauss equation) που αποτελεί γενίκευση του περίφημου "Theorema Egregium":

$${}^{(4)}R + 2n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (3.5.15)$$

Απόδειξη:

(i) Πολλαπλασιάζουμε την Gauss-Codazzi $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\gamma_\kappa \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} = {}^{(3)}R^\gamma_{\delta\alpha\beta} + K_\alpha{}^\gamma K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\gamma K_{\alpha\delta}$ με τον τελεστή προβολής γ^α_γ οπότε:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta \gamma^\kappa_\sigma {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} &= {}^{(3)}R^\alpha_{\delta\alpha\beta} + K_\alpha{}^\alpha K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\delta} \\ \gamma^\mu_\kappa \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + K K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\delta} \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε τον προβολικό τελεστή $\gamma^\mu_\kappa = \delta^\mu_\kappa + n^\mu n_\kappa$ έτσι:

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\mu_{\sigma\mu\lambda} + \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta n^\mu n_\kappa {}^{(4)}R^\kappa_{\sigma\mu\lambda} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + K K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\delta} \\ \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R_{\sigma\lambda} + \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta n^\mu n_\kappa {}^{(4)}R_{\kappa\sigma\mu\lambda} &= {}^{(3)}R_{\delta\beta} + K K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\delta} \\ \gamma^\lambda_\beta \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R_{\lambda\sigma} + \gamma^\lambda_\beta n^\mu \gamma^\sigma_\delta n^\kappa {}^{(4)}R_{\lambda\mu\sigma\kappa} &= {}^{(3)}R_{\beta\delta} + K K_{\beta\delta} - K_\beta{}^\alpha K_{\alpha\delta} \end{aligned}$$

Η πιο πάνω εξίσωση αποτελεί τη ζητούμενη συνεσταλμένη εξίσωση Gauss. Να σημειώσουμε ότι εκτός από τη μορφή (3.5.14) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\gamma^{\rho\sigma}\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta{}^{(4)}R_{\rho\mu\sigma\nu} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma}K_\beta{}^\gamma \quad (3.5.16)$$

(ii) Πολλαπλασιάζουμε την συνεσταλμένη εξίσωση Gauss $\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta{}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma^\mu_\alpha n^\rho\gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma}K_\beta{}^\gamma$ με $\gamma^{\alpha\beta}$ οπότε:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\beta}\gamma^\nu_\beta{}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma^{\mu\beta}n^\rho\gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} &= {}^{(3)}R^\alpha_\alpha + K\gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma}K^{\alpha\gamma} \\ \gamma^{\mu\nu}{}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} &= {}^{(3)}R + K \cdot K - K_{\alpha\gamma}K^{\alpha\gamma} \\ (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu){}^{(4)}R_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu)n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{\alpha\gamma}K^{\alpha\gamma} \\ {}^{(4)}R + n^\mu n^\nu{}^{(4)}R_{\mu\nu} + n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\rho\sigma} + \underbrace{n^\mu n^\nu n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma}}_0 &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{\alpha\gamma}K^{\alpha\gamma} \\ {}^{(4)}R + 2n^\mu n^\nu{}^{(4)}R_{\mu\nu} &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{\alpha\gamma}K^{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρικότητα του ${}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma}$ (π.χ στην εναλλαγή $\mu \leftrightarrow \rho$) και τη συμμετρικότητα του όρου $n^\mu n^\nu n^\rho n^\sigma$ για να δείξουμε ότι η συστολή $n^\mu n^\nu n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0$.

Πρόταση 3.9: Συστολή εξίσωσης Codazzi-Mainardi

Η συστολή της εξίσωσης Codazzi-Mainardi με τη χωρική μετρική δίνει τη συνεσταλμένη εξίσωση Codazzi-Mainardi (contracted Codazzi-Mainardi equation):

$$\gamma^\mu_\alpha n^\nu{}^{(4)}R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha{}^\mu \quad (3.5.17)$$

Απόδειξη:

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Codazzi-Mainardi $\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta\gamma^\rho_\gamma n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = D_\beta K_{\alpha\gamma} - D_\alpha K_{\beta\gamma}$ με $\gamma^{\alpha\gamma}$ επομένως:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta\gamma^\rho_\alpha n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \gamma^{\alpha\gamma}D_\beta K_{\alpha\gamma} - \gamma^{\alpha\gamma}D_\alpha K_{\beta\gamma} \\ \gamma^{\mu\rho}\gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= D_\beta(\gamma^{\alpha\gamma}K_{\alpha\gamma}) - D_\alpha(\gamma^{\alpha\gamma}K_{\beta\gamma}) \\ (g^{\mu\rho} + n^\mu n^\rho)\gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= D_\beta K - D_\alpha K_\beta{}^\alpha \\ \gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\nu\sigma} + \gamma^\nu_\beta \underbrace{n^\mu n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}}_0 &= D_\beta K - D_\alpha K_\beta{}^\alpha \\ \gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^{(4)}R_{\nu\sigma} &= D_\beta K - D_\alpha K_\beta{}^\alpha \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη συμβατότητα της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου και στην προτελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρικότητα του ${}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ στην εναλλαγή $\rho \leftrightarrow \sigma$ με τη συμμετρικότητα του όρου $n^\mu n^\rho n^\sigma$ για να δείξουμε ότι η συστολή $n^\mu n^\rho n^\sigma{}^{(4)}R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0$.

4

Εξισώσεις Einstein σε μορφή 3+1

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε αποκλειστικά με τη διαμέριση $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ του χωρόχρονου και τον τρόπο με τον οποίο περιγράφουμε την εσωτερική και εξωτερική γεωμετρία μιας υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου που αποτελεί κομμάτι της διαμέρισης. Οι σχέσεις που εξάγαμε έως τώρα είναι καθαρά γεωμετρικές, χωρίς αναφορά στη δυναμική του χωρόχρονου, δηλαδή στις εξισώσεις πεδίου του Einstein, που καθορίζουν τη γεωμετρία (τη μετρική g) του χωρόχρονου (M, g) και κατά συνέπεια τη χρονική εξέλιξη των υπερεπιφανειών. Έχοντας ολοκληρώσει την ανάλυση του χωρόχρονου από γεωμετρικής άποψης, στρεφόμαστε τώρα στη δυναμική του.

4.1 Εξισώσεις Einstein ως πρόβλημα Cauchy - Einstein's equations as a Cauchy problem

Κατ' αρχήν, είναι σκόπιμο να επιβεβαιώσουμε ότι οι εξισώσεις πεδίου του Einstein μπορούν πράγματι να διατυπωθούν ως ένα πρόβλημα Cauchy, δηλαδή ως ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα αρχικών τιμών. Ως γνωστόν, δεδομένου ενός συστήματος συντεταγμένων, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein συνιστούν ένα σύστημα 10 συζευγμένων μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ως προς τις συνιστώσες $g_{\alpha\beta}$ της μετρικής. Αναμένουμε ότι το σύστημα αυτό είναι τοπικά καλά τοποθετημένο με την υπόθεση ότι ο χωρόχρονος είναι καθολικά υπερβολικός.

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (4.1.1)$$

Όπως προαναφέρθηκε, οι εξισώσεις πεδίου γραμμένες σε συναλλοίωτη μορφή όπως πιο πάνω, είναι μεν κομψές εντούτοις δεν προσφέρονται για αριθμητική ολοκλήρωση μιας και δεν υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα στον χώρο και στον χρόνο. Γι' αυτό άλλωστε προχωρήσαμε στον 3+1 διαχωρισμό του χωρόχρονου σε χρόνο t και μια οικογένεια τρισδιάστατων χωροειδών επιφανειών Σ_t (χώρο), αναδεικνύοντας το σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) ως το σύστημα προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Με αυτή τη διαμέριση και αυτό το σύστημα συντεταγμένων είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, προσδιορίζοντας αρχικά δεδομένα $g_{\alpha\beta}|_{t_0}$ και $\partial_t g_{\alpha\beta}|_{t_0}$ σε μια αρχική χρονική στιγμή t_0 ή ισοδύναμα σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} και εξελίσσοντας τις στον χρόνο μέσω εκείνων των εξισώσεων Einstein που περιέχουν όρους $\partial_{tt} g_{\alpha\beta}$. Προκύπτει ότι δεν περιέχουν όλες οι εξισώσεις του συστήματος δεύτερες παραγώγους της μετρικής, μιας και οι συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi $\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0$ δίνουν:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0 &\Leftrightarrow \partial_\beta G^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha G^{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\beta G^{\alpha\lambda} = 0 \\ \partial_t G^{\alpha 0} + \partial_i G^{\alpha i} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha G^{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\beta G^{\alpha\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\partial_t G^{\alpha 0} = \underbrace{-\partial_i G^{\alpha i} - \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha G^{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^\beta G^{\alpha\lambda}}_{\text{μέχρι } \partial_{tt} g} \quad (4.1.2)$$

Στο δεξί μέλος της πιο πάνω σχέσης εμφανίζονται χρονικές παράγωγοι της μετρικής μέχρι και δεύτερης τάξης, πράγμα που σημαίνει ότι οι 4 ποσότητες $G^{\alpha 0}$ περιέχουν παραγώγους μέχρι και πρώτης τάξης. Συνεπώς οι κάτωθι 4 εξισώσεις:

$$G^{\alpha 0} = 8\pi T^{\alpha 0} \quad (4.1.3)$$

από τις συνολικά 10 εξισώσεις του συστήματος, δεν φέρουν πληροφορίες για τη χρονική εξέλιξη της μετρικής αφού δεν περιλαμβάνουν δεύτερες παραγώγους της μετρικής. Κατ' ακρίβεια, οι 4 εξισώσεις $G^{\alpha 0} = 8\pi T^{\alpha 0}$ είναι εξισώσεις που συνδέουν τη μετρική και τη χρονική της παράγωγο σε μια δεδομένη υπερεπιφάνεια με τις πηγές ύλης και ενέργειας στον χωρόχρονο και πρέπει να ικανοποιούνται από τις μεταβλητές $g_{\alpha\beta}$ και $\partial_t g_{\alpha\beta}$ σε κάθε χρονική στιγμή (σε κάθε υπερεπιφάνεια). Γι' αυτό ονομάζονται περιορισμοί (constraints). Η δυναμική εξέλιξη της μετρικής δίνεται λοιπόν από τις εναπομείνουσες 6 εξισώσεις:

$$G^{ij} = 8\pi T^{ij} \quad (4.1.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι 6 εξισώσεις της χρονικής εξέλιξης δεν επαρκούν για να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο τη μετρική. Χρειάζεται επιπλέον να καθορίσουμε (κατά βούληση) 4 εξισώσεις βαθμίδος μέσω μιας συνθήκης βαθμίδος, οι οποίες ισοδυναμούν στον 3+1 φορμαλισμό με την επιλογή διαμέρισης για τον 3+1 χωρόχρονο. Αυτό απορρέει από την ελευθερία επιλογής συντεταγμένων/βαθμίδας που αποτελεί εγγενές στοιχείο της γενικής σχετικότητας.

Πρόταση 4.1: Διατήρηση των περιορισμών κάτω από τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης

Έστω Σ_{t_0} μια υπερεπιφάνεια Cauchy του καθολικά υπερβολικού χωρόχρονου (M, g) . Αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} της διαμέρισης, δηλαδή σε μια αρχική χρονική στιγμή t_0 , τότε οι συνεσταλμένες εξισώσεις Bianchi εγγυώνται ότι θα ικανοποιούνται σε κάθε υπερεπιφάνεια - κάθε χρονική στιγμή δεδομένου ότι η χρονική εξέλιξη πραγματοποιείται από τις εξισώσεις $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$.

Απόδειξη:

Έστω ότι οι μεταβλητές $g_{\alpha\beta}$ και $\partial_t g_{\alpha\beta}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις των περιορισμών σε μια αρχική χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} . Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{C}^\alpha(t = t_0) = 0$ όπου $\mathcal{C}^\alpha \equiv G^{\alpha 0} - 8\pi T^{\alpha 0}$. Οι συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi ($\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0$) και η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής ($\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$) δίνουν, κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta (G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta}) &= 0 \\ \partial_\beta (G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha (G^{\lambda\beta} - 8\pi T^{\lambda\beta}) + \Gamma_{\beta\lambda}^\beta (G^{\alpha\lambda} - 8\pi T^{\alpha\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$\partial_t (G^{\alpha 0} - 8\pi T^{\alpha 0}) = -\partial_i (G^{\alpha i} - 8\pi T^{\alpha i}) - \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha (G^{\lambda\beta} - 8\pi T^{\lambda\beta}) - \Gamma_{\beta\lambda}^\beta (G^{\alpha\lambda} - 8\pi T^{\alpha\lambda})$$

Στο δεξί μέλος εμφανίζονται όροι ανάλογοι στα constraints και στις εξισώσεις Einstein. Συγκεκριμένα τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε παντού στην Σ_{t_0} ότι $G^{\alpha i} - 8\pi T^{\alpha i} = 0$ διότι αν $\alpha = 0$ τότε η παράσταση αυτή μηδενίζεται λόγω του ότι τα constraints ικανοποιούνται για $t = t_0$ ενώ για $\alpha = j$ η παράσταση αυτή μηδενίζεται αφού οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$ ικανοποιούνται πάντοτε.

Επίσης μηδενίζονται και οι όροι που εμπεριέχουν τα σύμβολα Christoffel αφού $G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta} = 0$ από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, οι οποίες προφανώς ισχύουν δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί και εφαρμόζονται οι δυναμικές εξισώσεις χρονικής εξέλιξης. Συνολικά λοιπόν:

$$\partial_t(G^{\alpha 0} - 8\pi T^{\alpha 0}) = 0 \Leftrightarrow \partial_t \mathcal{C}^\alpha = 0$$

Αφού $\mathcal{C}^\alpha(t = t_0) = 0$ και $\partial_t \mathcal{C}^\alpha|_{t=t_0} = 0$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{C}^\alpha(t) = 0$ σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται από τα αρχικά δεδομένα που ορίζονται στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} , θα ικανοποιούνται σε κάθε επόμενη υπερεπιφάνεια Σ_t η οποία προκύπτει ως λύση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης.

4.2 Πρόβλημα Cauchy στον 3+1 φορμαλισμό - Cauchy problem in the 3+1 formalism

Ο λόγος για τον οποίο εισάγαμε τον 3+1 φορμαλισμό της γενικής σχετικότητας είναι ότι στα πλαίσια του φορμαλισμού αυτού είναι βολικότερο να διατυπώσουμε και να επιλύσουμε το πρόβλημα Cauchy στον υπολογιστή, αποκτώντας παράλληλα μια καλύτερη γεωμετρική εικόνα για τη χρονική εξέλιξη μιας υπερεπιφάνειας. Στον φορμαλισμό 3+1 αντί της μετρικής $g_{\alpha\beta}$ του χωρόχρονου και της χρονικής παραγώγου της $\partial_t g_{\alpha\beta}$, τον ρόλο των δυναμικών μεταβλητών διαδραματίζει το ζεύγος $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$. Κατ' ακρίβεια, όταν αναφερόμαστε σε χρονική εξέλιξη μιας υπερεπιφάνειας Σ_{t_0} ώστε να πάρουμε τις υπερεπιφάνειες $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}, \dots$ σε ύστερους χρόνους, εννοούμε ότι πραγματοποιούμε χρονική εξέλιξη της εσωτερικής γεωμετρίας $\gamma_{\alpha\beta}|_{\Sigma_{t_0}}$ και της εξωτερικής καμπυλότητας $K_{\alpha\beta}|_{\Sigma_{t_0}}$ της αρχικής υπερεπιφάνειας Σ_{t_0} , η οποία θα δώσει τα αντίστοιχα μεγέθη $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ σε κάθε επόμενη υπερεπιφάνεια. Κατ' αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε τη διαμέριση $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ και εφόσον γνωρίζουμε την πλήρη γεωμετρία κάθε υπερεπιφάνειας, τις "υφαίνουμε" μαζί κατά τη διεύθυνση των γραμμών του χρόνου ($x^i = const.$) ώστε να δημιουργήσουμε όλο τον υπό μελέτη χωρόχρονο (M, g) .

Πέραν από τις δυναμικές μεταβλητές $\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ πρέπει επιπλέον να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση του lapse α και τις συνιστώσες του shift vector β προκειμένου να ανακατασκευάσουμε την πλήρη μετρική $g_{\alpha\beta}$ του χωρόχρονου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το lapse και το shift vector σχετίζονται με την επιλογή συντεταγμένων (coordinate freedom/gauge freedom), η επιλογή τους είναι αυθαίρετη και ισοδυναμεί με την επιλογή συνθηκών βαθμίδος, γι' αυτό ονομάζονται **συναρτήσεις βαθμίδος** (gauge functions). Υιοθετώντας το σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση, είναι εύκολο να δούμε πως οι συναρτήσεις (α, β^i) καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο εκτελούμε τη διαμέριση, αφού το lapse μετράει τον ιδιόχρονο μεταξύ γειτονικών υπερεπιφανειών και το shift παριστάνει τον τρόπο με τον οποίο οι χωρικές συντεταγμένες x^i μεταφέρονται από μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη (κατά την κάθετη διεύθυνση).

Από την άλλη, οι δυναμικές μεταβλητές $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ κάθε υπερεπιφάνειας Σ_t της διαμέρισης δεν είναι αυθαίρετες αλλά πρέπει να εναρμονιστούν με τη γεωμετρία του χωρόχρονου όπως αυτή επιβάλλεται από την κατανομή ύλης και ενέργειας που περιέχει ο εν λόγω χωρόχρονος. Δηλαδή όλες οι υπερεπιφάνειες Σ_t οφείλουν να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες-περιορισμούς που αφορούν τις μεταβλητές $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ που τις περιγράφουν, ώστε να ενσωματωθούν (να "χωρέσουν") στον χωρόχρονο (M, g) . Όπως είναι αναμενόμενο, οι περιορισμοί που αφορούν τις μεταβλητές $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ απορρέουν άμεσα από τις 4 εξισώσεις $G^{\alpha 0} = 8\pi T^{\alpha 0}$ και είναι προφανώς ισάριθμοι μ' αυτές. Κατ' ακρίβεια, στη γλώσσα του 3+1 φορμαλισμού, οι περιορισμοί αντιστοιχούν στις 4 εξισώσεις $(G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})n^\beta = 0$. Προβλέπουμε

δηλαδή ότι υπάρχουν 4 εξισώσεις περιορισμού για τις μεταβλητές $\gamma_{\alpha\beta}$ και $K_{\alpha\beta}$, που δεν περιέχουν χρονικές παραγώγους τους και περιλαμβάνουν όρους οι οποίοι σχετίζονται με το ενεργειακό/υλικό περιεχόμενο του χωρόχρονου. Επιπρόσθετα, οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης των (γ_{ij}, K_{ij}) απορρέουν από τις 6 εξισώσεις $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$ και αναμένουμε να είναι 12 στον αριθμό (6 για γ_{ij} + 6 για K_{ij}). Αυτό συμβαίνει διότι στον 3+1 φορμαλισμό μετασχηματίζουμε κάθε εξίσωση με δεύτερες χρονικές παραγώγους της μετρικής σε ένα συζευγμένο σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων, όπου η μία αφορά την πρώτη χρονική παράγωγο της χωρικής μετρικής (κινηματική εξίσωση - συνδέει τη χρονική παράγωγο της $\gamma_{\alpha\beta}$ με την εξωτερική καμπυλότητα $K_{\alpha\beta}$) και η άλλη αφορά την πρώτη χρονική παράγωγο της εξωτερικής καμπυλότητας (δυναμική εξίσωση). Αυτό άλλωστε είναι μια συνηθισμένη πρακτική στην υπολογιστική φυσική, όπου είναι προτιμότερο να ανάγουμε ένα σύστημα από διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης $d^2\vec{x}/dt^2 = \vec{F}(t, \vec{x}, d\vec{x}/dt)$ ως προς κάποιες συναρτήσεις $\vec{x}(t)$ σε ένα σύστημα από διπλάσιο αριθμό εξισώσεων πρώτου βαθμού ($d\vec{x}/dt = \vec{v} \rightarrow$ κινηματική & $d\vec{v}/dt = \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \rightarrow$ δυναμική).

Συνοπτικά, οι εξισώσεις των περιορισμών και της χρονικής εξέλιξης στον 3+1 φορμαλισμό είναι εντελώς ισοδύναμες με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein αλλά αφορούν τα χωρικά μεγέθη $\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$. Προκειμένου να ανασχηματίσουμε τις εξισώσεις Einstein ώστε να γραφούν σε μορφή 3+1, συναρτήσε δηλαδή των χωρικών μεγεθών $\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$, πρέπει πρώτα να συσχετίσουμε τις προβολές του τετραδιάστατου τανυστή Riemann ${}^{(4)}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ με αποκλειστικά χωρικά μεγέθη, δηλαδή με τον τρισδιάστατο τανυστή Riemann ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ και την εξωτερική καμπυλότητα $K_{\alpha\beta}$. Έχουμε ήδη εξάγει τις γεωμετρικές σχέσεις αυτές, συγκεκριμένα πρόκειται για τις εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi και Ricci καθώς και τις συστολές τους. Απομένει να αντικαταστήσουμε τον τετραδιάστατο τανυστή Riemann με όρους που περιέχουν τον τανυστή ενέργειας-ορμής χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, ώστε να τις μετατρέψουμε σε δυναμικές εξισώσεις. Η διαδικασία αυτή, δηλαδή η εξαγωγή των 3+1 εξισώσεων Einstein, παρατίθεται αναλυτικά στις δύο πιο κάτω ενότητες.

4.3 Εξισώσεις περιορισμού (δεσμοί) - Constraint equations

Πριν προχωρήσουμε στην εξαγωγή των εξισώσεων των περιορισμών, είναι χρήσιμο να αναλύσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής του χωρόχρονου στα μεγέθη $(\rho, j_\alpha, S_{\alpha\beta})$ που μετρούνται από τους κάθετους παρατηρητές. Οι πιο κάτω ορισμοί αποτελούν άμεση συνέπεια του ορισμού του τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$.

Ορισμός 4.1: 3+1 Ανάλυση του $T_{\mu\nu}$

Η ενεργειακή πυκνότητα που μετράει ένας κάθετος (normal/Eulerian) παρατηρητής ο οποίος κινείται με τετραταχύτητα n^μ κάθετη στις υπερεπιφάνειες της διαμέρισης είναι:

$$\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (4.3.1)$$

Η (χωρική) πυκνότητα ορμής που μετράει ο κάθετος παρατηρητής έχει συνιστώσες:

$$j_\alpha = -\gamma^\mu_\alpha n^\nu T_{\mu\nu} \quad (4.3.2)$$

Ο (χωρικός) τανυστής τάσης που μετράει ο κάθετος παρατηρητής έχει συνιστώσες:

$$S_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu} \quad (4.3.3)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής στις συνιστώσες του όπως μετρούνται από έναν κάθετο παρατηρητή, σύμφωνα με τη σχέση του [παραρτήματος Β](#):

$$T_{\alpha\beta} = \rho n_\alpha n_\beta + j_\alpha n_\beta + j_\beta n_\alpha + S_{\alpha\beta} \quad (4.3.4)$$

Βάσει της πιο πάνω σχέσης, το ίχνος T του τανυστή ενέργειας ορμής γράφεται:

$$T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = S - \rho \quad (4.3.5)$$

όπου $S = g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ ($= \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$) το ίχνος του τανυστή τάσης που μετρά ο κάθετος παρατηρητής.

Αναλύσαμε λοιπόν τον τανυστή ενέργειας-ορμής σε συνιστώσες οι οποίες μετρούνται από τους κάθετους παρατηρητές στη διαμέριση, τις οποίες στο εξής θα εκλαμβάνουμε ως γνωστές ποσότητες που περιγράφουν το ενεργειακό/υλικό περιεχόμενο του χωρόχρονου. Προχωράμε τώρα στον προσδιορισμό των εξισώσεων των περιορισμών. Ξεκινώντας από τη βαθμωτή εξίσωση Gauss ([3.5.15](#)):

$${}^{(4)}R + 2n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (4.3.6)$$

που προκύπτει από τη διπλή συστολή της εξίσωσης Gauss-Codazzi, παρατηρούμε ότι ο όρος στο αριστερό μέλος μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R + 2n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} &= 2\left(n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} {}^{(4)}R\right) = 2\left(n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} - n^\mu n_\mu \frac{1}{2} {}^{(4)}R\right) \\ &= 2n^\mu n^\nu \left({}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^{(4)}R\right) \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Συνεπώς:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} \quad (4.3.8)$$

Επικαλούμενοι τις εξισώσεις Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ λαμβάνουμε τη σχέση:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 16\pi n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (4.3.9)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ είναι η ενεργειακή πυκνότητα που μετρούν οι κάθετοι παρατηρητές, οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 16\pi\rho \quad (4.3.10)$$

Η σχέση ([4.3.10](#)) δεν εμπεριέχει ρητά χρονικές παραγώγους (έμμεσα βέβαια η εξωτερική καμπυλότητα $K_{\alpha\beta}$ συνδέεται με τη χρονική παράγωγο της $\gamma_{\alpha\beta}$) και είναι γνωστή ως **Χαμιλτονιανός ή ενεργειακός περιορισμός** (Hamiltonian or energy constraint). Πρόκειται για μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται παντού σε κάθε υπερεπιφάνεια.

Ξεκινώντας τώρα από τη συνεσταλμένη εξίσωση Codazzi-Mainardi ([3.5.17](#)):

$$\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha{}^\mu \quad (4.3.11)$$

και αντικαθιστώντας ${}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R$ από τις εξισώσεις Einstein, λαμβάνουμε:

$$8\pi\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\underbrace{\gamma^\mu{}_\alpha n_\mu}_0 {}^{(4)}R = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha{}^\mu \quad (4.3.12)$$

$$8\pi\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu T_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha{}^\mu \quad (4.3.13)$$

Έχουμε ορίσει $j_\alpha = -\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu T_{\mu\nu}$ οπότε η πιο πάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$D_\mu K_\alpha{}^\mu - D_\alpha K = 8\pi j_\alpha \quad (4.3.14)$$

Η σχέση (4.3.14) επίσης δεν εμπεριέχει ρητά χρονικές παραγώγους και συνιστά τους **περιορισμούς ορμής** (momentum constraints). Οι εξισώσεις αυτές είναι ελλειπτικής φύσεως και είναι 3 στο πλήθος στο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα για να γράψουμε τις εξισώσεις ADM.

Να σημειώσουμε ότι οι περιορισμοί ορμής (4.3.14) γράφονται στην ισοδύναμη μορφή:

$$D_\beta(K^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}K) = 8\pi j^\alpha \quad (4.3.15)$$

Το Hamiltonian constraint και τα momentum constraints περιλαμβάνουν μόνο τη χωρική μετρική και την εξωτερική καμπυλότητα μιας υπερεπιφάνειας καθώς και τις χωρικές συναλλοιώτες παραγώγους τους. Με άλλα λόγια, συνδέουν καθαρά χωρικά μεγέθη που ορίζονται στην υπερεπιφάνεια με τις πηγές ύλης και ενέργειας (όπως τις αντιλαμβάνεται ένας κάθετος παρατηρητής) χωρίς να εμπλέκουν χρονικές παραγώγους ή τα μεγέθη lapse και shift. Επομένως είναι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα μεγέθη $\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ κάθε 3D υπερεπιφάνειας Σ_t ώστε η υποπολλαπλότητα $(\Sigma_t, \gamma, \mathbf{K})$ να μπορέσει να εμβαπτιστεί στον 4D χωρόχρονο (M, \mathbf{g}) , αποτελούν δηλαδή ολοκληρωτικές συνθήκες (integrability conditions). Τα αρχικά δεδομένα $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ που θα οριστούν σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} οφείλουν να ικανοποιούν τους περιορισμούς, οπότε για την κατασκευή αρχικών δεδομένων δεδομένης της ύλης-ενέργειας που περιέχει ο χωρόχρονος πρέπει να επιλυθούν τα constraints. Η πρόταση 4.1 διασφαλίζει θεωρητικά τη διατήρηση των περιορισμών κατά την χρονική εξέλιξη, δηλαδή κατασκευάζοντας αρχικά δεδομένα $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})|_{\Sigma_{t_0}}$ που ικανοποιούν τα constraints την αρχική χρονική στιγμή t_0 (υπερεπιφάνεια Σ_{t_0}) τότε η οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης θα δώσουν λύσεις $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ που ικανοποιούν τα constraints σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή (κάθε Σ_t). Εντούτοις σε μια αριθμητική προσομοίωση, όπως είναι αναμενόμενο, τα constraints παραβιάζονται κατά την χρονική εξέλιξη λόγω αριθμητικών σφαλμάτων. Είναι σημαντικό λοιπόν να ελέγχουμε ότι οι δυναμικές μεταβλητές $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ υπακούν στους περιορισμούς σε κάθε χρονική στιγμή, με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλιώς οι αντίστοιχες υπερεπιφάνειες δεν μπορούν να ενσωματωθούν σωστά στον χωρόχρονο.

4.4 Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης - Time evolution equations

Οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης είναι οι εξισώσεις που περιέχουν χρονικές παραγώγους των δυναμικών μεταβλητών $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$. Η χρονική εξέλιξη της χωρικής μετρικής είναι καθαρά κινηματική και προσδιορίζεται από τη σχέση $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}L_n\gamma_{\alpha\beta}$ ενώ η εξίσωση χρονικής εξέλιξης της εξωτερικής καμπυλότητας είναι δυναμική και στηρίζεται στην εξίσωση Ricci (3.5.12).

Θεωρούμε την παράγωγο Lie της χωρικής μετρικής κατά την κατεύθυνση του διανύσματος χρόνου, το

οποίο έχουμε ορίσει $t = \alpha n + \beta$. Από τις ιδιότητες της παραγώγου Lie έχουμε:

$$L_t \gamma_{\alpha\beta} = L_{\alpha n + \beta} \gamma_{\alpha\beta} = L_{\alpha n} \gamma_{\alpha\beta} + L_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.4.1)$$

Η παράγωγος Lie ενός πλήρως χωρικού τανυστή S (έστω τάξης $(0, 2)$ για το συγκεκριμένο παράδειγμα) κατά την κατεύθυνση $f n$ όπου f μια βαθμωτή συνάρτηση και n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στις υπερεπιφάνειες δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} L_{fn} S_{\alpha\beta} &= f n^\mu \nabla_\mu S_{\alpha\beta} + S_{\mu\beta} \nabla_\alpha (f n^\mu) + S_{\alpha\mu} \nabla_\beta (f n^\mu) \\ &= f (n^\mu \nabla_\mu S_{\alpha\beta} + S_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + S_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu) + \underbrace{n^\mu S_{\mu\beta}}_0 \nabla_\alpha f + \underbrace{n^\mu S_{\alpha\mu}}_0 \nabla_\beta f \\ &= f L_n S_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Με βάση το αποτέλεσμα αυτό και λαμβάνοντας υπόψη ότι η επαγόμενη μετρική γ είναι χωρικός τανυστής, έχουμε:

$$L_t \gamma_{\alpha\beta} = \alpha L_n \gamma_{\alpha\beta} + L_\beta \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.4.3)$$

Από τον ορισμό της εξωτερικής καμπυλότητας $L_n \gamma_{\alpha\beta} = -2K_{\alpha\beta}$ και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση παίρνουμε τελικά:

$$L_t \gamma_{\alpha\beta} = -2\alpha K_{\alpha\beta} + L_\beta \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.4.4)$$

Αυτή είναι η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της χωρικής μετρικής σε συναλλοίωτη μορφή (ισχύει ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων). Θα την εξειδικεύσουμε αργότερα στο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση όπου η παράγωγος Lie κατά t ανάγεται σε απλή χρονική παράγωγο. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση αυτή είναι κινηματική και όχι δυναμική καθώς προέκυψε από γεωμετρικές σχέσεις, χωρίς τη χρήση των εξισώσεων Einstein.

Προχωράμε στην εύρεση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης της εξωτερικής καμπυλότητας. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την παράγωγο Lie της εξωτερικής καμπυλότητας κατά την κατεύθυνση του διανύσματος χρόνου $t = \alpha n + \beta$.

$$L_t K_{\alpha\beta} = L_{\alpha n + \beta} K_{\alpha\beta} = \alpha L_n K_{\alpha\beta} + L_\beta K_{\alpha\beta} \quad (4.4.5)$$

Αντικαθιστούμε τον όρο $L_n K_{\alpha\beta}$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση Ricci (3.5.12):

$$L_t K_{\alpha\beta} = \alpha \gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)} R_{\mu\nu\rho\sigma} - D_\alpha D_\beta \alpha - \alpha K_{\beta\rho} K_\alpha{}^\rho + L_\beta K_{\alpha\beta} \quad (4.4.6)$$

Μένει να αντικαταστήσουμε τον όρο $\gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ με έναν όρο που περιέχει χωρικά μεγέθη και πηγές ύλης. Ο όρος αυτός εμφανίζεται στην πρώτη συστολή της εξίσωσης Gauss-Codazzi με τη χωρική μετρική (3.5.14) η οποία λύνοντας ως προς $\gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ δίνει:

$$\gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)} R_{\mu\nu\rho\sigma} = {}^{(3)} R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma - \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)} R_{\mu\nu} \quad (4.4.7)$$

Χρησιμοποιώντας τις trace-reversed εξισώσεις Einstein (2.13.7) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τετραδιάστατο τανυστή Ricci στην πιο πάνω σχέση με όρους που σχετίζονται με τις πηγές ύλης και

ενέργειας.

$$\begin{aligned} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} &= 8\pi \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) = 8\pi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\nu\alpha} \gamma^\nu_\beta T \right) = 8\pi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} T \right) \\ &= 8\pi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Εισάγοντας την (4.4.8) στην (4.4.7) λαμβάνουμε:

$$\gamma^\mu_\alpha n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma - 8\pi \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right) \quad (4.4.9)$$

Εισάγοντας στη συνέχεια την πιο πάνω σχέση στην (4.4.6) καταλήγουμε:

$$L_t K_{\alpha\beta} = -D_\alpha D_\beta \alpha + \alpha ({}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\gamma} K_\beta{}^\gamma) - 8\pi \alpha \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right) + L_\beta K_{\alpha\beta} \quad (4.4.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της εξωτερικής καμπυλότητας, εκπεφρασμένη σε συναλλοιώτη (τανυστική) μορφή. Είναι υπερβολικής φύσεως και αποτελεί την πραγματική δυναμική εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του "βαρυτικού πεδίου" (της χωροχρονικής καμπυλότητας) που προσδιορίζεται από τις ποσότητες $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$. Μαζί με την κινηματική εξίσωση (4.4.4) και τους περιορισμούς (4.3.10), (4.3.14) συνιστούν το 3+1 σύστημα εξισώσεων Einstein που είναι εντελώς ισοδύναμο με τις εξισώσεις πεδίου του Einstein: $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$.

Να επισημάνουμε πως οι περιορισμοί είναι ανεξάρτητοι από το lapse α και το shift vector β αφού οι δύο αυτές ποσότητες συνδέουν τις συντεταγμένες δύο γειτονικών υπερεπιφανειών ενώ οι περιορισμοί είναι ολοκληρωτικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται σε μια δεδομένη υπερεπιφάνεια. Επιπλέον οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης δεν προνοούν κάποια συγκεκριμένη μορφή για τα α, β δηλαδή δεν περιλαμβάνουν εξισώσεις για τη χρονική εξέλιξη των μεγεθών αυτών. Οι δυο πιο πάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν την ανάλυση που προηγήθηκε, στην οποία αναφέρθηκε ότι το lapse και οι συνιστώσες του shift vector είναι συναρτήσεις βαθμίδας (gauge functions) και ισοδυναμούν με την επιλογή συντεταγμένων για τη διαμέριση του χωρόχρονου. Συνεπώς δεν αναμένουμε να προσδιορίζονται από τις 3+1 εξισώσεις Einstein, επιλέγονται αυθαίρετα μέσω του προσδιορισμού κατάλληλων συνθηκών βαθμίδας που ανταποκρίνονται στον υπό μελέτη αστροφυσικό χωρόχρονο.

4.5 Εξισώσεις ADM-York - ADM-York Equations

Οι 3+1 εξισώσεις Einstein που εξάγαμε (4.3.10), (4.3.14), (4.4.4) και (4.4.10) είναι γραμμένες σε συναλλοιώτη μορφή, συνιστούν δηλαδή ένα σύστημα τανυστικών εξισώσεων χωρίς να αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Προκειμένου να καταχωρήσουμε τις εξισώσεις αυτές υπό μορφή κώδικα στον υπολογιστή, πρέπει να τις μετατρέψουμε σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων και αυτό επιτυγχάνεται μέσω του προσδιορισμού ενός συστήματος συντεταγμένων στο οποίο επιθυμούμε να κάνουμε την υπολογιστική μελέτη. Η φυσική επιλογή για το σύστημα συντεταγμένων είναι προφανώς οι συντεταγμένες (t, x^i) προσαρμοσμένες στη διαμέριση, οι οποίες αντικατοπτρίζουν τον τρόπο με τον οποίο έχουμε διαμερίσει τον χωρόχρονο στον 3+1 φορμαλισμό. Υπενθυμίζουμε ότι t είναι η συνάρτηση καθολικού χρόνου που ταυτοποιεί τις υπερεπιφάνειες Σ_t και x^i , $i = 1, 2, 3$ οι τρεις

χωρικές συντεταγμένες που περιγράφουν σημεία εντός μιας υπερεπιφάνειας. Σε προσαρμοσμένες συντεταγμένες, τα διανύσματα βάσης (coordinate basis vectors) του εφαιπόμενου χώρου $T_p M$ είναι τα (∂_t, ∂_i) όπου $\partial_i \in T_p \Sigma_t$ και ∂_t το διάνυσμα χρόνου, το οποίο βάσει της συνθήκης ευκλιδικότητας $dt(\partial_t) = \nabla_\alpha t(\partial_t)^\alpha = 1$ ταυτίζεται με το διάνυσμα $\mathbf{t} = \alpha \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}$.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι οι ανταλλοιώτες χρονικές συνιστώσες ενός χωρικού τανυστή μηδενίζονται, δηλαδή αν κάποιος άνω δείκτης ενός χωρικού τανυστή είναι "0" τότε η συνιστώσα αυτή είναι ίση με μηδέν. Από την άλλη, παρόλο που οι συναλλοιώτες χρονικές συνιστώσες ενός χωρικού τανυστή εν γένει δεν μηδενίζονται, δεν παρέχουν καινούργιες πληροφορίες για τον τανυστή αφού υπολογίζονται από τις χωρικές συνιστώσες του αντίστοιχου ανταλλοιώτου τανυστή σε συστολή με τη μετρική. Για παράδειγμα, για τις χρονικές συνιστώσες του χωρικού τανυστή $K_{\alpha\beta}$ έχουμε:

$$K_{00} = g_{0\mu}g_{0\nu}K^{\mu\nu} = g_{0i}g_{0j}K^{ij} = \beta_i\beta_jK^{ij} \quad (4.5.1)$$

$$K_{0k} = g_{0\mu}g_{k\nu}K^{\mu\nu} = g_{0i}g_{kj}K^{ij} = \beta_i\gamma_{kj}K^{ij} \quad (4.5.2)$$

Επομένως όλο το περιεχόμενο ενός χωρικού τανυστή εμπεριέχεται στις χωρικές του συνιστώσες όταν αυτές εκφραστούν στο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιούμε στο εξής λατινικούς δείκτες $i, j = 1, 2, 3$ αντί ελληνικούς για να γράψουμε τις συνιστώσες χωρικών τανυστών.

Σε αυτές τις προσαρμοσμένες συντεταγμένες η παράγωγος Lie κατά την κατεύθυνση του χρονικού διανύσματος \mathbf{t} ανάγεται στη μερική χρονική παράγωγο: $L_{\mathbf{t}} = \partial_t$ επειδή το \mathbf{t} ταυτίζεται με το διάνυσμα βάσης ∂_t . Για παράδειγμα:

$$L_{\mathbf{t}}K_{\alpha\beta} = L_{\partial_t}K_{\alpha\beta} = \delta^\mu_0\partial_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta}\partial_\alpha\delta^\mu_0 + K_{\alpha\mu}\partial_\beta\delta^\mu_0 = \partial_t K_{\alpha\beta} \quad (4.5.3)$$

Ακόμη, η παράγωγος Lie ενός χωρικού τανυστή κατά μήκος ενός χωρικού διανύσματος \mathbf{X} μπορεί να γραφεί μέσω της χωρικής συναλλοιώτης παραγώγου D_α αντί της ∇_α (ή εναλλακτικά με τη συνθήκη μερική παράγωγο ∂_α). Παραθέτουμε την απόδειξη στην περίπτωση ενός χωρικού διανύσματος \mathbf{V} που παραγωγίζεται κατά Lie στην κατεύθυνση \mathbf{X} και η γενίκευση σε τανυστές γίνεται άμεσα:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}V^\mu &= X^\nu\nabla_\nu V^\mu - V^\nu\nabla_\nu X^\mu \\ &= \gamma^\nu_\rho X^\rho\nabla_\nu(\gamma^\mu_\sigma V^\sigma) - \gamma^\nu_\rho V^\rho\nabla_\nu(\gamma^\mu_\sigma X^\sigma) \\ &= X^\rho\gamma^\nu_\rho\gamma^\mu_\sigma\nabla_\nu V^\sigma + \gamma^\nu_\rho X^\rho V^\sigma\nabla_\nu(n^\mu n_\sigma) - V^\rho\gamma^\nu_\rho\gamma^\mu_\sigma\nabla_\nu X^\sigma - \gamma^\nu_\rho V^\rho X^\sigma\nabla_\nu(n^\mu n_\sigma) \\ &= X^\rho D_\rho V^\mu + \gamma^\nu_\rho X^\rho V^\sigma n^\mu\nabla_\nu n_\sigma - V^\rho D_\rho X^\mu - \gamma^\nu_\rho V^\rho X^\sigma n^\mu\nabla_\nu n_\sigma \\ &= X^\rho D_\rho V^\mu - V^\rho D_\rho X^\mu - K_{\rho\sigma}X^\rho V^\sigma n^\mu + K_{\rho\sigma}X^\sigma V^\rho n^\mu \\ &= X^\rho D_\rho V^\mu - V^\rho D_\rho X^\mu - K_{\rho\sigma}X^\rho V^\sigma n^\mu + K_{\sigma\rho}X^\sigma V^\rho n^\mu \\ &= X^\rho D_\rho V^\mu - V^\rho D_\rho X^\mu \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη χωρική συναλλοιώτη παράγωγο, η παράγωγος Lie της χωρικής μετρικής κατά την κατεύθυνση του shift vector $\boldsymbol{\beta}$ προκύπτει:

$$L_{\boldsymbol{\beta}}\gamma_{ij} = \underbrace{\beta^k D_k \gamma_{ij}}_0 + \gamma_{kj} D_i \beta^k + \gamma_{ik} D_j \beta^k = D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (4.5.4)$$

Επιπλέον για την εξωτερική καμπυλότητα έχουμε:

$$L_\beta K_{ij} = \beta^k D_k K_{ij} + K_{kj} D_i \beta^k + K_{ik} D_j \beta^k = \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \quad (4.5.5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα πιο πάνω αποτελέσματα, γράφουμε τις 3+1 εξισώσεις Einstein στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Οι τέσσερις εξισώσεις που προκύπτουν ονομάζονται εξισώσεις ADM (Arnowitt, Deser, Misner) ή καλύτερα ADM-York καθότι δεν αντιστοιχούν στην αρχική εκδοχή των ADM αλλά στην εκδοχή που εξήγαγε ο J. W. York το 1979. Είναι επίσης γνωστές απλά ως "3+1 εξισώσεις Einstein".

Εξισώσεις ADM-York

1. Εξισώσεις των περιορισμών (constraints):

1a) Hamiltonian constraint

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho \quad (4.5.6)$$

1b) Momentum constraints

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i \quad (4.5.7)$$

2. Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (evolution equations):

2a) Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της χωρικής μετρικής (κινηματική)

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (4.5.8)$$

2b) Εξίσωση χρονικής εξέλιξης της εξωτερικής καμπυλότητας (δυναμική)

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha ({}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j) - 8\pi\alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) \right] \\ & + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

όπου οι δυναμικές μεταβλητές είναι (γ_{ij}, K_{ij}) δηλαδή η χωρική μετρική και η εξωτερική καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας ενώ οι συναρτήσεις βαθμίδας που καθορίζουν την διαμέριση είναι το lapse α και οι συνιστώσες του shift vector β^i . Οι όροι ρ, j_i, S_{ij} αφορούν τις πηγές ύλης/ενέργειας και ορίζονται από τις ακόλουθες προβολές του ταυσιτή ενέργειας-ορμής: $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, $j^i = -\gamma^{ij} n^\mu T_{\mu j}$, $S_{ij} = \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} T^{\mu\nu}$ με $S = \gamma^{ij} S_{ij}$.

Να σημειώσουμε ότι η εξίσωση (4.5.6) είναι ισοδύναμη με την $n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0$, οι 3 εξισώσεις (4.5.7) είναι ισοδύναμες με την $\gamma^\alpha_i n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0$ ενώ οι 6 εξισώσεις (4.5.9) είναι ισοδύναμες με τις δυναμικές εξισώσεις $\gamma^\alpha_i \gamma^\beta_j (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0$.

Έχουμε λοιπόν 4 εξισώσεις ADM-York (4.5.6)-(4.5.7) που αφορούν τους περιορισμούς και 6 δυναμικές εξισώσεις ADM-York (4.5.9) για τη χρονική εξέλιξη άρα συνολικά 10 ανεξάρτητες εξισώσεις που προκύπτουν από τις 10 αρχικές εξισώσεις Einstein (4.1.1) και όταν συμπληρωθούν με τις 6 καθαρά κινηματικές εξισώσεις (4.5.8) (ορισμός K_{ij}) καθίστανται εντελώς ισοδύναμες με αυτές.

Πρόταση 4.2: Συστολές των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης

Τα contractions των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης δίνουν:

$$\partial_t \ln(\gamma^{1/2}) = -\alpha K + D_i \beta^i \quad (4.5.10)$$

όπου $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$, $K = \gamma^{ij} K_{ij}$ και:

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] + \beta^i D_i K \quad (4.5.11)$$

όπου $D^2 \equiv D_i D^i = \gamma^{ij} D_i D_j$ η Λαπλασιανή που αντιστοιχεί στη χωρική μετρική γ_{ij} (Λαπλασιανή της υπερεπιφάνειας).

Απόδειξη:

(i) Για την απόδειξη της (4.5.10) ξεκινάμε από τη σχέση:

$$L_t \ln \gamma^{1/2} = \alpha L_n \ln \gamma^{1/2} + L_\beta \ln \gamma^{1/2} \quad (4.5.12)$$

Γνωρίζουμε από τον ορισμό της εξωτερικής καμπυλότητας ότι το ίχνος της K δίνεται από τη σχέση:

$$L_n \ln \gamma^{1/2} = -K \quad (4.5.13)$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\begin{aligned} L_\beta \ln \gamma^{1/2} &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} L_\beta \gamma^{1/2} = \frac{1}{2} \gamma^{ij} L_\beta \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma^{ij} (\beta^k D_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} D_i \beta^k + \gamma_{ik} D_j \beta^k) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{ij} (D_i \beta_j + D_j \beta_i) \\ &= D_i \beta^i \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Στη σχέση (4.5.12) αντικαθιστούμε $L_n \ln \gamma^{1/2} = -K$ και $L_\beta \ln \gamma^{1/2} = D_i \beta^i$ και υπενθυμίζοντας ότι σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στη διαμέριση $L_t = \partial_t$ καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\partial_t \ln(\gamma^{1/2}) = -\alpha K + D_i \beta^i \quad (4.5.15)$$

(ii) Για την απόδειξη της (4.5.11) έχουμε:

$$\partial_t K = \partial_t (\gamma^{ij} K_{ij}) = \gamma^{ij} \partial_t K_{ij} + K_{ij} \partial_t \gamma^{ij}$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των $\partial_t K_{ij}$ και $\partial_t \gamma^{ij}$ από τις εξισώσεις ADM όπου είναι εύκολο να δούμε ότι $\partial_t \gamma^{ij} = -\gamma^{ik} \gamma^{jl} \partial_t \gamma_{kl} = 2\alpha K^{ij} - D^i \beta^j - D^j \beta^i$:

$$\begin{aligned} \partial_t K &= -D_i D^i \alpha + \alpha ({}^{(3)}R + K \cdot K - 2K_{ik} K^{ik}) - 8\pi \alpha \left[S - \frac{1}{2} \delta^i_i (S - \rho) \right] + \beta^k D_k K + K_{jk} D^j \beta^k + K_{ik} D^i \beta^k \\ &\quad + 2\alpha K_{ij} K^{ij} - K_{ij} D^i \beta^j - K_{ij} D^j \beta^i \end{aligned}$$

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha ({}^{(3)}R + K^2) - 8\pi \alpha \left(S - \frac{3}{2} S + \frac{3}{2} \rho \right) + \beta^k D_k K$$

$$= -D^2\alpha + \alpha({}^{(3)}R + K^2 + 4\pi S - 12\pi\rho) + \beta^k D_k K \quad (4.5.16)$$

Από το Hamiltonian constraint έχουμε ${}^{(3)}R + K^2 = K_{ij}K^{ij} + 16\pi\rho$ οπότε τελικά λαμβάνουμε το ζητούμενο:

$$\partial_t K = -D^2\alpha + \alpha[K_{ij}K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] + \beta^k D_k K$$

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, δίνουμε μια ανασκόπηση των εξισώσεων ADM-York. Αποδείξαμε οι εξισώσεις Einstein μετασχηματίζονται στα πλαίσια του 3+1 φορμαλισμού σε ένα ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων με δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) που καλείται ADM-York και αποτελείται από τους περιορισμούς (constraints) και τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης. Τα constraints δεν περιέχουν (ρητά) χρονικές παραγώγους και αντιστοιχούν συνολικά σε 4 ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs): Hamiltonian constraint \rightarrow 1 ελλειπτική PDE και Momentum constraints \rightarrow 3 ελλειπτικές PDEs. Οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης αποτελούν σχέσεις για την πρώτη μερική παράγωγο των γ_{ij}, K_{ij} ως προς τον χρόνο και αντιστοιχούν συνολικά σε 12 υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις: 6 PDEs για τις συνιστώσες γ_{ij} και 6 PDEs για τις συνιστώσες K_{ij} . Στους περιορισμούς αντιστοιχούν ισάριθμες συναρτήσεις βαθμίδας α, β^i που σχετίζονται με την επιλογή διαμέρισης-συντεταγμένων και προσδιορίζονται αυθαίρετα μέσω μιας συνθήκης βαθμίδας.

4.6 Διατήρηση των περιορισμών κατά τη χρονική εξέλιξη - Conservation of constraints under the evolution equations

Η πρόταση (4.1) εξασφαλίζει ότι αν οι περιορισμοί ικανοποιούνται σε μια αρχική χρονική στιγμή, τότε θα συνεχίσουν να ικανοποιούνται σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή ως απόρροια της συνεσταλμένης εξίσωσης Bianchi και της διατήρησης του τανυστή ενέργειας ορμής. Για την απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, όπου οι περιορισμοί αντιστοιχούσαν στις 4 εξισώσεις $G^{\alpha 0} - 8\pi T^{\alpha 0} = 0$ και η δυναμική εξέλιξη στις 6 εξισώσεις $G^{ij} - 8\pi T^{ij} = 0$. Θα αποδείξουμε τώρα την ίδια πρόταση, δηλαδή τη διατήρηση των constraints κατά τη χρονική εξέλιξη, ξεκινώντας πάλι από τις συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi και τη διατήρηση του τανυστή ενέργειας ορμής, χρησιμοποιώντας όμως τις εξισώσεις ADM-York του 3+1 φορμαλισμού. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις δύο πιο κάτω ποσότητες:

$$\mathcal{H} \equiv n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} - 8\pi\rho = \frac{1}{2} \left({}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \right) - 8\pi\rho \quad (4.6.1)$$

$$\mathcal{M}_\alpha \equiv -n^\mu \gamma^\nu_\alpha G_{\mu\nu} - 8\pi j_\alpha = D_\mu K^\mu_\alpha - D_\alpha K - 8\pi j_\alpha \quad (4.6.2)$$

Η βαθμωτή ποσότητα \mathcal{H} μετράει το μέγεθος της παραβίασης/απόκλισης του Hamiltonian constraint ενώ το πεδίο 1-form \mathcal{M} με συνιστώσες \mathcal{M}_α παριστάνει το μέγεθος της παραβίασης/απόκλισης των momentum constraints. Οι εξισώσεις των περιορισμών του συστήματος ADM-York ικανοποιούνται αν και μόνο αν ισχύουν οι δύο κάτωθι συνθήκες (δηλαδή οι περιορισμοί είναι ισοδύναμοι με τις πιο κάτω συνθήκες):

$$\mathcal{H} = 0 \quad (\text{Χαμιλτονιανός περιορισμός}) \quad (4.6.3)$$

$$\mathcal{M}_\alpha = 0 \quad (\text{Περιορισμοί ορμής}) \quad (4.6.4)$$

Ορίζουμε επίσης τον χωρικό τανυστή F με συνιστώσες:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &\equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} - 8\pi \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} L_{\alpha n} K_{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} D_\alpha D_\beta \alpha + {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\sigma} K^\sigma_\beta - 8\pi \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right] \end{aligned}$$

ο οποίος μετράει την παραβίαση/απόκλιση από την δυναμική εξίσωση χρονικής εξέλιξης (4.4.10). Κατά συνέπεια το δυναμικό κομμάτι των εξισώσεων Einstein, που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της εξωτερικής καμπυλότητας, ισοδυναμεί με:

$$F_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.6.5)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein στον 3+1 χωρόχρονο ως:

$$G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H} \quad (4.6.6)$$

Η χωρική προβολή των εξισώσεων Einstein γράφεται συναρτήσεως του $F_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} {}^{(4)}R - 8\pi S_{\alpha\beta} \\ &= F_{\alpha\beta} + 8\pi \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right] - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} {}^{(4)}R - 8\pi S_{\alpha\beta} \\ &= F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} [{}^{(4)}R + 8\pi (S - \rho)] \end{aligned}$$

Ο όρος στην αγκύλη σχετίζεται με τη διαφορά ανάμεσα στο ίχνος $F = \gamma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ και στην ποσότητα \mathcal{H} . Πράγματι:

$$\begin{aligned} F &= \gamma^{\alpha\beta} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} - 8\pi \gamma^{\alpha\beta} \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - \rho) \right] \\ &= \gamma^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} - 8\pi \left[S - \frac{1}{2} \underbrace{\delta^\alpha_\alpha}_3 (S - \rho) \right] \\ &= g^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} + n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} - 8\pi \left[-\frac{1}{2} S + \frac{3}{2} \rho \right] \\ &= {}^{(4)}R + n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} + 4\pi (S - 3\rho) \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Εξ'ορισμού $\mathcal{H} = n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} {}^{(4)}R - 8\pi\rho$ οπότε η διαφορά $F - \mathcal{H}$ δίνει:

$$F - \mathcal{H} = \frac{1}{2} [{}^{(4)}R + 8\pi(S - \rho)] \quad (4.6.8)$$

Με βάση το πιο πάνω αποτέλεσμα οι εξισώσεις Einstein αναλύονται στον 3+1 φορμαλισμό σε όρους που περιλαμβάνουν τις αποκλίσεις από τους περιορισμούς \mathcal{H} , \mathcal{M}_α , την απόκλιση από τη δυναμική εξίσωση χρονικής εξέλιξης $F_{\alpha\beta}$ και το ίχνος της F .

$$G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - F) \gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H} \quad (4.6.9)$$

Αν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί ($\mathcal{H} = 0$, $\mathcal{M}_\alpha = 0$) και γίνεται χρήση των δυναμικών εξισώσεων χρονικής εξέλιξης ($F_{\alpha\beta} = 0$) για τη χρονική εξέλιξη των $(\gamma_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ τότε το δεξί μέλος της παρα-

πάνω σχέσης μηδενίζεται ταυτοτικά πράγμα που σημαίνει ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Einstein $G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta} = 0$.

Για την εύρεση των εξισώσεων που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη των $\mathcal{H}, \mathcal{M}_\alpha$ χρησιμοποιούμε τη συνεσταλμένη ταυτότητα Bianchi $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$ σε συνδυασμό με τη διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$. Οι δύο αυτές ταυτότητες συνεπάγονται:

$$\nabla^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0 \Leftrightarrow \nabla^\alpha (F_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) = 0 \quad (4.6.10)$$

Η πιο πάνω εξίσωση μπορεί να προβληθεί επάνω σε μια υπερεπιφάνεια μέσω του χωρικού προβολικού τελεστή ή να γίνει συστολή της με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} . Θεωρούμε πρώτα τη συστολή της με το \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} n^\beta \nabla^\alpha (F_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) &= 0 \\ n^\beta \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + n^\beta \nabla^\alpha [(\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta}] + n^\beta \nabla^\alpha (n_\alpha \mathcal{M}_\beta) + n^\beta \nabla^\alpha (n_\beta \mathcal{M}_\alpha) + n^\beta \nabla^\alpha (n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) &= 0 \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τανυστής \mathbf{F} και το 1-form \mathcal{M} είναι χωρικοί άρα $n^\beta F_{\alpha\beta} = n^\beta \mathcal{M}_\beta = 0$ και επιπλέον $n^\beta \nabla^\alpha n_\beta = 0$ λόγω της κανονικοποίησης $n^\alpha n_\alpha = -1$. Συνεπώς έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} n^\beta \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + n^\beta (\mathcal{H} - F) \nabla^\alpha \gamma_{\alpha\beta} + n^\beta n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta + n^\beta n_\beta \nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha + n^\beta n_\beta \mathcal{H} \nabla^\alpha n_\alpha + n^\beta n_\alpha n_\beta \nabla^\alpha \mathcal{H} &= 0 \\ -F_{\alpha\beta} \nabla^\alpha n^\beta + n^\beta (\mathcal{H} - F) \nabla^\alpha (n_\alpha n_\beta) - \mathcal{M}_\beta n_\alpha \nabla^\alpha n^\beta - \nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha - \mathcal{H} \nabla^\alpha n_\alpha - n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{H} &= 0 \\ -\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta F_{\mu\nu} \nabla^\alpha n^\beta - (\mathcal{H} - F) \nabla^\alpha n_\alpha - \mathcal{M}_\beta a^\beta - \nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha - \mathcal{H} \nabla^\alpha n_\alpha - n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{H} &= 0 \\ F_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + (\mathcal{H} - F) K - \mathcal{M}_\beta a^\beta - \nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha + \mathcal{H} K - n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{H} &= 0 \\ F_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + (2\mathcal{H} - F) K - \mathcal{M}_\beta D^\beta \ln \alpha - \nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha - n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Ο όρος $\nabla^\alpha \mathcal{M}_\alpha$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει της χωρικής συναλλοίωτης παραγώγου $D^\alpha \mathcal{M}_\alpha$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathcal{M}_\alpha &= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\nu_\alpha \nabla^\mu \mathcal{M}_\nu = \gamma^\nu_\mu \nabla^\mu \mathcal{M}_\nu = \nabla^\mu \mathcal{M}_\mu + n_\mu n^\nu \nabla^\mu \mathcal{M}_\nu = \nabla^\mu \mathcal{M}_\mu - n_\mu \mathcal{M}_\nu \nabla^\mu n^\nu \\ &= \nabla^\mu \mathcal{M}_\mu - \mathcal{M}_\nu a^\nu \\ &= \nabla^\mu \mathcal{M}_\mu - \mathcal{M}_\nu D^\nu \ln \alpha \end{aligned}$$

Λύνοντας την πιο πάνω σχέση ως προς $\nabla^\mu \mathcal{M}_\mu$ και αντικαθιστώντας στη (4.6.11) καταλήγουμε:

$$n^\mu \nabla_\mu \mathcal{H} = F_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - D_\mu \mathcal{M}^\mu - 2\mathcal{M}^\mu D_\mu \ln \alpha + (2\mathcal{H} - F) K \quad (4.6.12)$$

Το αριστερό μέλος της πιο πάνω σχέσης είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του \mathcal{H} κατά την κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{n} η οποία, εφόσον το \mathcal{H} είναι βαθμωτό μέγεθος, ταυτίζεται με τη παράγωγο Lie κατά \mathbf{n} . Επομένως:

$$n^\mu \nabla_\mu \mathcal{H} = L_n \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha} L_{\alpha n} \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha} (L_t \mathcal{H} - L_\beta \mathcal{H}) \quad (4.6.13)$$

Εξειδικεύουμε στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο στη διαμέριση όπου $L_t = \partial_t$ και $L_\beta \mathcal{H} = \beta^i D_i \mathcal{H}$ και αντικαθιστούμε την πιο πάνω σχέση στη (4.6.12). Καταλήγουμε τελικά στην

εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της απόκλισης \mathcal{H} από το Hamiltonian constraint:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -D_i(\alpha \mathcal{M}^i) - \mathcal{M}^i D_i \alpha + \alpha K(2\mathcal{H} - F) + \alpha F_{ij} K^{ij} + \beta^i D_i \mathcal{H} \quad (4.6.14)$$

Προχωράμε τώρα στην προβολή της (4.6.10) επάνω σε μια υπερεπιφάνεια Σ_t χρησιμοποιώντας τον χωρικό προβολικό τελεστή.

$$\begin{aligned} \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha (F_{\alpha\beta} + (\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) &= 0 \\ \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha [(\mathcal{H} - F)\gamma_{\alpha\beta}] + \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha (n_\alpha \mathcal{M}_\beta) + \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha (n_\beta \mathcal{M}_\alpha) + \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha (n_\alpha n_\beta \mathcal{H}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\mu} \nabla^\alpha (\mathcal{H} - F) + \gamma^\beta_\mu (\mathcal{H} - F) n_\alpha \nabla^\alpha n_\beta + \mathcal{M}_\mu \nabla^\alpha n_\alpha + \gamma^\beta_\mu n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta \\ + \gamma^\beta_\mu \mathcal{M}_\alpha \nabla^\alpha n_\beta + \gamma^\beta_\mu n_\alpha \mathcal{H} \nabla^\alpha n_\beta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + D_\mu (\mathcal{H} - F) + \gamma^\beta_\mu (\mathcal{H} - F) a_\beta - K \mathcal{M}_\mu + \gamma^\beta_\mu n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta + \mathcal{M}_\alpha \nabla^\alpha n_\mu + \gamma^\beta_\mu \mathcal{H} a_{\alpha\beta} &= 0 \\ \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + D_\mu (\mathcal{H} - F) + (2\mathcal{H} - F) a_\mu - K \mathcal{M}_\mu + \gamma^\beta_\mu n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta - K^\beta_\mu \mathcal{M}_\beta &= 0 \\ \gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} + D_\mu (\mathcal{H} - F) + (2\mathcal{H} - F) D_\mu \ln \alpha - K \mathcal{M}_\mu + \gamma^\beta_\mu n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta - K^\beta_\mu \mathcal{M}_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Μένει τώρα να εκφράσουμε τον όρο $\gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta}$ συναρτήσει της χωρικής συναλλοιώτης παραγώγου.

$$\begin{aligned} D^\alpha F_{\alpha\mu} &= \gamma^\alpha_\nu \gamma^\sigma_\alpha \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\sigma\rho} = \gamma^\sigma_\nu \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\sigma\rho} = (\delta^\sigma_\nu + n^\sigma n_\nu) \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\sigma\rho} \\ &= \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\nu\rho} + n^\sigma n_\nu \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\sigma\rho} \\ &= \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\nu\rho} - F_{\sigma\rho} n_\nu \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu n^\sigma \\ &= \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\nu\rho} - F_{\sigma\mu} a^\sigma \\ &= \gamma^\rho_\mu \nabla^\nu F_{\nu\rho} - F_{\sigma\mu} D^\sigma \ln \alpha \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\gamma^\beta_\mu \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = D^\alpha F_{\alpha\mu} + F_{\beta\mu} D^\beta \ln \alpha \quad (4.6.16)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο όρος $\gamma^\beta_\mu n_\alpha \nabla^\alpha \mathcal{M}_\beta = \gamma^\beta_\mu n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{M}_\beta$ γράφεται:

$$\begin{aligned} \gamma^\beta_\mu n^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{M}_\beta &= \gamma^\beta_\mu (L_n \mathcal{M}_\beta - \mathcal{M}^\alpha \nabla_\beta n_\alpha) = L_n \mathcal{M}_\mu - \mathcal{M}^\alpha \gamma^\beta_\mu \nabla_\beta n_\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} L_{\alpha n} \mathcal{M}_\mu + \mathcal{M}^\alpha K_{\alpha\mu} \\ &= \frac{1}{\alpha} (L_t - L_\beta) \mathcal{M}_\mu + \mathcal{M}_\alpha K^\alpha_\mu \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.6.15) λαμβάνουμε:

$$D^\alpha F_{\alpha\mu} + F_{\beta\mu} D^\beta \ln \alpha + D_\mu (\mathcal{H} - F) + (2\mathcal{H} - F) D_\mu \ln \alpha - K \mathcal{M}_\mu + \frac{1}{\alpha} (L_t - L_\beta) \mathcal{M}_\mu = 0 \quad (4.6.17)$$

Στο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση (t, x^i) η πιο πάνω σχέση οδηγεί στην εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της απόκλισης \mathcal{M}_j από τα momentum constraints:

$$\frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial t} = -D^i(\alpha F_{ij}) - \alpha D_j(\mathcal{H} - F) - (2\mathcal{H} - F)D_j\alpha + \alpha K\mathcal{M}_j + \beta^i D_i\mathcal{M}_j + \mathcal{M}_i D_j\beta^i \quad (4.6.18)$$

Εξ' υποθέσεως, για τη χρονική εξέλιξη των (γ_{ij}, K_{ij}) εφαρμόζεται η δυναμική εξίσωση ADM (4.4.10), οπότε σε κάθε χρονική στιγμή $F_{ij} = 0$ και άρα $F = \gamma^{ij}F_{ij} = 0$. Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι οι περιορισμοί ικανοποιούνται στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} δηλαδή κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$ ισχύει ότι:

$$\mathcal{H}|_{t=t_0} = 0 \quad \text{και} \quad \mathcal{M}_j|_{t=t_0} = 0 \quad (4.6.19)$$

Με αυτές τις υποθέσεις τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (4.6.14) και (4.6.18) μηδενίζονται ταυτοτικά επομένως οι χρονικές παράγωγοι των $\mathcal{H}, \mathcal{M}_j$ στην αρχική υπερεπιφάνεια μηδενίζονται επίσης:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (4.6.20)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (4.6.21)$$

Συμπεραίνουμε με βάση το θεώρημα Cauchy-Kovalevskaya για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων, ότι σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή (κάθε επόμενη υπερεπιφάνεια) τα constraints θα εξακολουθήσουν να ικανοποιούνται:

$$\forall t \geq t_0, \quad \mathcal{H} = 0 \quad \text{και} \quad \mathcal{M}_j = 0 \quad (4.6.22)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι αν τα constraints ικανοποιούνται την αρχική χρονική στιγμή t_0 τότε θα συνεχίσουν να ικανοποιούνται σε ύστερους χρόνους από τις μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) οι οποίες προκύπτουν ως (ακριβείς/αναλυτικές) λύσεις των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης ADM-York.

Σημείωση: Η πιο πάνω πρόταση που αφορά στη διατήρηση των περιορισμών εξακολουθεί θεωρητικά να ισχύει αν για τη δυναμική εξέλιξη αντί των ADM-York χρησιμοποιηθούν εναλλακτικές δυναμικές εξισώσεις της μορφής $F_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}\mathcal{H} - l^\lambda_{\mu\nu}\mathcal{M}_\lambda = 0$ όπου m, l αυθαίρετοι τανυστές συμμετρικοί στους δείκτες μ, ν . Δηλαδή μπορούμε θεωρητικά να προσθέσουμε διάφορους συνδυασμούς των constraints στη δυναμική εξίσωση χρονικής εξέλιξης χωρίς να αλλοιώσουμε το φυσικό της περιεχόμενο, αρκεί βέβαια τα constraints να ικανοποιούνται: $\mathcal{H} = 0, \mathcal{M}_\alpha = 0$.

4.7 Τεχνικές χρονικής εξέλιξης - Evolution schemes

Προφανώς, η διατήρηση των περιορισμών κατά τη χρονική εξέλιξη ισχύει μόνο σε θεωρητικό επίπεδο καθώς προϋποθέτει την αναλυτική επίλυση των εξισώσεων των περιορισμών στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} καθώς και την εύρεση ακριβών/αναλυτικών λύσεων για τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης. Στην πράξη, σε μια υπολογιστική προσομοίωση, η ολοκλήρωση των εξισώσεων αυτών γίνεται αριθμητικά σε διακριτό χρονικό πλέγμα οπότε προκύπτουν αριθμητικά σφάλματα τα οποία οδηγούν σε (μικρή) παραβίαση των περιορισμών. Υπάρχουν δύο κύριες προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος, η πρώτη ονομάζεται **ελεύθερη χρονική εξέλιξη** (free/unconstrained evolution) ενώ η δεύτερη καλείται **περιορισμένη χρονική εξέλιξη** (constrained evolution).

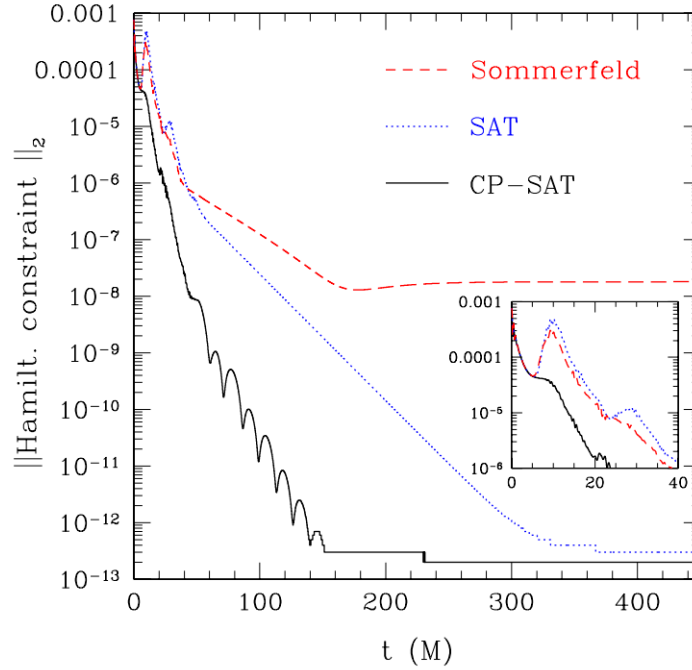
Η συνηθέστερη μέθοδος είναι αυτή της ελεύθερης χρονικής εξέλιξης, όπου οι 4 εξισώσεις των περιορισμών επιλύονται μόνο μία φορά στην αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} για την κατασκευή αρχικών δεδομένων $(\gamma_{ij}, K_{ij})|_{t=t_0}$. Έπειτα οι δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) εξελίσσονται στον χρόνο βάσει των 12 εξισώσεων χρονικής εξέλιξης του συστήματος ADM-York, χωρίς να επιβληθούν ξανά οι εξισώσεις των περιορισμών, αφού (εξαιρώντας τυχόν αριθμητικά σφάλματα) οι περιορισμοί οφείλουν να ικανοποιούνται για $t \geq t_0$. Η απόκλιση/παραβίαση των constraints, δηλαδή οι ποσότητες $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$, επιτηρούνται σε κάθε στάδιο της χρονικής εξέλιξης προκειμένου να διασφαλιστεί ότι παραμένουν κάτω από ένα επιθυμητό όριο, αποτελούν δηλαδή μέτρο για την ακρίβεια της μεθόδου. Μερικοί φορμαλισμοί που εφαρμόζουν τη μέθοδο της ελεύθερης χρονικής εξέλιξης είναι ο κλασικός ADM-York φορμαλισμός, BSSN (ή BSSNOK), Generalized Harmonic Gauge (GHG), Z4/Z4c και CCZ4.

Η εμφάνιση λύσεων (γ_{ij}, K_{ij}) που προκύπτουν από τις δυναμικές εξισώσεις $F_{ij} = 0$ για δεδομένες συναρτήσεις βαθμίδας (α, β^i) , οι οποίες λύσεις παρόλο που αρχικά ικανοποιούν τους περιορισμούς $\mathcal{H} = 0, \mathcal{M}_i = 0$ (με αρκετή αριθμητική ακρίβεια) στη συνέχεια τους παραβιάζουν δηλαδή για $t > t_0$: $\mathcal{H} \neq 0, \mathcal{M}_i \neq 0$, αποδίδεται στα λεγόμενα constraint-violating modes. Η ύπαρξη αυτών των constraint-violating modes οφείλεται σε δύο παράγοντες:

(i) Τα αρχικά δεδομένα που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των περιορισμών δεν ικανοποιούν επ' ακριβώς τους περιορισμούς όντας αριθμητικές λύσεις και όχι αναλυτικές. Η απόκλιση αυτή αυξάνεται (κατά κανόνα εκθετικά) κατά τη χρονική εξέλιξη των (γ_{ij}, K_{ij}) . Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε "bulk constraint violations". Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης αυτού του είδους παραβίασης των constraints, λόγου χάρι:

- Constraint projection: όταν η απόκλιση από τους περιορισμούς αυξηθεί πέραν ενός ορίου, οι περιορισμοί επιλύονται εκ νέου ή καλύτερα οι δυναμικές μεταβλητές "προβάλλονται" στην πλησιέστερη υπερεπιφάνεια που ικανοποιεί τους περιορισμούς
- Fully constrained evolution: σε κάθε χρονική στιγμή ο προσδιορισμός ορισμένων δυναμικών μεταβλητών γίνεται από τις εξισώσεις των περιορισμών
- Dynamical constraint control: δυναμική τροποποίηση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης με τρόπο που να ελαχιστοποιεί την απόκλιση από τα constraints (π.χ. με προσθήκη βοηθητικών δυναμικών μεταβλητών που προσδίδουν υπολογιστική ευστάθεια ή όρων απόσβεσης ώστε η απόκλιση από τους περιορισμούς να φθίνει με την πάροδο του χρόνου)

(ii) Παραβίαση των περιορισμών από τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο χρονοειδές σύνορο του πεδίου ολοκλήρωσης, οι οποίες αναφέρονται ως "constraint-violating boundary conditions". Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η παραβίαση των constraints να επεκτείνεται από το σύνορο σε όλο το πεδίο ολοκλήρωσης. Η εξομάλυνση μιας τέτοιας παραβίασης των περιορισμών επιτυγχάνεται με την επιλογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών που διατηρούν τους περιορισμούς (constraint-preserving boundary conditions) π.χ Sommerfeld boundary conditions, SAT (Summation-By-Parts Simultaneous Approximation Term), CP-SAT (Constraint-Preserving SAT), Freezing the Constraints, Radial/Time derivative method. Επιπλέον μπορεί να γίνει κατάλληλη τροποποίηση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης με την προσθήκη όρων απόσβεσης (Constraint Damping) ώστε η απόκλιση από τα constraints να εξασθενίζει και να μην διαδίδεται στο πεδίο ολοκλήρωσης.



Σχήμα 4.7.1: Η L_2 νόρμα της ποσότητας \mathcal{H} που παριστάνει την απόκλιση από το Hamiltonian constraint ως συνάρτηση του χρόνου. Τα αρχικά δεδομένα αντιστοιχούν σε κύμα Teukolsky στη γραμμικοποιημένη βαρύτητα. Στο διάγραμμα συγκρίνονται διάφορες constraint-preserving συνοριακές συνθήκες όπως οι συνηθισμένες συνοριακές συνθήκες Sommerfeld και οι εξειδικευμένοι αλγόριθμοι SAT και CP-SAT. [38]

Εναλλακτικά, αντί να χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τον υπολογισμό των (γ_{ij}, K_{ij}) σε κάθε υπερεπιφάνεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες (fully constrained scheme) ή μερικές (partially constrained scheme) από τις τέσσερις εξισώσεις των περιορισμών για τον προσδιορισμό κάποιων εκ των 12 συνιστωσών του ζεύγους (γ_{ij}, K_{ij}) σε κάθε χρονικό βήμα. Οι υπόλοιπες συνιστώσες προκύπτουν κατά τα γνωστά με χρήση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης ADM-York.

Το πλεονέκτημα της περιορισμένης-δεσμευμένης χρονικής εξέλιξης είναι ότι εξασφαλίζει την ισχύ (στα όρια της αριθμητικής ακρίβειας) όλων ή μερικών εκ των περιορισμών σε κάθε χρονικό βήμα. Το μειονέκτημα ωστόσο μιας τέτοιας τεχνικής είναι ότι η επαναλαμβανόμενη επίλυση των εξισώσεων των περιορισμών σε κάθε βήμα είναι υπολογιστικά πολύ κοστοβόρα, μιας και οι εξισώσεις των περιορισμών είναι ελλειπτικές. Για τον λόγο αυτό η δεσμευμένη χρονική εξέλιξη δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη και αξιοποιείται κυρίως για τη μοντελοποίηση χαμηλοδιάστατων χωρόχρονων (2D) και χωρόχρονων με γνωστές συμμετρίες, δηλαδή χωρόχρονων που διαθέτουν για παράδειγμα αξονική ή σφαιρική συμμετρία.

5

Κατασκευή Αρχικών Δεδομένων

Προτού ξεκινήσει η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης, χρειάζεται προφανώς να προσδιορίσουμε τις αρχικές τιμές των δυναμικών μεταβλητών (γ_{ij}, K_{ij}) την χρονική στιγμή t_0 δηλαδή πάνω σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} . Τα αρχικά δεδομένα πρέπει να είναι συμβατά αφενός με τις εξισώσεις των περιορισμών στην αρχική υπερεπιφάνεια και αφετέρου με τον αστροφυσικό χωρόχρονο που επιθυμούμε να μελετήσουμε, να αντιστοιχούν δηλαδή σε ένα στιγμιότυπο του υπό μελέτη αστροφυσικού συστήματος π.χ. δυαδικό σύστημα μελανών οπών ή σύστημα αστέρων νετρονίων.

Ορισμός 5.1: Αρχικά δεδομένα - Initial data

Αρχικά δεδομένα για το πρόβλημα Cauchy των εξισώσεων Einstein ορίζεται το σύνολο $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ με Σ_{t_0} μια λεία τρισδιάστατη χωροειδής υπερεπιφάνεια Cauchy, γ μια Riemannian μετρική στην Σ_{t_0} και \mathbf{K} ένας συμμετρικός τανυστής 2ης τάξης στην Σ_{t_0} .

Ένας καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος (M, g) λέμε ότι επιδέχεται αρχικά δεδομένα $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ αν η Σ_{t_0} μπορεί να εμβαπτιστεί στον M ως μια υποπολλαπλότητα με επαγόμενη μετρική γ και εξωτερική καμπυλότητα \mathbf{K} οι οποίες ικανοποιούν τους περιορισμούς για δεδομένο τανυστή ενέργειας ορμής T του (M, g) . Ο χωρόχρονος (M, g) ονομάζεται **ανάπτυγμα Cauchy** (Cauchy development) ή απλά ανάπτυγμα (development) των αρχικών δεδομένων $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

"Δεδομένης μιας αρχικής χωροειδούς υπερεπιφάνειας (Cauchy) Σ_{t_0} που περιέχει κατανομή ύλης (ρ, j_i) , να βρεθεί μια Riemannian μετρική γ και ένας συμμετρικός τανυστής 2ης τάξης \mathbf{K} που να αποτελούν αντίστοιχα την επαγόμενη μετρική και την εξωτερική καμπυλότητα της Σ_{t_0} , δηλαδή να ικανοποιούν τον Χαμιλτονιανό περιορισμό (4.5.6) και τους περιορισμούς ορμής (4.5.7)."

Εφόσον λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και βρεθεί ένα σύνολο αρχικών δεδομένων, είναι προφανές ότι το ανάπτυγμα (M, g) που αντιστοιχεί στα αρχικά δεδομένα δεν είναι μοναδικό. Μάλιστα υπάρχουν άπειρα τέτοια αναπτύγματα, ένα για κάθε εύλογη επιλογή βαθμίδας. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσο είναι δυνατό να συνδυάσουμε αυτά τα διαφορετικά αναπτύγματα για να δημιουργήσουμε ένα "μεγιστικό" ανάπτυγμα, όπου με τον όρο μεγιστικό εννοούμε ότι το ανάπτυγμα αυτό δεν μπορεί να εμβαπτιστεί σε κάποιο μεγαλύτερο ανάπτυγμα. Η απάντηση είναι θετική και δόθηκε το 1969 όταν η Y. Choquet-Bruhat και ο R. Geroch [18] απέδειξαν την καθολική ύπαρξη ενός μοναδικού μεγιστικού αναπτύγματος Cauchy για κάθε σύνολο αρχικών δεδομένων των εξισώσεων Einstein στο κενό.

Σημείωση: Το θεώρημα των Choquet-Bruhat & Geroch μπορεί υπό προϋποθέσεις να επεκταθεί και σε χωρόχρονους που περιέχουν ύλη, δηλαδή χωρόχρονους (M, g) που αποτελούν λύση των εξισώσεων Einstein για δεδομένο τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\alpha\beta}$. Ο (M, g) είναι το ανάπτυγμα Cauchy των αρχικών δεδομένων $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις των περιορισμών με όρους ύλης (ρ, j_i) .

Αναγκαία συνθήκη είναι τα πεδία της ύλης να ικανοποιούν καλά-τοποθετημένες υπερβολικές εξισώσεις κίνησης και ο αντίστοιχος ταυυστής ενέργειας-ορμής να ικανοποιεί ορισμένες εύλογες φυσικές (αιτιακές) απαιτήσεις π.χ. dominant energy condition. Τέτοια πεδία είναι τα βαθμωτά πεδία Klein-Gordon, ηλεκτρομαγνητικά πεδία και βαροτροπικά ρευστά.

Θεώρημα 5.1: Choquet-Bruhat & Geroch: Ύπαρξη και μοναδικότητα αναπτύγματος Cauchy

Έστω αρχικά δεδομένα $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ όπου οι συνιστώσες γ_{ij} και K_{ij} ικανοποιούν τις εξισώσεις των περιορισμών στο κενό. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός χωρόχρονος (M, g) (μέχρι μια ισομετρία) ο οποίος ονομάζεται **μεγιστικό ανάπτυγμα Cauchy** (maximal Cauchy development) των αρχικών δεδομένων $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$, τέτοιος ώστε:

1. (M, g) είναι λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό
2. (M, g) είναι καθολικά υπερβολικός με επιφάνεια Cauchy την Σ_{t_0}
3. Η Σ_{t_0} έχει επαγόμενη μετρική γ και εξωτερική καμπυλότητα \mathbf{K} μέσα στον (M, g)

Κάθε άλλος χωρόχρονος (M', g') που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3) είναι ισομετρικός με ένα υποσύνολο του (M, g) . Δηλαδή υπάρχει διαφορομορφισμός $\phi : M \rightarrow M'$ τέτοιος ώστε $\phi^* g' = g$, οπότε λέμε πως οι χωρόχρονοι $(M, g), (M', g')$ είναι ισομετρικοί (έχουν την ίδια γεωμετρία).

Με βάση τη διατύπωση του προβλήματος αρχικών τιμών, είναι φανερό ότι για την κατασκευή αρχικών δεδομένων $(\Sigma_{t_0}, \gamma, \mathbf{K})$ απαιτείται η επίλυση των 4 ελλειπτικών εξισώσεων που προνοούν τα constraints:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \quad (5.0.1)$$

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i \quad (5.0.2)$$

Αφότου επιλυθούν οι πιο πάνω 4 εξισώσεις, πρέπει στη συνέχεια να προσδιοριστούν κατά βούληση 4 συνιστώσες γ_{ij}, K_{ij} ως συναρτήσεις βαθμίδας που σχετίζονται με την επιλογή συντεταγμένων. Έχουμε ταυτοποιήσει τις συναρτήσεις βαθμίδας με το lapse α και τις συνιστώσες β^i του shift vector όμως κατ' ακρίβεια τα μεγέθη αυτά καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο οι συντεταγμένες εξελίσσονται στον χρόνο. Στο παρόν στάδιο καλούμαστε να επιλέξουμε τις αρχικές συντεταγμένες πάνω στην υπερπιφάνεια Σ_{t_0} γεγονός που αφορά αποκλειστικά τα μεγέθη γ_{ij} και K_{ij} που ορίζονται στην Σ_{t_0} , έτσι η ελευθερία επιλογής αρχικών συντεταγμένων ισοδυναμεί με την επιλογή 4 συνιστωσών γ_{ij}, K_{ij} . Μένουν λοιπόν $12 - 8 = 4$ απροσδιόριστες συνιστώσες δηλαδή 2 απροσδιόριστα ζεύγη (γ_{ij}, K_{ij}) . Οι δύο αυτοί απροσδιόριστοι δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις δύο δυνατές πλώσεις ενός βαρυτικού κύματος.

Ανακεφαλαιώνοντας, οφείλουμε να επιλέξουμε αυθαίρετα 8 συνιστώσες και να λύσουμε τις 4 εξισώσεις των περιορισμών για να βρούμε τις υπόλοιπες. Στην παρούσα μορφή τους ωστόσο, οι εξισώσεις ADM-York δεν υποδεικνύουν ποιες συνιστώσες θα υπολογιστούν επιλύοντας τους περιορισμούς και ποιες θα επιλεγούν ελεύθερα. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κάποιο φυσικό κριτήριο που να ξεχωρίζει τα αρχικά δεδομένα που επιλέγουμε ελεύθερα (free data) και τα αρχικά δεδομένα που προκύπτουν ως λύση των περιορισμών (5.0.1)-(5.0.2) και καλούνται δεσμευμένα δεδομένα (constrained data). Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να πραγματοποιήσουμε τη λεγόμενη "σύμμορφη αποδόμηση" (comformal decomposition) των 3+1 μεγεθών κατά York-Lichnerowicz, η οποία προσδιορίζει με φυσικό τρόπο τα ελεύθερα και τα δεσμευμένα αρχικά δεδομένα.

5.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί - Conformal transformations

Ορισμός 5.2: Σύμμορφος μετασχηματισμός - Conformal transformation

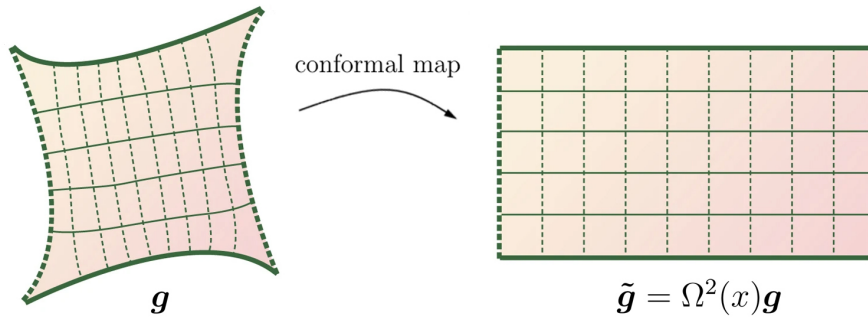
Έστω (M, g) μια n -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα με Lorentzian μετρική g . Ο σύμμορφος μετασχηματισμός (conformal transform/map) ορίζεται ως η ακόλουθη ανακλιμάκωση της μετρικής:

$$g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = \Omega^2(x)g_{\alpha\beta}(x) \quad (5.1.1)$$

όπου $\Omega(x)$, $x \equiv x^\mu$, είναι μια λεία, θετική βαθμωτή συνάρτηση στον M που λέγεται **σύμμορφος παράγοντας** (conformal factor). Η μετρική g καλείται φυσική (physical) μετρική ενώ η \tilde{g} μη-φυσική (unphysical) μετρική ή σύμμορφη μετρική (conformal metric).

Σημείωση: Ένας χωρόχρονος (M, g) ονομάζεται σύμμορφα επίπεδος (conformally flat) αν η μετρική του συνδέεται με τη μετρική Minkowski μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού: $g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta}$.

Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν τις γωνίες μεταξύ διανυσμάτων και άρα τις γωνίες μεταξύ των προσανατολισμένων ολοκληρωτικών τους γραμμών. Επομένως οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν τη δομή των κώνων φωτός και κατ' επέκταση την αιτιακή δομή μιας πολλαπλότητας (όμως εν γένει δεν διατηρούν χωροχρονικές αποστάσεις, εμβαδά και όγκους). Συνεπώς δύο χωρόχρονοι (M, g) και (M, \tilde{g}) όπου $\tilde{g} = \Omega^2(x)g$ έχουν την ίδια αιτιακή δομή.



Σχήμα 5.1.1: Ο σύμμορφος μετασχηματισμός απεικονίζει τον χωρόχρονο με μετρική g στον χωρόχρονο με (επίπεδη) μετρική $\tilde{g} = \Omega^2 g$, διατηρώντας τις γωνίες μεταξύ προσανατολισμένων καμπυλιών. Συνεπώς οι δύο χωρόχρονοι έχουν την ίδια αιτιακή δομή.

Με βάση τον πιο πάνω ορισμό, θεωρούμε έναν σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής γ της αρχικής υπερεπιφάνειας με σύμμορφο παράγοντα $\psi = \psi(x) > 0$, $x = (t, x^i)$:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (5.1.2)$$

όπου $\tilde{\gamma}_{ij}$ είναι οι συνιστώσες της σύμμορφης μετρικής της αρχικής υπερεπιφάνειας, τις οποίες θεωρούμε γνωστές διότι όπως θα δούμε στη συνέχεια, τις εκλαμβάνουμε ως ελεύθερα αρχικά δεδομένα. Επιλέξαμε να γράψουμε τον παράγοντα ψ στην τέταρτη δύναμη διότι είναι βολικό για τη μετέπειτα απλοποίηση πράξεων. Με την απαίτηση $\tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}_{kj} = \delta^i_j$ βρίσκουμε τον αντίστροφο της σχέσης (5.1.2):

$$\gamma^{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \quad (5.1.3)$$

όπου $\tilde{\gamma}^{ij}$ είναι οι συνιστώσες του αντίστροφου της σύμμορφης μετρικής. Από την ιδιότητα της ορίζουσας $\det(\kappa A) = \kappa^n \det(A)$ όπου A ένας $n \times n$ πίνακας και κ μια σταθερά, έχουμε $\det(\gamma_{ij}) = (\psi^4)^3 \det(\tilde{\gamma}_{ij})$ οπότε:

$$\gamma = \psi^{12} \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \psi = \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \right)^{1/12} \quad (5.1.4)$$

Τονίζουμε ότι στο σημείο αυτό, δεν υποθέτουμε κάποια συγκεκριμένη τιμή για την ορίζουσα της σύμμορφης μετρικής (σε αντίθεση με τον BSSN φορμαλισμό όπου $\tilde{\gamma} = 1$). Ο προσδιορισμός του σύμμορφου παράγοντα ψ είναι ισοδύναμος, μέσω της πιο πάνω σχέσης, με την επιλογή του στοιχείου όγκου της σύμμορφης χωρικής υπερεπιφάνειας καθώς οδηγεί σε μια συγκεκριμένη τιμή για την ορίζουσα $\tilde{\gamma}$ της σύμμορφης μετρικής. Επομένως ο σύμμορφος παράγοντας φέρει τον βαθμό ελευθερίας που σχετίζεται με την ορίζουσα $\tilde{\gamma}$ της σύμμορφης μετρικής (scaling degree of freedom), αφήνοντας τη σύμμορφη μετρική με πέντε βαθμούς ελευθερίας (shape of the spatial geometry). Ουσιαστικά λοιπόν, με τον σύμμορφο μετασχηματισμό $\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}$ χωρίζουμε τους 6 βαθμούς ελευθερίας της φυσικής μετρικής σε κλίμακα-στοιχείο όγκου (1 βαθμός ελευθερίας - ψ) και σε σχήμα (5 βαθμοί ελευθερίας - $\tilde{\gamma}_{ij}$).

5.2 Σύμμορφη αποδόμηση κατά York-Lichnerowicz - York-Lichnerowicz conformal decomposition

5.2.1 Σύμμορφη σύνδεση - Conformal connection

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε τις εξισώσεις ADM-York στη γλώσσα των σύμμορφων μεγεθών που ορίσαμε. Πρέπει λοιπόν να δούμε πως η φυσική αφινική σύνδεση, που αντιστοιχεί στην φυσική χωρική μετρική μετρική γ , σχετίζεται με τη σύμμορφη αφινική σύνδεση της $\tilde{\gamma}$.

Σχόλιο: Στο εξής θα παραλείπουμε τον δείκτη "(3)" για τρισδιάστατους τανυστές/μεγέθη που περιγράφουν τις υπερεπιφάνειες, οπότε θα συμβολίζουμε ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \equiv \Gamma_{jk}^i$, ${}^{(3)}R_{ij} \equiv R_{ij}$ κ.ο.κ.

Πρόταση 5.1: Σχέση Γ_{jk}^i και $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$

Τα 3D σύμβολα Christoffel της σύνδεσης Levi-Civita D συνδέονται με τα σύμμορφα 3D σύμβολα Christoffel της σύμμορφης σύνδεσης Levi-Civita \tilde{D} σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i + 2(\delta_j^i \partial_k \ln \psi + \delta_k^i \partial_j \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \partial_l \ln \psi) \quad (5.2.1)$$

$$= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + 2(\delta_j^i \tilde{D}_k \ln \psi + \delta_k^i \tilde{D}_j \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{il} \tilde{D}_l \ln \psi) \quad (5.2.2)$$

όπου $\tilde{D}_i \ln \psi = \partial_i \ln \psi$ αφού η ψ είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Απόδειξη: Από τον ορισμό των 3D συμβόλων Christoffel σε συντεταγμένες x^i :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{im} (\partial_j \gamma_{km} + \partial_k \gamma_{mj} - \partial_m \gamma_{jk}) \quad (5.2.3)$$

Αντικαθιστώντας $\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}$ και $\gamma^{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij}$ έχουμε:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{im} [\partial_j (\psi^4 \tilde{\gamma}_{km}) + \partial_k (\psi^4 \tilde{\gamma}_{mj}) - \partial_m (\psi^4 \tilde{\gamma}_{jk})]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}\psi^{-4}\psi^4\tilde{\gamma}^{im}(\partial_j\tilde{\gamma}_{km} + \partial_k\tilde{\gamma}_{mj} - \partial_m\tilde{\gamma}_{jk}) + \frac{1}{2}\psi^{-4}\tilde{\gamma}^{im}(\tilde{\gamma}_{km}\partial_j\psi^4 + \tilde{\gamma}_{mj}\partial_k\psi^4 - \tilde{\gamma}_{jk}\partial_m\psi^4) \\
 &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + \frac{1}{2}\psi^{-4}\tilde{\gamma}^{im} \cdot 4\psi^3(\tilde{\gamma}_{km}\partial_j\psi + \tilde{\gamma}_{mj}\partial_k\psi - \tilde{\gamma}_{jk}\partial_m\psi) \\
 &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + \frac{2}{\psi}(\delta_k^i\partial_j\psi + \delta_j^i\partial_k\psi - \tilde{\gamma}_{jk}\tilde{\gamma}^{im}\partial_m\psi) \\
 &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i + 2(\delta_k^i\partial_j \ln \psi + \delta_j^i\partial_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk}\tilde{\gamma}^{im}\partial_m \ln \psi)
 \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{im}(\partial_j\tilde{\gamma}_{km} + \partial_k\tilde{\gamma}_{mj} - \partial_m\tilde{\gamma}_{jk})$ τα σύμμορφα 3D σύμβολα Christoffel.

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η σύμμορφη συναλλοίωτη παράγωγος της σύνδεσης Levi-Civita \tilde{D} είναι συμβατή με τη σύμμορφη μετρική:

$$\tilde{D}_i\tilde{\gamma}_{jk} = 0 \quad (5.2.4)$$

Η σύμμορφη χωρική συναλλοίωτη παράγωγος εκφράζεται με χρήση των $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ συμβόλων Christoffel, για παράδειγμα η δράση της στο χωρικό διάνυσμα V δίνει:

$$\tilde{D}_jV^i = \partial_jV^i + \tilde{\Gamma}_{jk}^iV^k \quad (5.2.5)$$

Η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_jV^i &= D_jV^i - \Gamma_{jk}^iV^k + \tilde{\Gamma}_{jk}^iV^k \\
 D_jV^i &= \tilde{D}_jV^i + (\Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i)V^k \\
 D_jV^i &= \tilde{D}_jV^i + C_{jk}^iV^k
 \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

όπου ορίσαμε:

$$C_{jk}^i \equiv \Gamma_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i = 2(\delta_k^i\tilde{D}_j \ln \psi + \delta_j^i\tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk}\tilde{\gamma}^{im}\tilde{D}_m \ln \psi) \quad (5.2.7)$$

τις συνιστώσες του σύμμορφου τανυστή (conformal tensor) ο οποίος προκύπτει από τη διαφορά των συμβόλων Christoffel των δύο συνδέσεων και είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των δύο κάτω δεικτών του. Με παρόμοιο συλλογισμό, μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχέση (5.2.6) σε χωρικούς τανυστές T τάξης (r, s) που ορίζονται στη χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ_t . Γενικά, η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος D_k του εν λόγω τανυστή συνδέεται με τη σύμμορφη παράγωγο \tilde{D}_k σύμφωνα με τη σχέση:

$$D_kT^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \tilde{D}_kT^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} + \sum_{n=1}^r C_{kl}^{i_n}T^{i_1\dots l\dots i_r}_{j_1\dots j_s} - \sum_{n=1}^s C_{kj_n}^lT^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots l\dots j_s} \quad (5.2.8)$$

5.2.2 Σύμμορφος τανυστής Ricci & βαθμωτό Ricci - Conformal Ricci tensor & Ricci scalar

Προχωράμε τώρα στη συσχέτιση του φυσικού τανυστή Ricci και του φυσικού βαθμωτού Ricci (που υπολογίζονται από τη φυσική μετρική γ_{ij}) με τα σύμμορφα ομολογά τους (που υπολογίζονται από τη σύμμορφη μετρική $\tilde{\gamma}_{ij}$). Η συσχέτιση αυτή είναι απαραίτητη ώστε να γράψουμε τις 3+1 εξισώσεις με όρους σύμμορφων ποσοτήτων.

Πρόταση 5.2: Σχέση $R_{ij} - \tilde{R}_{ij}$ και $R - \tilde{R}$

Η σχέση που συνδέει τον φυσικό R_{ij} και σύμμορφο \tilde{R}_{ij} τανυστή Ricci είναι:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{D}_k C^k_{ij} - \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{ij} C^l_{lk} - C^k_{il} C^l_{kj} \quad (5.2.9)$$

$$= \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{\gamma}^i_j \tilde{D}_m \tilde{D}^m \ln \psi + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi - 4\tilde{\gamma}^i_j \tilde{D}_m \ln \psi \tilde{D}^m \ln \psi \quad (5.2.10)$$

Η σχέση που συνδέει το φυσικό R και σύμμορφο \tilde{R} βαθμωτό Ricci είναι:

$$R = \psi^{-4} \tilde{R} - 8\psi^{-5} \tilde{D}^2 \psi \quad (5.2.11)$$

όπου ορίσαμε τον σύμμορφο τελεστή Laplace: $\tilde{D}^2 \equiv \tilde{D}_i \tilde{D}^i = \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j$

Απόδειξη: Από την ταυτότητα Ricci που ορίζει τον 3D τανυστή Riemann, έχουμε:

$$D_j D_i V^j - D_i D_j V^j = R^j_{kji} V^k = R_{ki} V^k \quad (5.2.12)$$

Αντικαθιστούμε τις φυσικές χωρικές συναλλοιώτες παραγώγους με σύμμορφες βάσει της (5.2.8):

$$\begin{aligned} R_{ij} V^j &= D_j (D_i V^j) - D_i (D_j V^j) \\ &= \tilde{D}_j (D_i V^j) + C^j_{jl} D_i V^l - C^l_{ji} D_l V^j - \tilde{D}_i (D_j V^j) \\ &= \tilde{D}_j (\tilde{D}_i V^j + C^j_{ik} V^k) + C^j_{jl} (\tilde{D}_i V^l + C^l_{ik} V^k) - C^l_{ji} (\tilde{D}_l V^j + C^j_{lk} V^k) - \tilde{D}_i (\tilde{D}_j V^j + C^j_{jk} V^k) \\ &= \tilde{D}_j \tilde{D}_i V^j + V^k \tilde{D}_j C^j_{ik} + \cancel{C^j_{ik} \tilde{D}_j V^k} + \cancel{C^j_{jl} \tilde{D}_i V^l} + C^j_{jl} C^l_{ik} V^k - \cancel{C^l_{ij} \tilde{D}_l V^j} - C^l_{ij} C^j_{lk} V^k \\ &\quad - \tilde{D}_i \tilde{D}_j V^j - V^k \tilde{D}_i C^j_{jk} - \cancel{C^j_{jk} \tilde{D}_i V^k} \\ &\stackrel{j \leftrightarrow k}{=} (\tilde{D}_j \tilde{D}_i V^j - \tilde{D}_i \tilde{D}_j V^j) + V^j \tilde{D}_k C^k_{ij} - V^j \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{kl} C^l_{ij} V^j - C^l_{ik} C^k_{lj} V^j \\ &= \tilde{R}_{ij} V^j + V^j \tilde{D}_k C^k_{ij} - V^j \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{kl} C^l_{ij} V^j - C^l_{ik} C^k_{lj} V^j \end{aligned}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει για κάθε V^j οπότε απαλείφοντάς το καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{D}_k C^k_{ij} - \tilde{D}_i C^k_{kj} + C^k_{ij} C^l_{lk} - C^k_{il} C^l_{kj} \quad (5.2.13)$$

Να επισημάνουμε ότι η πιο πάνω σχέση έχει γενική ισχύ, είναι δηλαδή ο γενικός τύπος που συνδέει τους τανυστές Ricci δύο συνδέσεων με C^i_{jk} να παριστάνει τη διαφορά ανάμεσα στα σύμβολα Christoffel των δύο συνδέσεων. Για την εξαγωγή της δεν υποτίθεται κάποια σχέση (π.χ σύμμορφος μετασχηματισμός) μεταξύ των δύο μετρικών στις οποίες αντιστοιχούν οι δύο συνδέσεις.

Θα εξειδικεύσουμε τη σχέση αυτή στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, όπου οι μετρικές συνδέονται με τον σύμμορφο μετασχηματισμό $\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}$ ο οποίος οδηγεί στην έκφραση $C^i_{jk} = 2(\delta^i_k \tilde{D}_j \ln \psi + \delta^i_j \tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{im} \tilde{D}_m \ln \psi)$. Να σημειώσουμε ότι:

$$\begin{aligned} C^k_{kj} &= 2(\delta^k_k \tilde{D}_j \ln \psi + \delta^k_j \tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{km} \tilde{D}_m \ln \psi) \\ &= 2(3\tilde{D}_j \ln \psi + \tilde{D}_j \ln \psi - \delta^m_j \tilde{D}_m \ln \psi) \\ &= 6\tilde{D}_j \ln \psi \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Επομένως $\tilde{D}_i C^k_{kj} = 6\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi$ και επίσης:

$$\tilde{D}_k C^k_{ij} = 2(\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi + \tilde{D}_j \tilde{D}_i \ln \psi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi) = 4\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi \quad (5.2.15)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι της σύνδεσης Levi-Civita \tilde{D} μετατίθενται όταν δρουν σε βαθμωτές συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στη (5.2.13) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} + 4\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi - 6\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi \\ &\quad + 12(\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi + \tilde{D}_j \ln \psi \tilde{D}_i \ln \psi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \ln \psi \tilde{D}_m \ln \psi) \\ &\quad - 4(\delta^k_i \tilde{D}_l \ln \psi + \delta^k_l \tilde{D}_i \ln \psi - \tilde{\gamma}_{il} \tilde{\gamma}^{km} \tilde{D}_m \ln \psi)(\delta^l_k \tilde{D}_j \ln \psi + \delta^l_j \tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{lm} \tilde{D}_m \ln \psi) \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις και απλοποιώντας όμοιους όρους καταλήγουμε:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \ln \psi \tilde{D}_m \ln \psi \quad (5.2.16)$$

Για τον υπολογισμό του βαθμωτού Ricci, πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $\gamma^{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij}$

$$\begin{aligned} R &= \gamma^{ij} R_{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{R}_{ij} - 2\psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi + 4\psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi \\ &\quad - 4\psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^m \ln \psi \tilde{D}_m \ln \psi \\ &= \psi^{-4} \tilde{R} - 2\psi^{-4} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi - 6\psi^{-4} \tilde{D}^m \tilde{D}_m \ln \psi + 4\psi^{-4} \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi - 12\psi^{-4} \tilde{D}^m \ln \psi \tilde{D}_m \ln \psi \\ &= \psi^{-4} \tilde{R} - 8\psi^{-4} (\tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi + \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Τώρα παρατηρούμε πως

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi = \tilde{D}_i \left(\frac{\tilde{D}^i \psi}{\psi} \right) = \frac{1}{\psi} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi - \frac{1}{\psi^2} \tilde{D}_i \psi \tilde{D}^i \psi = \frac{1}{\psi} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi - \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi$$

Δηλαδή ισχύει $\tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi + \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi = \frac{1}{\psi} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi$ και αντικαθιστώντας στη (5.2.17) βρίσκουμε τελικά ότι το βαθμωτό Ricci γράφεται:

$$R = \psi^{-4} \tilde{R} - 8\psi^{-5} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi \quad (5.2.18)$$

Εισάγοντας το βαθμωτό Ricci στον Χαμιλτονιανό περιορισμό (5.0.1) λαμβάνουμε:

$$8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} - \psi^5 K^2 + \psi^5 K_{ij} K^{ij} = -16\pi \psi^5 \rho \quad (5.2.19)$$

Στο εξής θα θεωρήσουμε τις συνιστώσες $\tilde{\gamma}_{ij}$ της σύμμορφης μετρικής ως ελεύθερα δεδομένα, τα οποία επιλέγουμε αυθαίρετα και άρα θεωρούνται γνωστά. Με αυτή την υπόθεση και δεδομένης της εξωτερικής καμπυλότητας K_{ij} και της πυκνότητας ενέργειας ρ , η εξίσωση (5.2.19) εκλαμβάνεται ως μια ελλειπτική εξίσωση τύπου Poisson για τον σύμμορφο παράγοντα ψ .

5.2.3 Σύμμορφη αποδόμηση της εξωτερικής καμπυλότητας - Conformal decomposition of the extrinsic curvature

Έχουμε θεωρήσει μέχρι στιγμής έναν σύμμορφο μετασχηματισμό για τη χωρική μετρική, άρα είναι αναμενόμενο ότι θα αποδομήσουμε με σύμμορφο τρόπο και την εξωτερική καμπυλότητα. Χωρίζουμε

πρώτα τις συνιστώσες K_{ij} της εξωτερικής καμπυλότητας της αρχικής υπερεπιφάνειας στο άιχνο κομμάτι A_{ij} και στο ίχνος $K = \gamma^{ij} K_{ij}$ (μέση καμπυλότητα) του τανυστή \mathbf{K} :

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K \quad (5.2.20)$$

Ορίζουμε με άλλα λόγια έναν άιχνο χωρικό τανυστή \mathbf{A} , ο οποίος είναι συμμετρικός και έχει συνιστώσες:

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K \quad (5.2.21)$$

Επαληθεύουμε ότι εκ κατασκευής ο τανυστής \mathbf{A} είναι άιχνος:

$$A = \gamma^{ij} A_{ij} = \gamma^{ij} K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma^{ij}\gamma_{ij}K = K - K = 0 \quad (5.2.22)$$

Θα θεωρήσουμε τις A_{ij} και K ως ανεξάρτητες συναρτήσεις, οι οποίες φέρουν τους βαθμούς ελευθερίας του τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας. Έπειτα θα πάρουμε ξεχωριστά σύμμορφους μετασχηματισμούς για τα A_{ij} και το K , χρησιμοποιώντας κατάλληλους σύμμορφους παράγοντες οι οποίοι θα προσδιοριστούν με κριτήριο να απλοποιούνται οι εκφράσεις των περιορισμών. Θεωρούμε λοιπόν δύο γενικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς:

$$A^{ij} = \psi^\alpha \tilde{A}^{ij} \quad (5.2.23)$$

$$K = \psi^\beta \tilde{K} \quad (5.2.24)$$

όπου α, β εκθέτες προς προσδιορισμό. Γνωρίζουμε ότι στους περιορισμούς ορμής υπεισέρχεται ένας όρος απόκλισης της εξωτερικής καμπυλότητας, $D_j K^{ij}$ ο οποίος με την αποδόμηση που θεωρήσαμε θα μετατραπεί σε απόκλιση του τανυστή \mathbf{A} , δηλαδή $D_j A^{ij}$.

$$\begin{aligned} D_j A^{ij} &= D_j(\psi^\alpha \tilde{A}^{ij}) = \tilde{A}^{ij} D_j \psi^\alpha + \psi^\alpha D_j \tilde{A}^{ij} = \tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \psi^\alpha + \psi^\alpha (\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} + C^i_{jk} \tilde{A}^{kj} + C^j_{jk} \tilde{A}^{ik}) \\ &= \tilde{D}_j(\psi^\alpha \tilde{A}^{ij}) + 2\psi^\alpha \tilde{A}^{kj} (\delta^i_k \tilde{D}_j \ln \psi + \delta^i_j \tilde{D}_k \ln \psi - \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{\gamma}^{im} \tilde{D}_m \ln \psi) + 6\psi^\alpha \tilde{A}^{ik} \tilde{D}_k \ln \psi \\ &= \tilde{D}_j(\psi^\alpha \tilde{A}^{ij}) + 2\psi^\alpha (\tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \ln \psi + \tilde{A}^{ik} \tilde{D}_k \ln \psi - \underbrace{\tilde{\gamma}_{jk} \tilde{A}^{kj} \tilde{\gamma}^{im} \tilde{D}_m \ln \psi}_0) + 6\psi^\alpha \tilde{A}^{ik} \tilde{D}_k \ln \psi \\ &= \tilde{D}_j(\psi^\alpha \tilde{A}^{ij}) + 10\psi^\alpha \tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \ln \psi \\ &= \tilde{D}_j(\psi^\alpha \tilde{A}^{ij}) + 10\psi^{\alpha-1} \tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \psi \\ &= \psi^{-10} \tilde{D}_j(\psi^{\alpha+10} \tilde{A}^{ij}) \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Η πιο πάνω σχέση μας προτρέπει να επιλέξουμε την τιμή $\alpha = -10$ για σκοπούς απλοποίησης, η οποία αντιστοιχεί στο λεγόμενο "Momentum-constraint scaling". Με αυτή την επιλογή:

$$A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij} \quad (5.2.26)$$

Ισοδύναμα, πολλαπλασιάζοντας με την ποσότητα $\gamma_{ik}\gamma_{jl} = \psi^8 \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}_{jl}$ για να κατεβάσουμε τους δείκτες, έχουμε:

$$A_{ij} = \psi^{-2} \tilde{A}_{ij} \quad (5.2.27)$$

Θέτοντας $\alpha = -10$ οι αποκλίσεις των A_{ij} και \tilde{A}_{ij} συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$D_j A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} \quad (5.2.28)$$

οπότε $D_j A^{ij} = 0$ αν και μόνο αν $\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} = 0$.

Για να βρούμε τον εκθέτη β , γράφουμε τους περιορισμούς ορμής με όρους σύμμορφων μεγεθών:

$$\begin{aligned} D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) &= 8\pi j^i \\ D_j \left(A^{ij} - \frac{2}{3} \gamma^{ij} K \right) &= 8\pi j^i \\ D_j A^{ij} - \frac{2}{3} \gamma^{ij} D_j K &= 8\pi j^i \\ \psi^{-10} \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \gamma^{ij} \tilde{D}_j K &= 8\pi j^i \\ \psi^{-10} \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} (\beta \psi^{\beta-1} \tilde{K} \tilde{D}_j \psi + \psi^\beta \tilde{D}_j \tilde{K}) &= 8\pi j^i \\ \psi^{-10} \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \beta \psi^{\beta-5} \tilde{K} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j \psi - \frac{2}{3} \psi^{\beta-4} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j \tilde{K} &= 8\pi j^i \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την πιο πάνω έκφραση, επιλέγουμε $\beta = 0$ οπότε η μέση καμπυλότητα K παραμένει σύμμορφα αναλλοίωτη (conformal invariant):

$$K = \tilde{K} \quad (5.2.30)$$

Εφόσον η μέση καμπυλότητα είναι βαθμωτό μέγεθος, η χωρική συναλλοίωτη παράγωγος ανάγεται στη μερική παράγωγο. Δεν υπάρχει λοιπόν κάποιο πλεονέκτημα στο να μετασχηματίσουμε τη μέση καμπυλότητα, αντιθέτως ένας τέτοιος σύμμορφος μετασχηματισμός θα εισήγαγε περισσότερους όρους στις εξισώσεις των περιορισμών. Συνεπώς αφήνουμε την K ως έχει.

Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός, με τη σύμμορφη αποδόμηση $K^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K$ όπου $A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij}$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} 8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} + \psi^5 \left(A_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) \left(A^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \right) - \psi^5 K^2 &= -16\pi \psi^5 \rho \\ 8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} + \psi^5 \left(A_{ij} A^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) - \psi^5 K^2 &= -16\pi \psi^5 \rho \\ 8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} + \psi^{-7} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^5 K^2 &= -16\pi \psi^5 \rho \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Οι περιορισμοί ορμής προκύπτουν άμεσα από τη (5.2.29) θέτοντας $\beta = 0$

$$\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K = 8\pi \psi^{10} j^i \quad (5.2.32)$$

Σημείωση: Σε ορισμένες περιπτώσεις, για να εξασφαλίσουμε τη μοναδικότητα των λύσεων των περιορισμών, χρειάζεται να κάνουμε μια σύμμορφη ανακλιμάκωση των όρων ύλης-ενέργειας ρ και j^i .

5.3 Conformal transverse-traceless (CTT) decomposition

Ο σκοπός του conformal transverse-traceless (CTT) decomposition είναι να αναλύσει τον τανυστή \tilde{A} κατά τρόπο που να καταδεικνύει ποιες συνιστώσες του μπορούν να προσδιοριστούν από τους περιορισμούς ορμής. Αυτό επιτρέπει τη μετατροπή των περιορισμών ορμής (5.2.32) σε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους, οι οποίοι μαζί με τον σύμμορφο παράγοντα ψ (που προκύπτει ως λύση του Χαμιλτονιανού περιορισμού) θα αποτελούν τα δεσμευμένα αρχικά δεδομένα.

Οι εξισώσεις των περιορισμών όντας ελλειπτικής φύσεως, αφορούν μόνο το διάμηκες (longitudinal) κομμάτι ενός δυναμικού πεδίου όπως το \tilde{A} ενώ το εγκάρσιο (transverse) κομμάτι παραμένει ελεύθερο (δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας). Χρειάζεται επομένως να αναλύσουμε περαιτέρω τις συνιστώσες \tilde{A}^{ij} αξιοποιώντας μια γενίκευση του θεωρήματος Helmholtz, το οποίο αναφέρει ότι κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο F γράφεται ως άθροισμα μιας εγκάρσιας (με μηδενική απόκλιση) συνιστώσας και μιας διαμήκουσας (με μηδενικό στροβιλισμό) συνιστώσας: $F = F_T + F_L$. Γενικεύοντας το θεώρημα Helmholtz σε τανυστές 2ης τάξης, παίρνουμε την πιο κάτω πρόταση:

Πρόταση 5.3: Longitudinal & Transverse-traceless decomposition

Κάθε συμμετρικός, άιχνος τανυστής 2ης τάξης με συνιστώσες S^{ij} μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα ενός εγκάρσιου (με μηδενική απόκλιση) συμμετρικού άιχνου τανυστή S_{TT}^{ij} και ενός διαμήκουσας συμμετρικού άιχνου τανυστή S_L^{ij} , ο οποίος προκύπτει από τη δράση του διαμήκουσας τελεστή L σε ένα διανυσματικό δυναμικό W :

$$S^{ij} = S_{TT}^{ij} + S_L^{ij} = S_{TT}^{ij} + (LW)^{ij} \quad (5.3.1)$$

όπου L είναι ο διαμήκουσας τελεστής (longitudinal operator) ή σύμμορφος τελεστής Killing (conformal Killing operator) του οποίου η δράση στο διανυσματικό πεδίο W ορίζεται:

$$(LW)^{ij} \equiv D^i W^j + D^j W^i - \frac{2}{3} \gamma^{ij} D_k W^k \quad (5.3.2)$$

Ο 2ης τάξης τανυστής LW λέγεται σύμμορφη μορφή Killing (conformal Killing form) που σχετίζεται με το διανυσματικό δυναμικό W .

Εφαρμόζουμε την πιο πάνω πρόταση για να αναλύσουμε τον \tilde{A}^{ij} σε εγκάρσιο και διάμηκες κομμάτι (όπου και τα δύο είναι συμμετρικά, άιχνα):

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + \tilde{A}_L^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{L}W)^{ij} \quad (5.3.3)$$

όπου το εγκάρσιο κομμάτι έχει εξ' ορισμού μηδενική απόκλιση:

$$\tilde{D}_j \tilde{A}_{TT}^{ij} = 0 \quad (5.3.4)$$

και μηδενικό ίχνος

$$\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{A}_{TT}^{ij} = 0 \quad (5.3.5)$$

Το διαμήκες κομμάτι εκφράζεται μέσω του conformal Killing operator \tilde{L} που αντιστοιχεί στη σύνδεση \tilde{D} της σύμμορφης μετρικής $\tilde{\gamma}$.

$$\tilde{A}_L^{ij} = (\tilde{L}W)^{ij} = \tilde{D}^i W^j + \tilde{D}^j W^i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_k W^k \quad (5.3.6)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι με τον τρόπο που τον ορίσαμε, ο τανυστής $(\tilde{L}W)^{ij}$ είναι συμμετρικός και άιχνος.

Με βάση αυτή την ανάλυση, η απόκλιση του \tilde{A}^{ij} γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} &= \tilde{D}_j \tilde{A}_L^{ij} = \tilde{D}_j (\tilde{L}W)^{ij} \\ &= \tilde{D}_j \left(\tilde{D}^i W^j + \tilde{D}^j W^i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_k W^k \right) \\ &= \tilde{D}_j \tilde{D}^i W^j + \tilde{D}_j \tilde{D}^j W^i - \frac{2}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k W^k \\ &= \tilde{R}^i_k W^k + \tilde{D}^i \tilde{D}_j W^j + \tilde{D}_j \tilde{D}^j W^i - \frac{2}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k W^k \\ &= \tilde{D}_j \tilde{D}^j W^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j W^j + \tilde{R}^i_j W^j \equiv \tilde{\Delta}_L W^i \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Ορίζουμε τον σύμμορφο διανυσματικό τελεστή Laplace (conformal vector Laplacian), ο οποίος συμβολίζεται $\tilde{\Delta}_L$, ως τον εξής δεύτερης τάξης ελλειπτικό διαφορικό τελεστή:

$$\tilde{\Delta}_L W^i \equiv \tilde{D}_j (\tilde{L}W)^{ij} = \tilde{D}_j \tilde{D}^j W^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j W^j + \tilde{R}^i_j W^j \quad (5.3.8)$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της ανάλυσης του \tilde{A}^{ij} σε διαμήκη και εγκάρσια συνιστώσα είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μοναδικής λύσης στην εξίσωση τύπου Poisson (5.3.8), για τις συνιστώσες W^i . Αποδεικνύεται [4] ότι για τις περιπτώσεις που παρουσιάζουν φυσικό ενδιαφέρον, δηλαδή:

- (i) η υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} είναι κλειστή (συμπαγής χωρίς σύνορο)
- (ii) η υποπολλαπλότητα (Σ_{t_0}, γ) είναι ασυμπτωτικά επίπεδη (με τη συνθήκη $\partial_k \partial_l \tilde{\gamma}_{ij} = \mathcal{O}(r^{-3})$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Cantor)

μπορούμε πράγματι να πραγματοποιήσουμε την ανάλυση $\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + \tilde{A}_L^{ij}$ με μοναδικό τρόπο.

Εξετάσαμε πώς προκύπτει το διαμήκες κομμάτι του \tilde{A}^{ij} οπότε θα μελετήσουμε τώρα πώς κατασκευάζεται το εγκάρσιο κομμάτι \tilde{A}_{TT}^{ij} . Η κατασκευή ενός εγκάρσιου τανυστή δηλαδή ενός τανυστή με μηδενική απόκλιση, όπως ο \tilde{A}_{TT}^{ij} που είναι επίσης συμμετρικός και άιχνος, γίνεται ξεκινώντας από έναν γενικό συμμετρικό άιχνο τανυστή \tilde{M}^{ij} . Το εγκάρσιο κομμάτι του \tilde{M}^{ij} το θέτουμε να είναι ίσο με τη ζητούμενη συνιστώσα \tilde{A}_{TT}^{ij} :

$$\tilde{A}_{TT}^{ij} = \tilde{M}_{TT}^{ij} = \tilde{M}^{ij} - (\tilde{L}Y)^{ij} \quad (5.3.9)$$

όπου Y είναι ένα διανυσματικό δυναμικό το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε. Η διαφορική εξίσωση που πρέπει να επιλυθεί για τον υπολογισμό των συνιστωσών Y^i προκύπτει αν πάρουμε την απόκλιση του \tilde{M}^{ij} και ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα που οδήγησαν στην (5.3.7):

$$\tilde{\Delta}_L Y^i = \tilde{D}_j \tilde{M}^{ij} = \tilde{D}_j \tilde{D}^j Y^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j Y^j + \tilde{R}^i_j Y^j \quad (5.3.10)$$

5.3.1 CTT εκδοχή των περιορισμών - CTT form of the constraints

Από την ανάλυση της εξωτερικής καμπυλότητας στον άιχνο τανυστή A_{ij} και στο ίχνος της K (μέση καμπυλότητα) και τον μετέπειτα σύμμορφο μετασχηματισμό $A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij}$ καταλήξαμε στις σχέσεις (5.2.31), (5.2.32) για τον Χαμιλτονιανό περιορισμό και τους περιορισμούς ορμής αντίστοιχα. Είδαμε ότι με την CTT ανάλυση $\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij}$. Η απόκλιση του \tilde{A}^{ij} που εμφανίζεται στους περιορισμούς ορμής, γράφεται τώρα $\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} = \tilde{\Delta}_L W^i$. Συνεπώς οι περιορισμοί ορμής γράφονται ως ένα σύστημα συζευγμένων ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων για τις τρεις συνιστώσες W^i , $i = 1, 2, 3$ του διανυσματικού δυναμικού:

$$\tilde{\Delta}_L W^i - \frac{2}{3} \psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K = 8\pi \psi^{10} j^i \quad (5.3.11)$$

Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός παραμένει ως έχει, αποτελεί δηλαδή μια μη-γραμμική ελλειπτική εξίσωση για τον σύμμορφο παράγοντα ψ , η οποία ονομάζεται εξίσωση Lichnerowicz:

$$8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} + \psi^{-7} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^5 K^2 = -16\pi \psi^5 \rho \quad (5.3.12)$$

όπου πρέπει τώρα να θυμόμαστε ότι $\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij}$.

Αυτό που έχουμε πετύχει με τη σύμμορφη αποδόμηση των δυναμικών μεταβλητών μέσω του Conformal Transverse-Traceless (CTT) decomposition, είναι ότι έχουμε απομονώσει τις 4 δεσμευμένες μεταβλητές που προσδιορίζονται μέσω των περιορισμών, οι οποίες είναι:

- 1 σύμμορφος παράγοντας ψ (επίλυση Hamiltonian constraint)
- 3 συνιστώσες W^i του διανυσματικού δυναμικού (επίλυση Momentum constraints)

Οι ελεύθερες μεταβλητές, τα δεδομένα δηλαδή που επιλέγονται αυθαίρετα στη Σ_{t_0} , είναι:

- 5 συνιστώσες $\tilde{\gamma}_{ij}$ της σύμμορφης μετρικής
- 1 βαθμωτή συνάρτηση που αντιστοιχεί στη μέση καμπυλότητα K
- 2 συνιστώσες \tilde{A}_{TT}^{ij} για το σύμμορφο, εγκάρσιο και άιχνο κομμάτι της εξωτερικής καμπυλότητας

μαζί βέβαια με τους όρους ρ, j^i που αφορούν στο ενεργειακό περιεχόμενο του υπό μελέτη αστροφυσικού χωρόχρονου. Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα του CTT decomposition στο πιο κάτω εδάφιο.

Conformal Transverse-Traceless (CTT) decomposition

Δεδομένων των ελεύθερων μεταβλητών $\tilde{\gamma}_{ij}$, \tilde{A}_{TT}^{ij} , K και των πηγών ύλης-ενέργειας ρ, j^i , που επιλέγονται ανάλογα με τα (αστρο)φυσικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη χωρόχρονου, οι εξισώσεις των περιορισμών στα πλαίσια του CTT decomposition είναι:

(A) Χαμιλτονιανός περιορισμός (Εξίσωση Lichnerowicz):

$$8\tilde{D}^2 \psi - \psi \tilde{R} + \psi^{-7} [\tilde{A}_{ij}^{TT} + (\tilde{\mathbf{L}}W)_{ij}] [\tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij}] - \frac{2}{3} \psi^5 K^2 = -16\pi \psi^5 \rho \quad (5.3.13)$$

ο οποίος εκλαμβάνεται ως μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson για τον σύμμορφο παράγοντα ψ

(B) Περιορισμοί ορμής:

$$\tilde{\Delta}_L W^i - \frac{2}{3}\psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K = 8\pi\psi^{10} j^i \quad (5.3.14)$$

οι οποίοι εκλαμβάνονται ως τρεις ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις συνιστώσες W^i , $i = 1, 2, 3$ του διανυσματικού δυναμικού

Μετά την επίλυση του συστήματος (5.3.13)-(5.3.14) η φυσική λύση για τις μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) που περιγράφουν την Σ_{t_0} επανακτάται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (5.3.15)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} [\tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij}] + \frac{1}{3}\gamma^{ij} K \quad (5.3.16)$$

Σημείωση: Όπως είδαμε, η κατασκευή ενός τανυστή με μηδενική απόκλιση, δηλαδή ενός εγκάρσιου τανυστή, δεν είναι τετριμμένη. Κατ' ακρίβεια, για να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες \tilde{A}_{TT}^{ij} που θα χρησιμοποιηθούν ως ελεύθερες μεταβλητές, γράφουμε: $\tilde{A}_{TT}^{ij} = \tilde{M}^{ij} - (\tilde{\mathbf{L}}Y)^{ij}$ όπου \tilde{M}^{ij} οι συνιστώσες ενός γενικού συμμετρικού άιχνου τανυστή και Y^i οι συνιστώσες ενός διανυσματικού δυναμικού το οποίο οφείλουμε να προσδιορίσουμε από την εξίσωση $\tilde{\Delta}_L Y^i = \tilde{D}_{ij} \tilde{M}^{ij}$. Μπορούμε λοιπόν να ενσωματώσουμε αυτή την ανάλυση σε μια εναλλακτική εκδοχή των CTT περιορισμών, γράφοντας:

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij} = \tilde{M}^{ij} - (\tilde{\mathbf{L}}Y)^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}W)^{ij} = \tilde{M}^{ij} + [\tilde{\mathbf{L}}(W - Y)]^{ij} = \tilde{M}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}V)^{ij} \quad (5.3.17)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα του τελεστή $\tilde{\mathbf{L}}$ και ορίσαμε $\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{Y}$. Αντί των \tilde{A}_{TT}^{ij} , ελεύθερες μεταβλητές είναι τώρα οι συνιστώσες \tilde{M}^{ij} που είναι ευκολότερο να κατασκευαστούν ενώ το διανυσματικό δυναμικό προς προσδιορισμό είναι το \mathbf{V} .

Η CTT αποδόμηση των περιορισμών με αυτές τις μεταβλητές δίνει την εξίσωση:

$$8\tilde{D}^2\psi - \psi\tilde{R} + \psi^{-7}[\tilde{M}_{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}V)_{ij}][\tilde{M}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}V)^{ij}] - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 = -16\pi\psi^5 \rho \quad (5.3.18)$$

για τον Χαμιλτονιανό περιορισμό και τις εξισώσεις:

$$\tilde{\Delta}_L V^i + \tilde{D}_j \tilde{M}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K = 8\pi\psi^{10} j^i \quad (5.3.19)$$

για τους περιορισμούς ορμής. Οι πιο πάνω συζευγμένες εξισώσεις των περιορισμών λύνονται ως προς ψ, V^i αφότου καθοριστούν οι ελεύθερες μεταβλητές $\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{M}^{ij}, K$ και οι πηγές ρ, j^i .

5.4 Αρχικά δεδομένα που περιγράφουν μελανές οπές - Black Hole Initial Data

5.4.1 Αρχικά δεδομένα μελανής οπής Schwarzschild - Schwarzschild black hole initial data

Σε αυτή την ενότητα θα αναζητήσουμε λύσεις των εξισώσεων των περιορισμών στα πλαίσια του CTT decomposition, οι οποίες θα οδηγήσουν σε αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν στον χωρόχρονο Schwarzschild γύρω από μία μελανή οπή. Θα θεωρήσουμε δηλαδή την περίπτωση του ασυμπτωτικά επίπεδου κενού χωρόχρονου γύρω από μια σφαιρική κατανομή ύλης, οπότε $\rho = 0$ και $j^i = 0$.

Επιπρόσθετα, επιλέγουμε:

$$\tilde{A}_{TT}^{ij} = 0 \quad (5.4.1)$$

η οποία είναι μια συνηθισμένη επιλογή καθότι ελαχιστοποιεί τη βαρυτική ακτινοβολία (junk radiation) που περιέχεται στην αρχική υπερεπιφάνεια, μιας και οι δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας (βαρυτικά κύματα) είναι συνυφασμένοι με τους βαθμούς ελευθερίας του \tilde{A}_{TT}^{ij} . Ακόμη, επιλέγουμε τη συνθήκη "maximal slicing" για την αρχική υπερεπιφάνεια, απαιτούμε δηλαδή να έχει τέτοιο σχήμα που να μεγιστοποιεί τον 3-όγκο της (maximal hypersurface). Αυτό είναι ισοδύναμο με τον μηδενισμό της μέσης καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας:

$$K = 0 \quad (5.4.2)$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι η φυσική χωρική μετρική γ της αρχικής υπερεπιφάνειας είναι σύμμορφα επίπεδη (conformally flat), πράγμα που σημαίνει ότι η σύμμορφη μετρική είναι επίπεδη:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij} \quad (5.4.3)$$

όπου f μια επίπεδη Riemmanian μετρική. Σημειώνουμε ότι εν γένει δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια τυχαία χωροειδής υπερεπιφάνεια είναι σύμμορφα επίπεδη, αποδεικνύεται όμως ότι οι υπερεπιφάνειες με σφαιρικά συμμετρική χωρική μετρική είναι πάντοτε σύμμορφα επίπεδες. Ένα διαγνωστικό εργαλείο που καταδεικνύει κατά πόσο μια χωρική μετρική είναι σύμμορφα επίπεδη, είναι ο τανυστής Cotton-York (γνωστός και ως τανυστής Bach):

$$B^{ij} = \varepsilon^{ikl} D_k \left(R^j_l - \frac{1}{4} R \delta^j_l \right) \quad (5.4.4)$$

με ε^{ijk} το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita. Ο πιο πάνω τανυστής μηδενίζεται αν και μόνο αν η χωρική γεωμετρία μιας 3D υπερεπιφάνειας είναι σύμμορφα επίπεδη.

Με αυτές τις παραδοχές η \tilde{D}_i ανάγεται στην επίπεδη συναλλοίωτη παράγωγο (και σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται, στη μερική παράγωγο), οπότε $\tilde{D}^2 = \Delta$ με Δ η Λαπλασιανή του επίπεδου χώρου και $\tilde{L} = L$. Επίσης εφόσον $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$ ισχύει $\tilde{R}_{ij} = 0$ άρα $\tilde{R} = 0$. Οι εξισώσεις των περιορισμών γίνονται:

$$8\Delta\psi + \psi^{-7} (LW)_{ij} (LW)^{ij} = 0 \quad (5.4.5)$$

$$\Delta_L W^i = 0 \quad (5.4.6)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις των περιορισμών έχουν αποσυσζευχθεί (λόγω της επιλογής $K = 0$) και μπορούν να λυθούν ξεχωριστά, με τις συνοριακές συνθήκες (σε σφαιρικές συντεταγμένες):

$$\psi \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (5.4.7)$$

$$W^i \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (5.4.8)$$

Οι συνοριακές συνθήκες αυτές είναι απόρροια της ασυμπτωτικά επίπεδης γεωμετρίας του χωρόχρονου. Αναλόγως της τοπολογίας της αρχικής υπερεπιφάνειας Σ_{t_0} , προκύπτουν επιπρόσθετες εσωτερικές συνοριακές συνθήκες που καθορίζουν τις λύσεις ψ, W^i .

- Αν η τοπολογία είναι $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3$, δεν προκύπτουν επιπρόσθετες συνοριακές συνθήκες και η λύση

στην (5.4.6) είναι $W^i = 0$ για κάθε i οπότε η (5.4.5) γίνεται:

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{στην } \Sigma_{t_0} \quad (5.4.9)$$

Η λύση της πιο πάνω εξίσωσης Laplace με συνοριακή συνθήκη $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$ είναι $\psi = 1$ παντού. Αυτό οδηγεί στα εξής αρχικά δεδομένα:

$$\gamma_{ij} = f_{ij}, \quad K_{ij} = 0 \quad (5.4.10)$$

Συνεπώς η αρχική υπερεπιφάνεια είναι ο επίπεδος τρισδιάστατος χώρος, δηλαδή ένα χωροειδές υπερεπίπεδο του χωρόχρονου Minkowski. Ο χωρόχρονος που αντιστοιχεί σε $K_{ij} = 0$ ονομάζεται στιγμιαία στατικός (momentarily static) ή χρονικά συμμετρικός (time symmetric) υπό την έννοια ότι το ds^2 παραμένει αναλλοίωτο όταν $t \rightarrow -t$.

• Αν η τοπολογία είναι $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus B$, δηλαδή ο \mathbb{R}^3 εκτός από μια μπάλα με σύνορο μια 2-σφαίρα \mathcal{S} , τότε μπορούμε να επιβάλουμε επιπλέον συνοριακές συνθήκες στην εσωτερική συνοριακή επιφάνεια \mathcal{S} . Μια απλή επιλογή εσωτερικών συνοριακών συνθηκών είναι $\mathbf{W}|_{\mathcal{S}} = 0$ και $\psi|_{\mathcal{S}} = 1$ που οδηγεί πάλι σε μια επίπεδη χωροειδή υπερεπιφάνεια του χωρόχρονου Minkowski. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν θεωρήσουμε εσωτερικές συνοριακές συνθήκες του τύπου:

$$\mathbf{W}|_{\mathcal{S}} = 0 \quad \text{και } \mathcal{S} \text{ κλειστή ελάχιστη επιφάνεια της } (\Sigma_{t_0}, \gamma) \quad (5.4.11)$$

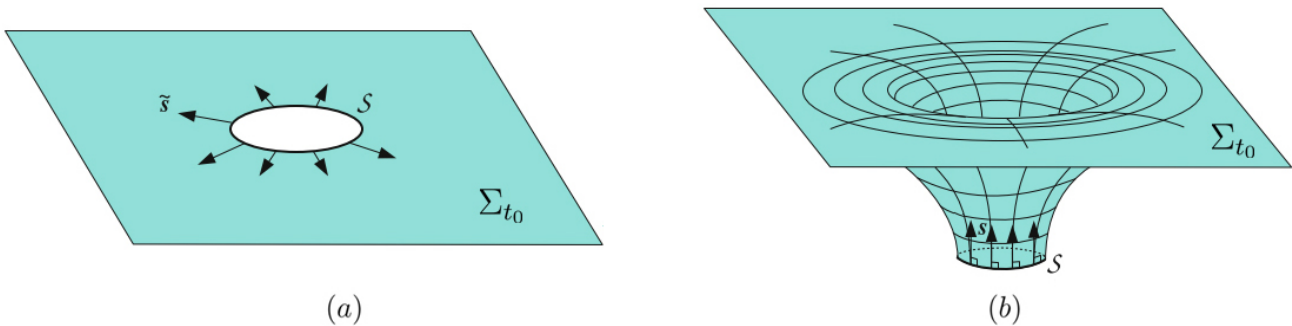
Η πρώτη δίνει $W^i = 0$. Η δεύτερη αναφέρει ότι η επιφάνεια \mathcal{S} γίνεται ελάχιστη (minimal 2-sphere όσον αφορά στον όγκο που περικλείει). Αυτό σημαίνει ότι η μέση καμπυλότητά της μηδενίζεται ή ισοδύναμα το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα s σ' αυτή έχει μηδενική απόκλιση:

$$D_i s^i|_{\mathcal{S}} = 0 \quad (5.4.12)$$

Η πιο πάνω συνθήκη γράφεται στον σύμμορφο φορμαλισμό ως:

$$\tilde{D}_i(\psi^6 s^i)|_{\mathcal{S}} = \tilde{D}_i(\psi^4 \tilde{s}^i)|_{\mathcal{S}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{f} \psi^4 \tilde{s}^i \right) \Big|_{\mathcal{S}} = 0 \quad (5.4.13)$$

με $\tilde{s}^i = \psi^2 s^i$ οι συνιστώσες του σύμμορφου μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \tilde{s} στη \mathcal{S} και $f = \det(f_{ij})$.



Σχήμα 5.4.1.1: Αρχική 3D υπερεπιφάνεια $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus B$ όπου B μπάλα με σύνορο τη 2-σφαίρα \mathcal{S} (εδώ αναπαριστάται ως κύκλος), η οποία έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα s ως προς τη φυσική μετρική γ και $\tilde{s} = \psi^2 s$ ως προς τη σύμμορφη μετρική $\tilde{\gamma}$. (α): Εμβάπτιση της $(\Sigma_{t_0}, \tilde{\gamma})$ στον χωρόχρονο όπου $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$ με f_{ij} οι συνιστώσες της επίπεδης ευκλείδειας μετρικής του \mathbb{R}^3 . (β): Εμβάπτιση της (Σ_{t_0}, γ) στον χωρόχρονο με $\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij}$. Παρατηρούμε ότι $D_i s^i|_{\mathcal{S}} = 0$, δηλαδή η \mathcal{S} είναι ελάχιστη επιφάνεια της (Σ_{t_0}, γ) .

Θεωρώντας τώρα σφαιρικές συντεταγμένες $x^i = (r, \theta, \varphi)$ και ότι η \mathcal{S} είναι σφαίρα ακτίνας $r = b$, $\tilde{s}^i = (1, 0, 0)$ και $f_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin \theta)$, η συνθήκη $\mathcal{S} =$ ελάχιστη επιφάνεια, ισοδυναμεί με την ακόλουθη μεικτή (τύπου Newmann/Dirichlet) συνοριακή συνθήκη:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\psi^4 r^2) \Big|_{r=b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{2r} \right) \Big|_{r=b} = 0 \quad (5.4.14)$$

Η πιο πάνω εσωτερική συνοριακή συνθήκη σε συνδυασμό με την $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$ δίνει την εξής λύση για την εξίσωση Laplace $\Delta \psi = 0$:

$$\psi = 1 + \frac{b}{r} \quad (5.4.15)$$

Απομένει ο προσδιορισμός της σταθεράς b . Θα εκφράσουμε τη σταθερά αυτή συναρτήσει της μάζας ADM που περιέχει η 3D υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} . Η μάζα ADM εκφράζει τη συνολική μάζα και ενέργεια ενός απομονωμένου βαρυτικού συστήματος με ασυμπτωτικά επίπεδη γεωμετρία, όπως τη μετράει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο άπειρο. Συνεπώς η μάζα ADM μετράει τη συνολική μάζα που περιέχεται σε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο και εν προκειμένω εφόσον ασχολούμαστε με τον χωρόχρονο Schwarzschild, η μάζα ADM ταυτίζεται με τη μάζα M της μελανής οπής Schwarzschild: $M = M_{ADM}$. Στην ψευδο-ισοτροπική βαθμίδα (quasi-isotropic gauge) που προνοεί $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1+\varepsilon})$ με $\varepsilon > 0$, η μάζα ADM της Σ_{t_0} δίνεται από τον τύπο:

$$M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} D_i \psi s^i dS \quad (5.4.16)$$

όπου S_r μια 2-σφαίρα ακτίνας r με στοιχείο επιφάνειας dS και με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα (κατευθυνόμενο προς τα έξω) που έχει συνιστώσες s^i . Για την Σ_{t_0} ο πιο πάνω τύπος δίνει:

$$M = M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{b}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = 2b \quad (5.4.17)$$

Τελικά λοιπόν γράφοντας $b = M/2$ ο σύμμορφος παράγοντας είναι:

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r} \quad (5.4.18)$$

Καταλήγουμε σε μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} με μηδενική εξωτερική καμπυλότητα (χρονικά συμμετρική):

$$K_{ij} = 0 \quad (5.4.19)$$

και χωρική μετρική:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij} = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin \theta) \quad (5.4.20)$$

η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η επαγόμενη μετρική μιας υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου του χωρόχρονου Schwarzschild, σε σφαιρικές ισοτροπικές συντεταγμένες. Πρακτικά, λύσαμε μέσω του CTT φορμαλισμού την εξίσωση Einstein στο κενό, λαμβάνοντας αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν σε μια μελανή οπή Schwarzschild. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι αυτή η διαδικασία γενικεύεται άμεσα για την κατασκευή αρχικών δεδομένων που αντιστοιχούν σε έναν αυθαίρετο αριθμό μελανών οπών Schwarzschild (αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist).

Οι ισοτροπικές σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) που περιγράφουν την $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus B$ μπορούν να

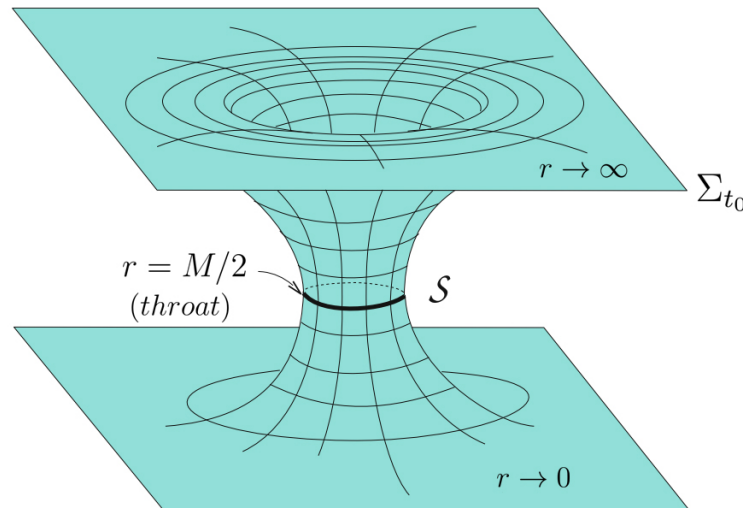
επεκταθούν με αναλυτικό τρόπο από $r \in [M/2, \infty)$ σε $r \in (0, \infty)$, όπου στη θέση $r = M/2$ βρίσκεται η ελάχιστη επιφάνεια \mathcal{S} δηλαδή ο "λαιμός" της μελανής οπής. Είναι εύκολο να δούμε ότι η νέα συντεταγμένη \hat{r} που ορίζεται:

$$\hat{r} = \frac{M^2}{4r} \quad (5.4.21)$$

καλύπτει την περιοχή $\hat{r} \in (0, M/2]$. Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων $r \rightarrow \hat{r} = M^2/4r$ είναι μια ισομετρία διότι η μετρική στη νέα περιοχή, που αποτελεί επέκταση της αρχικής υπερεπιφάνειας του χωρόχρονου Schwarzschild, ταυτίζεται με την παλιά μετρική και συγκεκριμένα:

$$dl^2 = \hat{\gamma}_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j = \left(1 + \frac{M}{2\hat{r}}\right)^4 (d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.4.22)$$

Μπορούμε να μετονομάσουμε την \hat{r} σε r ώστε η νέα εκτεταμένη συντεταγμένη $r \in (0, \infty)$ να περιγράφει την εκτεταμένη Riemannian υποπολλαπλότητα (Σ'_{t_0}, γ') με τοπολογία $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ και μετρική $\gamma'|_{\Sigma'_{t_0}} = \gamma$ με την γ' να είναι λεία στον λαιμό \mathcal{S} . Η περιοχή γύρω από την \mathcal{S} που μοιάζει με σωλήνα λέγεται γέφυρα Einstein-Rosen. Στην άλλη πλευρά του λαιμού ($r < M/2$) υπάρχει η ασυμπτωτικά επίπεδη υπερεπιφάνεια στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, που είναι ισομετρική (όμοια) με την Σ_{t_0} (ένα "παράλληλο σύμπαν" αιτιακά ασύνδετο με το δικό μας $r > M/2$) και το χωρικό της άπειρο αντιστοιχεί στην περιοχή $r \rightarrow 0$. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι η Σ'_{t_0} προκύπτει αν "κολλήσουμε" στον λαιμό \mathcal{S} της Σ_{t_0} ένα αντίγραφο της. Συνοψίζοντας, οι εκτεταμένες ισοτροπικές σφαιρικές συντεταγμένες επεκτείνουν την αρχική υπερεπιφάνεια στην (Σ'_{t_0}, γ') , καλύπτοντας τις περιοχές I και III του [διαγράμματος Kruskal-Szekeres](#).



Σχήμα 5.4.1.2: Διάγραμμα που απεικονίζει την υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου Σ'_{t_0} του χωρόχρονου Schwarzschild σε σφαιρικές ισοτροπικές συντεταγμένες (με $\theta = \pi/2$). Η ελάχιστη επιφάνεια \mathcal{S} στη θέση $r = M/2$ παριστάνει τον λαιμό της γέφυρας Einstein-Rosen ανάμεσα στις δύο ισομετρικές ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές.

5.4.2 Αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist & Misner - Brill-Lindquist & Misner initial data

Με τις συνοριακές συνθήκες που θεωρήσαμε, ο Χαμιλτονιανός περιορισμός ανάγεται σε μια εξίσωση Laplace για τον σύμμορφο παράγοντα:

$$\Delta\psi = 0 \quad (5.4.23)$$

Η Λαπλασιανή Δ είναι γραμμικός τελεστής, πράγμα που συνεπάγεται ότι ο γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσότερων λύσεων της $\Delta\psi = 0$ είναι επίσης λύση της. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα της υπέρθεσης για να κατασκευάσουμε αρχικά δεδομένα που περιγράφουν αυθαίρετο αριθμό μελανών οπών. Θεωρούμε N (μη-περιστρεφόμενες) μελανές οπές, όπου M_n η μάζα "bare mass" (χωρίς την ενέργεια αλληλεπίδρασης με άλλες οπές) της n -οστής μελανής οπής η οποία βρίσκεται (στιγμιαία) σε ηρεμία στο σημείο με συντεταγμένες x_n^i . Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το "βαρυτικό πεδίο" σε ένα σημείο x^i . Θέτουμε $r_n \equiv |x^i - x_n^i|$ την απόσταση του κέντρου της n -οστής μελανής οπής από το σημείο αναφοράς. Από την υπέρθεση των λύσεων που περιγράφουν κάθε μια μεμονωμένη μελανή οπή, παίρνουμε τα λεγόμενα αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist [46]:

$$\psi = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{M_n}{2r_n} \quad (5.4.24)$$

Η πιο πάνω λύση παρέχει τη μετρική μιας αρχικής υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου που περιέχει N μελανές οπές και ισχύει μόνο κατά την αρχική χρονική στιγμή όπου $K_{ij} = 0$ και ο χωρόχρονος είναι στιγμιαία στατικός. Τη χρονική στιγμή αυτή ο χωρόχρονος περιέχει μάζα ίση με $M_{ADM} = \sum_n M_n$. Η χρονική εξέλιξη της αρχικής υπερεπιφάνειας προκύπτει με εφαρμογή των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης που είναι μη-γραμμικές, επομένως δεν μπορούμε να ανακτήσουμε την πλήρη λύση από το άθροισμα των επιμέρους λύσεων που αφορούν μεμονωμένες μελανές οπές.

Στην περίπτωση $N = 2$, τα αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist αναπαριστούν δύο μελανές οπές που είναι αρχικά ακίνητες σε μια απόσταση $d = |x_1^i - x_2^i|$ η μία από την άλλη.

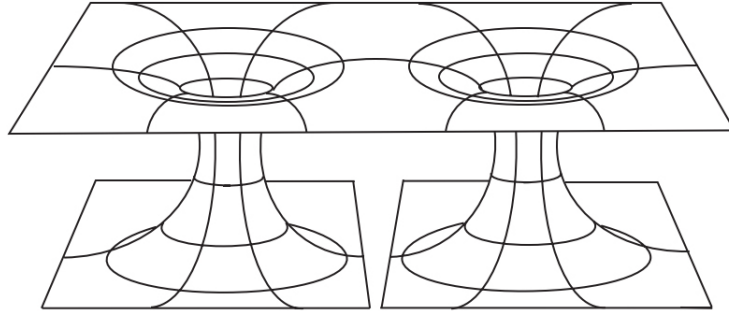
$$\psi = 1 + \frac{M_1}{2r_1} + \frac{M_2}{2r_2} \quad (5.4.25)$$

Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο αστροφυσικό ενδιαφέρον διότι η χρονική της εξέλιξη προσομοιώνει μια μετωπική σύγκρουση και συγχώνευση των δύο μελανών οπών (binary black holes), η οποία συνοδεύεται από εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Τα βαρυτικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια μακριά από το σύστημα των μελανών οπών και αυτό επαληθεύεται από τις αριθμητικές προσομοιώσεις, που καταδεικνύουν πως η ενιαία μελανή οπή που σχηματίζεται μετά τη συγχώνευση έχει μάζα μικρότερη από $M_1 + M_2$.

Τα κέντρα x_n^i των μελανών οπών είναι ιδιόμορφα και εξαιρούνται από την υποπολλαπλότητα Σ_{t_0} , η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως ο ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^3 από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει N σημεία που ονομάζονται οπές (punctures): $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O_n\}$ όπου O_n το σημείο με συντεταγμένες x_n^i .

Ο ορίζοντας κάθε μελανής οπής, με την επέκταση συντεταγμένων, παριστάνει το λαιμό μιας γέφυρας Einstein-Rosen έτσι τα αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist αναπαριστούν το δικό μας σύμπαν να συνδέεται μέσω N γεφυρών Einstein-Rosen με N ασυμπτωτικά επίπεδα "παράλληλα σύμπαντα". Εν προκειμένω τα παράλληλα σύμπαντα δεν είναι ισομετρικά με το δικό μας. Κατά συνέπεια, ένα διάγραμμα εμβάπτισης για τη λύση Brill-Lindquist ενός χωρόχρονου με N μελανές οπές μπορεί να περιέχει έως $N + 1$ μη-ισομετρικά ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα.

Brill-Lindquist initial data



Σχήμα 5.4.2.1: Διάγραμμα εμβάπτισης που απεικονίζει την υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου η οποία αντιστοιχεί σε αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist που περιγράφουν δύο στατικές μελανές οπές. Σε αυτή την τοπολογία υπάρχουν τρία μη-ισομετρικά ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα.

Ο Misner [47] κατασκεύασε αρχικά δεδομένα που περιγράφουν πάλι N στατικές μελανές οπές με ισάριθμες γέφυρες Einstein-Rosen, οι οποίες όμως καταλήγουν όλες σε ένα ασυμπτωτικά επίπεδο παράλληλο σύμπαν ισομετρικό με το δικό μας. Με άλλα λόγια, τα αρχικά δεδομένα Misner περιλαμβάνουν N γέφυρες που ενώνουν μόνο δύο ισομετρικά σύμπαντα. Η τοπολογία της Σ_{t_0} είναι ο ευκλείδειος χώρος από τον οποίο αφαιρούμε N μπάλες B_n που έχουν κέντρο το κέντρο των μελανών οπών: $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{B_n\}$. Τα αρχικά δεδομένα Misner εξάγονται με τη βοήθεια της μεθόδου σφαιρικής αντιστροφής ειδώλων (spherical inversion images) με τη χρήση τελεστών αντιστροφής J_k , $k = 1, \dots, N$ για κάθε μελανή οπή. Η λύση για τον σύμμορφο παράγοντα περιλαμβάνει μια απειροσειρά με πόλους. Παραθέτουμε τη λύση στην ειδική περίπτωση ενός χωρόχρονου με δύο μελανές οπές ίδιας μάζας κεντραρισμένες στον άξονα z σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου το χωρικό στοιχείο μήκους γράφεται:

$$dl^2 = \psi^4(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2) \quad (5.4.26)$$

με σύμμορφο παράγοντα ο οποίος, σύμφωνα με τη μέθοδο του Misner, προκύπτει [48]:

$$\psi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\mu)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + z_n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_n)^2}} \right) \quad (5.4.27)$$

όπου συμβολίσαμε $z_n \equiv \coth(n\mu)$ με μ μια ελεύθερη παράμετρος που σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος των μελανών οπών. Η παράμετρος συνδέεται με τη μάζα ADM του χωρόχρονου σύμφωνα με τον τύπο:

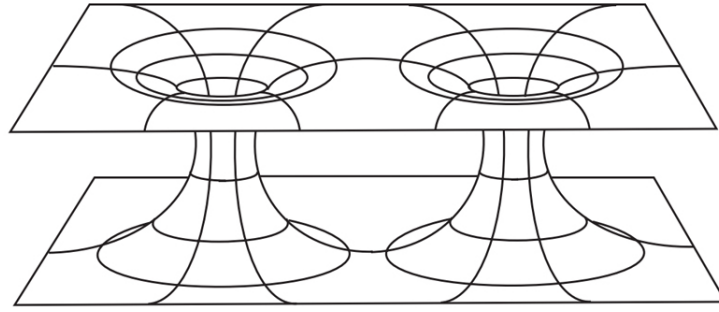
$$M_{ADM} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\mu)} \quad (5.4.28)$$

Το ιδιο-διάστημα L κατά μήκος της χωροειδούς γεωδαισιακής που συνδέει τους δύο λαιμούς προκύπτει:

$$L = 2 \left(1 + 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sinh(n\mu)} \right) \quad (5.4.29)$$

Διαπιστώνουμε ότι η παράμετρος μ καθορίζει τη μάζα και την απόσταση μεταξύ των δύο μελανών οπών και ειδικότερα καθορίζει τον λόγο L/M_{ADM} του δυαδικού συστήματος.

Misner initial data



Σχήμα 5.4.2.2: Διάγραμμα εμβάπτισης που απεικονίζει την υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου η οποία αντιστοιχεί σε αρχικά δεδομένα Misner που περιγράφουν δύο στατικές μελανές οπές. Σε αυτή την τοπολογία υπάρχουν δύο ισομετρικά ασυμπτωτικά επίπεδα σύμφωνα με δύο γέφυρες Einstein-Rosen.

5.4.3 Αρχικά δεδομένα Bowen-York - Bowen-York initial data

Στις δύο προηγούμενες ενότητες μελετούσαμε στατικές μελανές οπές σε χρονικά συμμετρικές αρχικές υπερεπιφάνειες ($K_{ij} = 0$), όπου οι περιορισμοί ορμής έδιναν $W^i = 0$ για κάθε i και σύμφωνα με τις επιλογές μας για τις ελεύθερες μεταβλητές προέκυπτε $K_{ij} = 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η γεωμετρία καθορίζεται από τη χωρική μετρική και κατ' επέκταση από τον σύμμορφο παράγοντα ψ που προκύπτει ως λύση του Χαμιλτονιανού περιορισμού. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε πιο ρεαλιστικές περιπτώσεις μελανών οπών, ειδικότερα μελανές οπές που φέρουν ορμή και στροφορμή (περιστρέφονται). Ο χωρόχρονος τώρα παύει να είναι χρονικά συμμετρικός μιας και οι Bowen και York [49] βρήκαν μη-τετριμμένες λύσεις των περιορισμών ορμής για το διανυσματικό δυναμικό W^i , έτσι η εξωτερική καμπυλότητα της αρχικής υπερεπιφάνειας δεν μηδενίζεται. Η τοπολογία της αρχικής υπερεπιφάνειας είναι ο ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος εξαιρουμένης μιας σημειακής πηγής ύλης στο σημείο O που λέγεται οπή (puncture):

$$\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \quad (5.4.30)$$

Για χωρόχρονο με κινούμενες ή και περιστρεφόμενες μελανές οπές, οι υποθέσεις μας σχετικά με τα ελεύθερα δεδομένα είναι: επίπεδη σύμμορφη μετρική $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$, μηδενικό εγκάρσιο κομμάτι του σύμμορφου άιχνου μέρους της εξωτερικής καμπυλότητας $A_{TT}^{ij} = 0$ και μεγιστικός τεμαχισμός (maximal slicing) που προνοεί $K = 0$. Θεωρούμε ακόμη ότι ο υπό μελέτη χωρόχρονος είναι κενός, οπότε $\rho = 0$ και $j^i = 0$. Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός γίνεται:

$$8\Delta\psi + \psi^{-7}(\tilde{L}W)_{ij}(\tilde{L}W)^{ij} = 0 \quad (5.4.31)$$

ενώ οι περιορισμοί ορμής αποσυσζεύγονται από τον Χαμιλτονιανό περιορισμό και σε καρτεσιανές συντεταγμένες ($\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$) λαμβάνουν τη μορφή:

$$\tilde{\Delta}_L W^i = 0 \quad \xrightarrow{\text{Cartesian}} \quad \partial^j \partial_j W^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_j W^j = 0 \quad (5.4.32)$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και οι λύσεις της W^i λέγονται λύσεις Bowen-York. Θα εξάγουμε τις λύσεις Bowen-York που περιγράφουν μεμονωμένη (i) περιστρεφόμενη και (ii) κινούμενη μελανή οπή, και λόγω της γραμμικότητας της (5.4.32) η υπέρθεση των δύο λύσεων αποτελεί τη

γενική λύση για μελανή οπή που φέρει ορμή καθώς και στροφορμή. Η γενική λύση για μία μελανή οπή επεκτείνεται ακολούθως σε συστήματα πολλών μελανών οπών, με εφαρμογή πάλι της αρχής της υπέρθεσης, με την κάθε οπή να φέρει τη δική της ορμή και στροφορμή.

Πρόταση 5.4: Λύση Bowen-York για περιστρεφόμενη (rotating) μελανή οπή

Η εξίσωση των περιορισμών ορμής (5.4.32) επιδέχεται τη λύση Bowen-York:

$$W^i = \varepsilon^{ijk} \frac{x_j}{r^3} J_k \quad (5.4.33)$$

όπου $x^i = (x, y, z)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες, $r^2 = x^i x_i = x^2 + y^2 + z^2$ και J^i οι συνιστώσες ενός σταθερού (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) διανύσματος, που αντιπροσωπεύει τη στροφορμή που περιέχει η υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} (στροφορμή της μελανής οπής).

Απόδειξη:

Θα αντικαταστήσουμε $W^i = \varepsilon^{ijk} \frac{x_j}{r^3} J_k$ στην παράσταση $\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_m W^m$ για να δείξουμε ότι μηδενίζεται. Υπενθυμίζουμε ότι η σύμμορφη επίπεδη μετρική σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $f_{ij} = \delta_{ij}$ και χρησιμοποιούμε:

$$\begin{aligned} \partial_m x_j &= \delta_{mj} \\ \partial_m r &= \partial_m \sqrt{x^i x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x^i x_i}} (\delta^i_m x_i + \delta_{mi} x^i) = \frac{x_m}{r} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο του W^i :

$$\partial_m W^i = \varepsilon^{ijk} J_k \left(\frac{\partial_m x_j}{r^3} - 3 \frac{x_j}{r^4} \partial_m r \right) = \varepsilon^{ijk} J_k \left(\frac{\delta_{mj}}{r^3} - 3 \frac{x_j}{r^4} \frac{x_m}{r} \right) = \varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^3} \left(\delta_{mj} - 3 \frac{x_m x_j}{r^2} \right)$$

Τώρα για $m = i$ η πιο πάνω έκφραση δίνει:

$$\partial_i W^i = \underbrace{\varepsilon^{ijk}}_{antisym.} J_k \frac{1}{r^3} \underbrace{\left(\delta_{ij} - 3 \frac{x_i x_j}{r^2} \right)}_{sym} = 0 \quad (5.4.34)$$

όπου το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita είναι, όπως δηλώνει το όνομα του, αντισυμμετρικό στην εναλλαγή $i \leftrightarrow j$ ενώ ο όρος στην παρένθεση είναι συμμετρικός στην εναλλαγή $i \leftrightarrow j$, άρα η συστολή τους δίνει μηδέν. Άρα ο δεύτερος όρος της $\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_m W^m$ μηδενίζεται. Απομένει να δείξουμε ότι μηδενίζεται και ο πρώτος.

$$\begin{aligned} \partial^n \partial_m W^i &= \varepsilon^{ijk} J_k \frac{(-3)}{r^4} \partial^n r \left(\delta_{mj} - 3 \frac{x_m x_j}{r^2} \right) + \varepsilon^{ijk} J_k \frac{(-3)}{r^3} \partial^n \left(\frac{x_m x_j}{r^2} \right) \\ &= -3 \varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^3} \left[\frac{x^n}{r^2} \left(\delta_{mj} - 3 \frac{x_m x_j}{r^2} \right) + \frac{\delta^n_m x_j + \delta^n_j x_m}{r^2} - 2 \frac{x_m x_j x^n}{r^4} \right] \\ &= -3 \varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^5} \left(x^n \delta_{mj} - 3 \frac{x_m x_j x^n}{r^2} + \delta^n_m x_j + \delta^n_j x_m - 2 \frac{x_m x_j x^n}{r^2} \right) \\ &= -3 \varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^5} \left(x^n \delta_{mj} + x_j \delta^n_m + x_m \delta^n_j - 5 \frac{x_m x_j x^n}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Για $n = m$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\partial^m \partial_m W^i &= -3\varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^5} \left(x^m \delta_{mj} + x_j \delta_m^m + x_m \delta_j^m - 5 \frac{x_m x_j x^m}{r^2} \right) \\ &= -3\varepsilon^{ijk} J_k \frac{1}{r^5} (x_j + 3x_j + x_j - 5x_j) = 0\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η $W^i = \varepsilon^{ijk} \frac{x_j}{r^3} J_k$ ικανοποιεί την εξίσωση $\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_m W^m = 0$ άρα αποτελεί λύση Bowen-York των περιορισμών ορμής.

Έχοντας υπολογίσει τις συνιστώσες W^i του διανυσματικού δυναμικού, προσδιορίζουμε το διαμήκες κομμάτι \tilde{A}_L^{ij} δρώντας στο W με τον διαμήκη τελεστή:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_L^{ij} &= (\tilde{L}W)^{ij} = \partial^i W^j + \partial^j W^i - \underbrace{\frac{2}{3} \delta^{ij} \partial_k W^k}_0 \\ &= \partial^i \left(\varepsilon^{jmk} \frac{x_m}{r^3} J_k \right) + \partial^j \left(\varepsilon^{imk} \frac{x_m}{r^3} J_k \right) \\ &= \varepsilon^{jmk} J_k \left(\frac{\delta_m^i}{r^3} - 3 \frac{x_m x^i}{r^4} \right) + \varepsilon^{imk} J_k \left(\frac{\delta_m^j}{r^3} - 3 \frac{x_m x^j}{r^4} \right) \\ &= J_k \left(\frac{\varepsilon^{jik}}{r^3} - 3 \frac{\varepsilon^{jmk} x_m x^i}{r^5} \right) + J_k \left(\frac{\varepsilon^{ijk}}{r^3} - 3 \frac{\varepsilon^{imk} x_m x^j}{r^5} \right) \\ &= -\frac{3}{r^5} J_k x_m (\varepsilon^{jmk} x^i + \varepsilon^{imk} x^j)\end{aligned}\tag{5.4.35}$$

Η εξωτερική καμπυλότητα υπολογίζεται (υπενθυμίζουμε ότι $\tilde{A}_{TT}^{ij} = 0$ και $K = 0$):

$$K^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \overset{0}{\leftarrow} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij} = \psi^{-10} (\tilde{A}_{TT}^{ij} + \tilde{A}_L^{ij}) = -\frac{3}{r^5} J_k x_m \psi^{-10} (\varepsilon^{jmk} x^i + \varepsilon^{imk} x^j)\tag{5.4.36}$$

Αυτή είναι η εξωτερική καμπυλότητα Bowen-York που περιγράφει μια υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου στον χωρόχρονο γύρω από περιστρεφόμενη μελανή οπή. Ο σύμμορφος παράγοντας ψ προσδιορίζεται από τον χαμιλτονιανό περιορισμό με μεθόδους όπως η puncture method.

Πρόταση 5.5: Λύση Bowen-York για κινούμενη (boosted) μελανή οπή

Η εξίσωση των περιορισμών ορμής (5.4.32) επιδέχεται τη λύση Bowen-York:

$$W^i = -\frac{1}{4r} \left(7P^i + \frac{x^i}{r^2} x_k P^k \right)\tag{5.4.37}$$

όπου $x^i = (x, y, z)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες, $r^2 = x^i x_i = x^2 + y^2 + z^2$ και P^i οι συνιστώσες ενός σταθερού (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) διανύσματος, που αντιπροσωπεύει την ορμή που περιέχει η υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} (ορμή της μελανής οπής).

Απόδειξη:

Όπως προηγουμένως, θα αντικαταστήσουμε $W^i = -\frac{1}{4r}\left(7P^i + \frac{x^i}{r^2}x_k P^k\right)$ στην παράσταση $\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3}\partial^i \partial_m W^m$ για να δείξουμε ότι μηδενίζεται.

$$\begin{aligned}\partial_m W^i &= \frac{x_m}{4r^3}\left(7P^i + \frac{x^i}{r^2}x_k P^k\right) - \frac{P^k}{4r}\left(\frac{\delta^i_m x_k + x^i \delta_{mk}}{r^2} - 2\frac{x^i x_k x_m}{r^4}\right) \\ &= \frac{1}{4r^3}\left(7x_m P^i + \frac{x^i x_k x_m}{r^2}P^k - P^k x_k \delta^i_m - P^k x^i \delta_{mk} + 2P^k \frac{x^i x_k x_m}{r^2}\right) \\ &= \frac{1}{4r^3}\left(7x_m P^i + 3\frac{x^i x_k x_m}{r^2}P^k - P^k x_k \delta^i_m - P_m x^i\right)\end{aligned}$$

Για $i = m$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\partial_m W^m &= \frac{1}{4r^3}\left(7x_m P^m + 3\frac{x^m x_k x_m}{r^2}P^k - P^k x_k \delta^m_m - P_m x^m\right) \\ &= \frac{1}{4r^3}\left(7x_m P^m + 3x_k P^k - 3x_k P^k - P_m x^m\right) \\ &= \frac{3}{2r^3}x_m P^m\end{aligned}$$

Η δεύτερης τάξης μερική παράγωγος ισούται με:

$$\begin{aligned}\partial^n \partial_m W^i &= \frac{-3x^n}{4r^5}\left(7x_m P^i + 3\frac{x^i x_k x_m}{r^2}P^k - P^k x_k \delta^i_m - P_m x^i\right) \\ &\quad + \frac{1}{4r^3}\left(7\delta^n_m P^i + 3\frac{\delta^{in} x_k x_m + x^i \delta^n_k x_m + x^i x_k \delta^n_m}{r^2}P^k - 6\frac{x^i x_k x_m x^n}{r^4}P^k - P^k \delta^n_k \delta^i_m - P_m \delta^{in}\right)\end{aligned}$$

Για $n = m$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\partial^m \partial_m W^i &= \frac{-3x^m}{4r^5}\left(7x_m P^i + 3\frac{x^i x_k x_m}{r^2}P^k - P^k x_k \delta^i_m - P_m x^i\right) \\ &\quad + \frac{1}{4r^3}\left(7\delta^m_m P^i + 3\frac{\delta^{im} x_k x_m + x^i \delta^m_k x_m + x^i x_k \delta^m_m}{r^2}P^k - 6\frac{x^i x_k x_m x^m}{r^4}P^k - P^k \delta^m_k \delta^i_m - P_m \delta^{im}\right) \\ &= \frac{-3}{4r^5}\left(7r^2 P^i + x^i x_k P^k\right) + \frac{1}{4r^3}\left(21P^i + 15\frac{x^i x_k}{r^2}P^k - 6\frac{x^i x_k}{r^2}P^k - 2P^i\right) \\ &= \frac{3}{2r^5}x^i x_k P^k - \frac{1}{2r^3}P^i\end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν:

$$\begin{aligned}\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3}\partial^i \partial_m W^m &= \frac{3}{2r^5}x^i x_k P^k - \frac{1}{2r^3}P^i + \frac{1}{2}P^m\left(-3x^i x_m \frac{1}{r^5} + \frac{\delta^i_m}{r^3}\right) \\ &= \frac{3}{2r^5}x^i x_k P^k - \frac{1}{2r^3}P^i - \frac{3}{2r^5}x^i x_m P^m + \frac{1}{2r^3}P^i \\ &= 0\end{aligned}$$

Επομένως η $W^i = -\frac{1}{4r}\left(7P^i + \frac{x^i}{r^2}x_k P^k\right)$ πράγματι ικανοποιεί τους περιορισμούς ορμής $\partial^m \partial_m W^i + \frac{1}{3}\partial^i \partial_m W^m = 0$ άρα αποτελεί λύση Bowen-York.

Από το πιο πάνω διανυσματικό δυναμικό υπολογίζουμε το διαμήκες κομμάτι \tilde{A}_L^{ij} δρώντας στο W με τον διαμήκη τελεστή:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_L^{ij} &= (\tilde{L}W)^{ij} = \partial^i W^j + \partial^j W^i - \frac{2}{3}\delta^{ij}\partial_k W^k \\
 &= \partial^i \left[-\frac{1}{4r} \left(7P^j + \frac{x^j}{r^2} x_k P^k \right) \right] + \partial^j \left[-\frac{1}{4r} \left(7P^i + \frac{x^i}{r^2} x_k P^k \right) \right] - \frac{\delta^{ij}}{r^3} x_k P^k \\
 &= \frac{1}{4r^3} \left(7x^i P^j + 3\frac{x^i x^j x_k}{r^2} P^k - \delta^{ij} P^k x_k - x^j P^i \right) + \frac{1}{4r^3} \left(7x^j P^i + 3\frac{x^i x^j x_k}{r^2} P^k - \delta^{ij} P^k x_k - x^i P^j \right) \\
 &\quad - \frac{\delta^{ij}}{r^3} x_k P^k \\
 &= \frac{3}{2r^3} \left[x^i P^j + x^j P^i - \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) x_k P^k \right] \tag{5.4.38}
 \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την αντίστοιχη εξωτερική καμπυλότητα:

$$K^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}_L^{ij} = \psi^{-10} \frac{3}{2r^3} \left[x^i P^j + x^j P^i - \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) x_k P^k \right] \tag{5.4.39}$$

η οποία περιγράφει την υπερεπιφάνεια σταθερού χρόνου στον χωρόχρονο γύρω από κινούμενη μελανή οπή.

Από τη γραμμικότητα των εξισώσεων των περιορισμών, η υπέρθεση των δύο λύσεων Bowen-York (για περιστρεφόμενη και κινούμενη μελανή οπή) είναι επίσης λύση Bowen-York για τους περιορισμούς ορμής. Λαμβάνουμε λοιπόν την πιο κάτω πρόταση για τη γενική λύση Bowen-York των περιορισμών ορμής σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

Πρόταση 5.6: Γενική λύση Bowen-York

Η γενική λύση Bowen-York των περιορισμών ορμής (5.4.32) είναι:

$$W^i = -\frac{1}{4r} \left(7P^i + \frac{x^i}{r^2} x_k P^k \right) + \frac{1}{r^3} \varepsilon^{ijk} x_j J_k \tag{5.4.40}$$

όπου x^i οι καρτεσιανές συντεταγμένες, $r^2 = x^i x_i$, ε^{ijk} το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita και P^i , J^i είναι έξι πραγματικές σταθερές (παράμετροι) που αντιπροσωπεύουν την ορμή και τη στροφορμή αντίστοιχα που φέρει η αρχική υπερεπιφάνεια $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ (ορμή και στροφορμή μελανής οπής).

Το σύμμορφο άιχνο κομμάτι της εξωτερικής καμπυλότητας που αντιστοιχεί στη γενική λύση Bowen-York είναι:

$$\tilde{A}^{ij} = (\tilde{L}W)^{ij} = \frac{3}{2r^3} \left[x^i P^j + x^j P^i - \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) x_k P^k \right] + \frac{3}{r^5} J_k x_m (\varepsilon^{jkm} x^i + \varepsilon^{ikm} x^j) \tag{5.4.41}$$

5.4.4 Φυσική ερμηνεία των παραμέτρων της λύσης Bowen-York - Physical interpretation of the Bowen-York solution parameters

Στην προηγούμενη παράγραφο ισχυριστήκαμε ότι οι τρεις παράμετροι P^i αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες της ορμής, ενώ οι τρεις παράμετροι J^i παριστάνουν τις συνιστώσες της στροφορμής που φέρει η υπερεπιφάνεια, που περιέχει την (μεταφορικά) κινούμενη και περιστρεφόμενη μελανή οπή. Προχωράμε στην απόδειξη του ισχυρισμού αυτού περί της φυσικής σημασίας των παραμέτρων (P^i, S^i), χρησιμοποιώντας τις έννοιες της γραμμικής ορμής ADM και της στροφορμής ADM που φέρει μια 3D υπερεπιφάνεια ενός ασυμπτωτικά επίπεδου χωρόχρονου.

Η ορμή ADM είναι μια καθολική φυσική ποσότητα που περιγράφει την ορμή που φέρει μια 3D υπερεπιφάνεια που ανήκει σε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο. Σχετίζεται με τη συμμετρία της Χαμιλτονιανής του βαρυτικού πεδίου κάτω από χωρικές μετατοπίσεις. Μετράται στο σύνορο της υπερεπιφάνειας, το οποίο θεωρούμε ως μια 2-σφαίρα με ακτίνα που τείνει στο άπειρο:

$$P_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} (K_{ij} - \delta_{ij} K) s^j dS \quad (5.4.42)$$

όπου K_{ij} η εξωτερική καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας, $K = \gamma_{ij} K^{ij}$ η μέση καμπυλότητα και S_r μια 2-σφαίρα ακτίνας r με στοιχείο επιφάνειας dS και με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα (κατευθυνόμενο προς τα έξω) που έχει συνιστώσες s^i .

Η στροφορμή ADM είναι μια καθολική φυσική ποσότητα που περιγράφει τη στροφορμή που φέρει μια 3D υπερεπιφάνεια που ανήκει σε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο. Συνδέεται με τη συμμετρία της Χαμιλτονιανής του βαρυτικού πεδίου κάτω από περιστροφές. Μετράται, κατ' αναλογία με τα άλλα ADM μεγέθη, στο σύνορο της υπερεπιφάνειας, το οποίο θεωρούμε ως μια 2-σφαίρα με ακτίνα που τείνει στο άπειρο:

$$J_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ijk} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} x^j (K^{km} - \delta^{km} K) s_m dS \quad (5.4.43)$$

με τα διάφορα μεγέθη να ορίζονται όπως στην περίπτωση της ADM ορμής.

Η εξωτερική καμπυλότητα που αντιστοιχεί στη γενική λύση Bowen-York, δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει $\tilde{A}_{TT}^{ij} = 0$ και $K = 0$, δίνεται:

$$K^{ij} = A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij} = \psi^{-10} \left\{ \frac{3}{2r^3} \left[x^i P^j + x^j P^i - \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) x_k P^k \right] + \frac{3}{r^5} J_k x_m (\varepsilon^{jkm} x^i + \varepsilon^{ikm} x^j) \right\} \quad (5.4.44)$$

Ο σύμμορφος παράγοντας ψ προκύπτει από την επίλυση του χαμιλτονιανού περιορισμού, με χρήση της puncture method. Εντούτοις για τον υπολογισμό της ορμής/στροφορμής ADM χρειαζόμαστε την εξωτερική καμπυλότητα Bowen-York μόνο στο χωρικό άπειρο της υπερεπιφάνειας όπου λόγω της ασυμπτωτικής επιπεδότητας έχουμε $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$. Άρα στο όριο $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K^{ij} = \tilde{A}^{ij} = \underbrace{\frac{3}{2r^3} \left[x^i P^j + x^j P^i - \left(\delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) x_k P^k \right]}_{\mathcal{O}(1/r^2)} + \underbrace{\frac{3}{r^5} J_k x_m (\varepsilon^{jkm} x^i + \varepsilon^{ikm} x^j)}_{\mathcal{O}(1/r^3)} \quad (5.4.45)$$

Προχωράμε στον υπολογισμό της ορμής ADM με την παρατήρηση ότι ο δεύτερος όρος της (5.4.45) που περιέχει την παράμετρο J^i φθίνει ως $1/r^3$ και δεν συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα. Σημειώνουμε ότι

σε καρτεσιανές συντεταγμένες $s^i = x^i/r$.

$$\begin{aligned} P_i^{ADM} &= \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \frac{3}{2r^3} \left[x_i P_j + x_j P_i - \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) x_k P^k \right] x^j r \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \frac{1}{r^2} (x_i x^j P_j + x^j x_j P_i) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(P_j \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{x_i x^j}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi + P_i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi \right) \end{aligned}$$

όπου:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \quad (5.4.46)$$

και:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{x_i x^j}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ij} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(x^j)^2}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ij} \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (5.4.47)$$

Άρα τελικά:

$$P_i^{ADM} = \frac{3}{16\pi} \left(\frac{4\pi}{3} P_i + 4\pi P_i \right) = P_i \quad (5.4.48)$$

Επιβεβαιώνουμε δηλαδή ότι οι τρεις παράμετροι P_i της λύσης Bowen-York ταυτίζονται με τις συνιστώσες P_i^{ADM} της ορμής ADM που περιέχει η υπερεπιφάνεια, η οποία αποδίδεται στην μελανή οπή.

Περνάμε στον υπολογισμό της στροφορμής ADM, στον οποίο δεν συνεισφέρει ο πρώτος όρος της (5.4.45) που περιέχει την παράμετρο P^i , αλλά μόνο ο όρος με J^i . Γράφουμε την υπό ολοκλήρωση βαθμωτή ποσότητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στη σφαίρα $s^i = x^i/r$ και το στοιχείο επιφανείας της σφαίρας γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Καθότι $K = 0$ παίρνουμε:

$$J_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \varepsilon_{ijk} x^j K^{kl} x_l r \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.4.49)$$

Στην έκφραση (5.4.45) για την εξωτερική καμπυλότητα στο όριο $r \rightarrow \infty$, κρατάμε μόνο τη συνεισφορά του όρου που περιέχει J^i . Έτσι οι τέσσερις πρώτοι όροι του πιο πάνω ολοκληρώματος γράφονται:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} x^j K^{kl} x_l &= \varepsilon_{ijk} x^j \frac{3}{r^5} J_m x_n x_l (\varepsilon^{kmn} x^l + \varepsilon^{lmn} x^k) = \frac{3}{r^5} J_m x_l [x^j x_n (\delta^m_i \delta^n_j - \delta^n_i \delta^m_j) x^l + \underbrace{x^j x_n \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{lmn} x^k}_0] \\ &= \frac{3}{r^5} J_i x^n x_n x^l x_l - \frac{3}{r^5} J_j x^j x_i x^l x_l = \frac{3}{r} J_i - \frac{3}{r^3} J_j x^j x_i \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} J_i^{ADM} &= \frac{3}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_r} \left(J_i - \frac{1}{r^2} J_j x^j x_i \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(J_i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi - J_j \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{x^j x_i}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{8\pi} \left(4\pi J_i - J_j \delta_{ij} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(x^j)^2}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi \right) \\
 &= \frac{3}{8\pi} \left(4\pi J_i - \frac{4\pi}{3} J_i \right) \\
 &= J_i
 \end{aligned} \tag{5.4.50}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι τρεις παράμετροι J_i της λύσης Bowen-York ταυτίζονται με τις συνιστώσες J_i^{ADM} της στροφορμής ADM που περιέχει η αρχική υπερεπιφάνεια, η οποία οφείλεται στην παρουσία της μελανής οπής.

5.4.5 Λύση του Χαμιλτονιανού περιορισμού: Puncture method

Η γενική λύση Bowen-York (5.4.40) αποτελεί μια αναλυτική λύση των εξισώσεων των περιορισμών ορμής στο κενό, για χωρόχρονο που φέρει ορμή και στροφορμή. Για να ανακατασκευάσουμε τις δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) στην αρχική υπερεπιφάνεια, χρειάζεται να υπολογίσουμε τον σύμμορφο παράγοντα ψ από τον Χαμιλτονιανό περιορισμό (5.4.5), με δεδομένο το διανυσματικό δυναμικό Bowen-York.

$$\Delta\psi + \frac{1}{8}\psi^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\psi + \frac{1}{8}\psi^{-7}(\mathbf{LW})_{ij}(\mathbf{LW})^{ij} = 0 \tag{5.4.51}$$

όπου οι συνιστώσες W^i του διανυσματικού δυναμικού δίνονται από τη γενική λύση Bowen-York (5.4.40). Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μη-γραμμική ελλειπτική διαφορική εξίσωση ως προς ψ η οποία δεν λύνεται αναλυτικά, οπότε αναζητούμε αριθμητικές λύσεις ή λύσεις που εκφράζονται ως ανάπτυγμα των παραμέτρων P^i, J^i όπου κρατάμε όρους μέχρι μια συγκεκριμένη τάξη. Εξετάζοντας τη λύση Schwarzschild $\psi = 1 + M/2r$ που προκύπτει όταν $W^i = 0$, είναι δηλαδή η λύση της ομογενούς εκδοχής της (5.4.51) (εξίσωση Laplace), αναμένουμε ότι και στην περίπτωση της μη-ομογενούς εξίσωσης ο σύμμορφος παράγοντας θα αποκλίνει στα κέντρα των μελανών οπών. Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζει μάλιστα και το διανυσματικό δυναμικό W^i της λύσης Bowen-York. Πρέπει λοιπόν να χειριστούμε κατάλληλα τις ιδιομορφίες που υπάρχουν στα κέντρα των μελανών οπών του χωρόχρονου, ώστε ο σύμμορφος παράγοντας να προκύψει ομαλός.

Η πρώτη μέθοδος λέγεται "conformal imaging" και στηρίζεται στην απαίτηση να υπάρχει "συμμετρία σε σφαιρικές αντιστροφές" (spherical inversion symmetry) γύρω από τους λαιμούς των μελανών οπών, σε αναλογία με την μέθοδο που ακολούθησε ο Misner. Εξ' ου και η μέθοδος αυτή οδηγεί σε αρχικά δεδομένα που αποτελούν γενίκευση των αρχικών δεδομένων του Misner, όπου τώρα η εξωτερική καμπυλότητα είναι η Bowen-York. Κατ' αυτό τον τρόπο αφαιρούμε από το χωρίο ολοκλήρωσης το εσωτερικό των λαιμών μελανών οπών, που περιέχει τις ιδιομορφίες, και λύνουμε την (5.4.51) μόνο στο εξωτερικό των λαιμών. Για την λύση απαιτούνται συνοριακές συνθήκες: (i) στο σύνορο της υπερεπιφάνειας, δηλαδή για $r \rightarrow \infty$ η οποία ήδη επιβάλλεται από την υπόθεση περί ασυμπτωτικής επιπεδότητας και (ii) στον λαιμό των μελανών οπών (εσωτερικές συνοριακές συνθήκες) οι οποίες προκύπτουν από την ισομετρία ανάμεσα στις ασυμπτωτικά επίπεδες υπερεπιφάνειες στις δύο μεριές του κάθε λαιμού. Συγκεκριμένα, επιβάλλεται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη μεικτού τύπου (Newmann-Dirichlet):

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=b} = - \left. \frac{\psi}{2r} \right|_{r=b} \tag{5.4.52}$$

όπου r η ακτινική συντεταγμένη από το κέντρο του λαιμού και b η ακτίνα του. Η μέθοδος του conformal imaging εφαρμόζεται στην πράξη [51] ωστόσο είναι περίπλοκη και υπολογιστικά ασύμφορη, διότι

σε κάθε λαιμό πρέπει να επιβληθούν οι εσωτερικές συνοριακές συνθήκες (5.4.52).

Η μέθοδος των οπών "puncture method" [52] είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική για την προσομοίωση ενός συστήματος πολλαπλών οπών, όπως δυαδικών συστημάτων. Βασίζεται στην παρατήρηση ότι κοντά στα κέντρα x_n^i των μελανών οπών ο όρος $\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \sim r_n^{-6}$ ενώ ο όρος ψ^{-7} με τον οποίο πολλαπλασιάζεται συμπεριφέρεται ως $\psi^{-7} \sim r_n^7$ εξομαλύνοντας την ιδιάζουσα συμπεριφορά. Έτσι συνολικά ο όρος $\psi^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \rightarrow 0$ κοντά στα κέντρα $r_n = |x^i - x_n^i| = 0$ των μελανών οπών. Η εξίσωση που πρέπει να επιλύσουμε λοιπόν κοντά στα κέντρα των μελανών οπών είναι η ομογενής εξίσωση - εξίσωση Laplace $\Delta\psi = 0$ της οποίας γνωρίζουμε την αναλυτική λύση (αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist):

$$\psi_{BL} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{M_n}{2r_n} \quad (5.4.53)$$

όπου $r_n = |x^i - x_n^i|$. Η κεντρική ιδέα της προσέγγισης puncture method είναι να γράψουμε τον ψ ως άθροισμα της ιδιάζουσας αναλυτικής λύσης ψ_{BL} της ομογενούς εκδοχής της (5.4.51) η οποία αποκλίνει στα κέντρα των μελανών οπών, συν μια ομαλή συνάρτηση u που παριστάνει την ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης για μη-μηδενική εξωτερική καμπυλότητα, αυτή της λύσης Bowen-York. Γράφουμε λοιπόν:

$$\psi = \psi_{BL} + u \quad (5.4.54)$$

Εισάγουμε αυτή τη δοκιμαστική λύση (ansatz) στη (5.4.51) ώστε να λάβουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση u :

$$\begin{aligned} \Delta(\psi_{BL} + u) + \frac{1}{8}(\psi_{BL} + u)^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} &= 0 \\ \Delta u + \frac{1}{8\psi_{BL}^7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij}\left(1 + \frac{u}{\psi_{BL}}\right)^{-7} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.55)$$

η πιο πάνω εξίσωση είναι μια μη-γραμμική ελλειπτική εξίσωση για τη συνάρτηση u , όπου πλέον όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι ομαλοί παντού. Η λύση u προκύπτει με μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης στο πεδίο \mathbb{R}^3 , χωρίς την επιβολή συνοριακών συνθηκών στα punctures. Αυτό επιβεβαιώνεται από την πιο πάνω έκφραση, διότι κοντά στις θέσεις των οπών-punctures (κέντρα των μελανών οπών) δηλαδή για $r_n \rightarrow 0$ ισχύει $\psi_{BL}^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \sim (r_n)^p = 0$ ($p = 1$ για $S_i \neq 0$ ενώ $p = 3$ για $S_i = 0$) οπότε $\Delta u = 0$ άρα στον σύμμορφο παράγοντα ψ συνεισφέρει ο όρος ψ_{BL} της λύσης Brill-Lindquist. Έτσι ο χωρόχρονος που προκύπτει από τη puncture method έχει μια ξεχωριστή ασυμπτωτικά επίπεδη υπερεπιφάνεια για κάθε μελανή οπή, κατ' αναλογία με τα αρχικά δεδομένα Brill-Lindquist.

Αν για ευκολία θέσουμε:

$$\frac{1}{f} \equiv \sum_{n=1}^N \frac{M_n}{2r_n} \quad \text{και} \quad g \equiv \frac{1}{8}f^7\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \quad (5.4.56)$$

Τότε η ισοδύναμη εξίσωση για τη συνάρτηση u είναι:

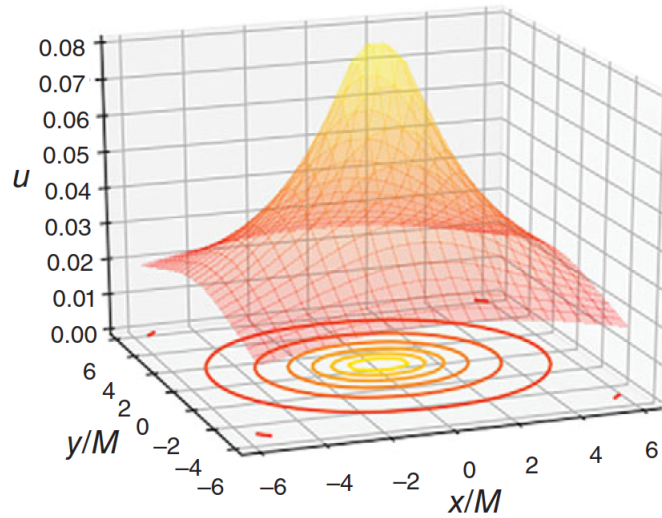
$$\Delta u = -g(f + fu + 1)^{-7} \quad (5.4.57)$$

Τέτοιου είδους ελλειπτικές εξισώσεις, της μορφής $\Delta u = h(u)$ λύνονται με τυπικές αριθμητικές μεθόδους (π.χ. linearization και έπειτα iteration, βλ. [3]). Η συνοριακή συνθήκη για τη συνάρτηση u που έπεται από τη συνθήκη ασυμπτωτικής επιπεδότητας $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$ είναι μια συνοριακή συνθήκη

τύπου Robin:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0 \quad \text{για } r \rightarrow \infty \quad (5.4.58)$$

Με αυτή τη συνοριακή συνθήκη, που συνεπάγεται $u = \mathcal{O}(r^{-1})$ καθώς $r \rightarrow \infty$, οι Brandt και Brügmann [52] έδειξαν ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις u της (5.4.57) που είναι παντού ομαλές στον \mathbb{R}^3 . Αφότου προσδιοριστεί η συνάρτηση u , ο σύμμορφος παράγοντας ψ καθίσταται γνωστός και σε συνδυασμό με το διανυσματικό δυναμικό Bowen-York (που γράφεται τώρα ως υπέρθεση δυναμικών που αναπαριστούν πολλαπλές μελανές οπές με την κάθε μια να φέρει τη δική της ορμή/στροφορμή) ανακατασκευάζουμε τη γεωμετρία της αρχικής υπερεπιφάνειας. Τα αρχικά δεδομένα που προκύπτουν από την puncture method αναπαριστούν το στιγμιότυπο ενός χωρόχρονου που περιέχει πολλαπλές μελανές οπές με κέντρα στις θέσεις x_n^i , με την n -οστή να φέρει ορμή P_n^i και στροφορμή J_n^i .



Σχήμα 5.4.5.1: Διάγραμμα της συνάρτησης u στο επίπεδο xy για μελανή οπή με ορμή $P^i/M = (1, 0, 0)$ με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η u προκύπτει με αριθμητική επίλυση της (5.4.57) με τον κώδικα `puncture.py` της [3].

5.5 Conformal thin-sandwich (CTS) decomposition

Η μέθοδος Conformal thin-sandwich (CTS) decomposition αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση για την κατασκευή αρχικών δεδομένων, πέραν της μεθόδου Conformal transverse traceless (CTT) decomposition που χρησιμοποιούσαμε μέχρι στιγμής. Προτάθηκε από τον York [53] και η βασική ιδέα πίσω από την προσέγγιση αυτή είναι ο προσδιορισμός της χωρικής μετρικής γ_{ij} σε μια υπερεπιφάνεια Σ_t καθώς και στην επόμενη απειροστά κοντινή υπερεπιφάνεια Σ_{t+dt} (οι δύο χωρικές φέτες του λεπτού sandwich), αντί των μεγεθών (γ_{ij}, K_{ij}) σε μια αρχική υπερεπιφάνεια. Ισοδύναμα, στο όριο $dt \rightarrow 0$ η μέθοδος CTS παρέχει τη χωρική μετρική γ_{ij} και τη χρονική της παράγωγο $\partial_t \gamma_{ij}$ σε μια δεδομένη υπερεπιφάνεια Σ_t .

Ορίζουμε το άιχνο κομμάτι της χρονικής παραγώγου της χωρικής μετρικής:

$$w_{ij} \equiv \gamma^{1/3} \partial_t (\gamma^{-1/3} \gamma_{ij}) = \partial_t \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{-1} \gamma_{ij} \partial_t \gamma = \partial_t \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} (\gamma^{kl} \partial_t \gamma_{kl}) \quad (5.5.1)$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε πως το u_{ij} είναι άιχνο:

$$\gamma^{ij}u_{ij} = \gamma^{ij}\partial_t\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma^{ij}\gamma_{ij}(\gamma^{kl}\partial_t\gamma_{kl}) = \gamma^{ij}\partial_t\gamma_{ij} - \gamma^{kl}\partial_t\gamma_{kl} = 0 \quad (5.5.2)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη χρονική παράγωγο $\partial_t\gamma_{ij}$ στην έκφραση του u_{ij} χρησιμοποιώντας την εξίσωση χρονικής εξέλιξης (4.5.8) και να πάρουμε:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \partial_t\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}(\gamma^{kl}\partial_t\gamma_{kl}) \\ &= -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\gamma^{kl}(-2\alpha K_{kl} + D_k\beta_l + D_l\beta_k) \\ &= -2\alpha\left(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K\right) + D_i\beta_j + D_j\beta_i - \frac{2}{3}\gamma_{ij}D_k\beta^k \\ &= -2\alpha A_{ij} + (\mathbf{L}\beta)_{ij} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Ισοδύναμα:

$$A_{ij} = \frac{1}{2\alpha}[(\mathbf{L}\beta)_{ij} - u_{ij}] \quad (5.5.4)$$

όπου όπως προηγουμένως A_{ij} το άιχνο κομμάτι της εξωτερικής καμπυλότητας και \mathbf{L} ο διαμήκης τελεστής με $(\mathbf{L}\beta)_{ij} \equiv D_i\beta_j + D_j\beta_i - \frac{2}{3}\gamma_{ij}D_k\beta^k$.

Θεωρούμε κατά τα γνωστά σύμμορφο μετασχηματισμό της μετρικής $\gamma_{ij} = \psi^4\tilde{\gamma}_{ij} \Leftrightarrow \tilde{\gamma}_{ij} = \psi^{-4}\gamma_{ij}$ όπου αυτή τη φορά υποθέτουμε ότι η ορίζουσα της σύμμορφης μετρικής είναι στιγμιαία σταθερή και δεδομένη (μια συνηθισμένη επιλογή είναι $\tilde{\gamma} = 1$). Ορίζουμε τώρα:

$$\tilde{u}_{ij} \equiv \partial_t\tilde{\gamma}_{ij} \quad (5.5.5)$$

Η απαίτηση η ορίζουσα της σύμμορφης μετρικής να παραμένει (στιγμιαία) σταθερή διατυπώνεται ως:

$$\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{u}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \partial_t \ln \tilde{\gamma} = 0 \quad (5.5.6)$$

Λαμβάνοντας την χρονική παράγωγο της $\gamma = \psi^{12}\tilde{\gamma}$ σε συνδυασμό με την πιο πάνω σχέση, έχουμε:

$$\partial_t \ln \gamma = 12\partial_t \ln \psi \quad (5.5.7)$$

Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα, συνδέουμε τον σύμμορφο τανυστή \tilde{u}_{ij} με τον φυσικό τανυστή u_{ij} :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij} &= \partial_t\tilde{\gamma}_{ij} = \partial_t(\psi^{-4}\gamma_{ij}) = -4\psi^{-5}\gamma_{ij}\partial_t\psi + \psi^{-4}\partial_t\gamma_{ij} \\ &= \psi^{-4}(\partial_t\gamma_{ij} - 4\psi^{-1}\gamma_{ij}\partial_t\psi) \\ &= \psi^{-4}(\partial_t\gamma_{ij} - 4\gamma_{ij}\partial_t \ln \psi) \\ &= \psi^{-4}\left(\partial_t\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\partial_t \ln \gamma\right) \\ &= \psi^{-4}u_{ij} \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Καταλήγουμε λοιπόν:

$$\tilde{u}_{ij} = \psi^{-4}u_{ij} \Leftrightarrow \tilde{u}^{ij} = \psi^4u^{ij} \quad (5.5.9)$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{L}\beta)^{ij} &= D^i\beta^j + D^j\beta^i - \frac{2}{3}\gamma^{ij}D_k\beta^k \\
 &= \gamma^{ik}D_k\beta^j + \gamma^{jk}D_k\beta^i - \frac{2}{3}\gamma^{ij}D_k\beta^k \\
 &= \psi^{-4}\tilde{\gamma}^{ik}(\tilde{D}_k\beta^j + C^j_{km}\beta^m) + \psi^{-4}\tilde{\gamma}^{jk}(\tilde{D}_k\beta^i + C^i_{km}\beta^m) - \frac{2}{3}\psi^{-4}\tilde{\gamma}^{ij}(\tilde{D}_k\beta^k + C^k_{km}\beta^m) \\
 &= \psi^{-4}\left(\tilde{D}^i\beta^j + \tilde{D}^j\beta^i - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_k\beta^k\right) + \psi^{-4}\left(\tilde{\gamma}^{ik}C^j_{km}\beta^m + \tilde{\gamma}^{jk}C^i_{km}\beta^m - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}C^k_{km}\beta^m\right) \\
 &= \psi^{-4}(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} + \psi^{-4}\left(\tilde{\gamma}^{ik}C^j_{km}\beta^m + \tilde{\gamma}^{jk}C^i_{km}\beta^m - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}C^k_{km}\beta^m\right)
 \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος που βρίσκεται στην παρένθεση μηδενίζεται. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}^{ik}C^j_{km}\beta^m + \tilde{\gamma}^{jk}C^i_{km}\beta^m - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}C^k_{km}\beta^m &= 2\tilde{\gamma}^{ik}(\delta^j_k\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m + \delta^j_m\tilde{D}_k\ln\psi\beta^m - \tilde{\gamma}_{km}\tilde{\gamma}^{jn}\tilde{D}_n\ln\psi\beta^m) \\
 &\quad + 2\tilde{\gamma}^{jk}(\delta^i_k\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m + \delta^i_m\tilde{D}_k\ln\psi\beta^m - \tilde{\gamma}_{km}\tilde{\gamma}^{in}\tilde{D}_n\ln\psi\beta^m) \\
 &\quad - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij} \cdot 6\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m \\
 &= 2\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m + 2\tilde{D}^i\ln\psi\beta^j - 2\tilde{D}^j\ln\psi\beta^i \\
 &\quad + 2\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m + 2\tilde{D}^j\ln\psi\beta^i - 2\tilde{D}^i\ln\psi\beta^j - 4\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_m\ln\psi\beta^m \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Τελικά λοιπόν:

$$(\mathbf{L}\beta)^{ij} = \psi^{-4}(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \quad (5.5.10)$$

Αντικαθιστώντας $u^{ij} = \psi^{-4}\tilde{u}^{ij}$ και $(\mathbf{L}\beta)^{ij} = \psi^{-4}(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij}$ στην έκφραση (5.5.4) για το A^{ij} λαμβάνουμε:

$$A^{ij} = \frac{1}{2\alpha}[(\mathbf{L}\beta)^{ij} - u^{ij}] = \frac{\psi^{-4}}{2\alpha}[(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}] \quad (5.5.11)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο σύμμορφος μετασχηματισμός του άιχνου μέρους της εξωτερικής καμπυλότητας είναι $A^{ij} = \psi^{-10}\tilde{A}^{ij}$ επομένως η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως σχέση μεταξύ των μεγεθών \tilde{A}^{ij} και \tilde{u}^{ij} , β^i :

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{\psi^6}{2\alpha}[(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}] \equiv \frac{1}{2\tilde{\alpha}}[(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}] \quad (5.5.12)$$

όπου ορίσαμε το σύμμορφο lapse function $\tilde{\alpha}$ (conformal lapse/densitized lapse) ως:

$$\tilde{\alpha} \equiv \psi^{-6}\alpha \quad (5.5.13)$$

Στην πράξη η εξίσωση (5.5.12) παρέχει μια εναλλακτική ανάλυση του \tilde{A}^{ij} σε όρους του shift vector β και της χρονικής παραγώγου της σύμμορφης χωρικής μετρικής $\tilde{u}_{ij} = \partial_t\tilde{\gamma}_{ij}$, αντί της εγκάρσιας και διαμήκους συνιστώσας που είχαμε στην προσέγγιση CTT.

5.5.1 CTS εκδοχή των περιορισμών - CTS form of the constraints

Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός στον CTS φορμαλισμό δίνεται από τη (5.2.31):

$$8\tilde{D}^2\psi - \tilde{R}\psi + \psi^{-7}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 = -16\pi\psi^5\rho \quad (5.5.14)$$

όπου $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}}[(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}]$. Οι περιορισμοί ορμής προκύπτουν από την (5.2.32) στην οποία αντικαθιστούμε την έκφραση του \tilde{A}^{ij} ώστε να πάρουμε μια εξίσωση για τις συνιστώσες β^i του shift vector:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j \left[\frac{1}{2\tilde{\alpha}} [(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}] \right] - \frac{2}{3}\psi^6\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_j K &= 8\pi\psi^{10}j^i \\ \frac{1}{\tilde{\alpha}}\tilde{D}_j(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij}\tilde{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right) - \frac{1}{\tilde{\alpha}}\tilde{D}_j\tilde{u}^{ij} - \tilde{u}^{ij}\tilde{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right) - \frac{4}{3}\psi^6\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_j K &= 16\pi\psi^{10}j^i \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς β^i έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_L\beta^i - (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij}\tilde{D}_j \ln \tilde{\alpha} &= \tilde{D}_j\tilde{u}^{ij} - \tilde{u}^{ij}\tilde{D}_j \ln \tilde{\alpha} + \frac{4}{3}\tilde{\alpha}\psi^6\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_j K + 16\pi\tilde{\alpha}\psi^{10}j^i \\ &= \tilde{\alpha}\tilde{D}_j(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{u}_{ij}) + \frac{4}{3}\tilde{\alpha}\psi^6\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_j K + 16\pi\tilde{\alpha}\psi^{10}j^i \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

όπου κατά τα γνωστά $\tilde{\Delta}_L\beta^i \equiv \tilde{D}_j(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} = \tilde{D}_j\tilde{D}^j\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{D}^i\tilde{D}_j\beta^j + \tilde{R}^i_j\beta^j$.

Τα δεσμευμένα αρχικά δεδομένα που προσδιορίζονται μέσω των περιορισμών όπως διατυπώνονται στα πλαίσια του Conformal Thin-Sandwich (CTS) decomposition είναι:

- 1 σύμμορφος παράγοντας ψ (επίλυση Hamiltonian constraint)
- 3 συνιστώσες β^i του shift vector (επίλυση Momentum constraints)

Οι ελεύθερες μεταβλητές, τα δεδομένα δηλαδή που επιλέγονται αυθαίρετα στη Σ_{t_0} , είναι:

- 5 συνιστώσες $\tilde{\gamma}_{ij}$ της σύμμορφης μετρικής
- 5 συνιστώσες $\tilde{u}_{ij} = \partial_t\tilde{\gamma}_{ij}$ της χρονικής παραγώγου της σύμμορφης μετρικής
- 1 βαθμωτή συνάρτηση που αντιστοιχεί στη μέση καμπυλότητα K
- 1 βαθμωτή συνάρτηση που αντιστοιχεί στο σύμμορφο lapse function $\tilde{\alpha}$

σε συνδυασμό με τις πηγές ύλης/ενέργειας ρ, j^i του χωρόχρονου. Παρατηρούμε ότι στην προσέγγιση CTS υπάρχουν 16 βαθμοί ελευθερίας σε αντίθεση με τους 12 της προσέγγισης CTT, διότι εν προκειμένω για την κατασκευή αρχικών δεδομένων προσδιορίζονται οι 12 βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στις συνιστώσες των δυναμικών μεταβλητών (γ_{ij}, K_{ij}) αλλά και οι 4 συναρτήσεις βαθμίδος α, β^i που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη των συντεταγμένων μακριά από την Σ_{t_0} . Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα του CTS decomposition στο πιο κάτω εδάφιο.

Conformal Thin-Sandwich (CTS) decomposition

Δεδομένων των ελεύθερων μεταβλητών $\tilde{\gamma}_{ij}$, $\tilde{u}_{ij} \equiv \partial_t \tilde{\gamma}_{ij}$, K , $\tilde{\alpha}$ και των πηγών ύλης-ενέργειας ρ, j^i , που επιλέγονται ανάλογα με τα (αστρο)φυσικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη χωρόχρονου, οι εξισώσεις των περιορισμών στα πλαίσια του CTS decomposition είναι:

(A) Χαμιλτονιανός περιορισμός:

$$\tilde{D}^2 \psi - \frac{1}{8} \tilde{R} \psi + \frac{1}{8} \psi^{-7} \tilde{A}^{ij} \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12} \psi^5 K^2 = -2\pi \psi^5 \rho \quad (5.5.16)$$

ο οποίος εκλαμβάνεται ως μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson για τον σύμμορφο παράγοντα ψ , με $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} [(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}]$.

(B) Περιορισμοί ορμής:

$$\tilde{\Delta}_L \beta^i - (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \tilde{D}_j \ln \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \tilde{D}_j (\tilde{\alpha}^{-1} \tilde{u}_{ij}) + \frac{4}{3} \tilde{\alpha} \psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K + 16\pi \tilde{\alpha} \psi^{10} j^i \quad (5.5.17)$$

οι οποίοι εκλαμβάνονται ως τρεις ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις συνιστώσες β^i , $i = 1, 2, 3$ του shift vector.

Η επίλυση του συστήματος (5.5.16)-(5.5.17) οδηγεί στην εύρεση των ψ, β^i και επιτρέπει την κατασκευή της φυσικής λύσης για τις μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) της Σ_{t_0} . Η φυσική λύση επανακτάται από τις σχέσεις:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (5.5.18)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \quad (5.5.19)$$

όπου $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} [(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}]$ και $\tilde{\alpha} = \psi^{-6} \alpha$.

Όπως αναφέραμε, η προσέγγιση CTS παρέχει τη χωρική μετρική γ_{ij} και την εξωτερική καμπυλότητα K_{ij} της αρχικής υπερεπιφάνειας, που ικανοποιούν τους περιορισμούς, και συμπληρωματικά υπολογίζει το shift vector β^i από τους περιορισμούς ορμής και το lapse $\alpha = \psi^6 \tilde{\alpha}$ από την (αυθαίρετη) επιλογή του $\tilde{\alpha}$. Να σημειώσουμε ότι οι τιμές των συναρτήσεων βαθμίδας που παίρνουμε από το CTS decomposition αποτελούν απλά μια επιλογή εκ των πολλών δυνατών επιλογών, οπότε μπορούμε είτε να τις υιοθετήσουμε είτε να τις αγνοήσουμε θέτοντας άλλες συνθήκες βαθμίδας.

5.6 Extended Conformal Thin-Sandwich (XCTS) decomposition

Η επέκταση της μεθόδου CTS πραγματοποιήθηκε από τους Pfeiffer και York [55] και ονομάστηκε extended conformal thin-sandwich (XCTS) decomposition. Στόχο έχει να παρέχει έναν φυσικό τρόπο για τον υπολογισμό του σύμμορφου lapse $\tilde{\alpha}$ το οποίο αποτελεί ελεύθερη μεταβλητή στην προσέγγιση CTS και δεν είναι πάντοτε ξεκάθαρο ποια μπορεί να είναι η μορφή του. Θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τη σύμμορφη μετρική $\tilde{\gamma}_{ij}$ και την χρονική παράγωγο της \tilde{u}_{ij} καθώς και τη μέση καμπυλότητα K μαζί με τη δική της χρονική παράγωγο $\partial_t K$. Η έκφραση που δίνει την $\partial_t K$ δίνεται από τη (4.5.11):

$$\partial_t K = -D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + \rho)] + \beta^i D_i K \quad (5.6.1)$$

την οποία λύνουμε ως προς τη λαπλασιανή του lapse:

$$D^2\alpha = \alpha \left(A_{ij}A^{ij} + \frac{1}{3}K^2 \right) + 4\pi\alpha(S + \rho) - \partial_t K + \beta^i D_i K \quad (5.6.2)$$

Είναι χρήσιμο να βρούμε μια έκφραση που να περιλαμβάνει τη σύμμορφη λαπλασιανή \tilde{D}^2 του lapse, οπότε πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ $D^2\alpha$ και $\tilde{D}^2\alpha$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= \gamma^{ij} D_i D_j \alpha = \gamma^{ij} D_i \tilde{D}_j \alpha = \gamma^{ij} (\tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - C^k_{ij} \tilde{D}_k \alpha) \\ &= \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} (\tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - C^k_{ij} \tilde{D}_k \alpha) \\ &= \psi^{-4} [\tilde{D}^2 \alpha - 2(\tilde{D}^k \ln \psi + \tilde{D}^k \ln \psi - 3\tilde{D}^k \ln \psi) \tilde{D}_k \alpha] \\ &= \psi^{-4} (\tilde{D}^2 \alpha + 2\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \alpha) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\tilde{D}^2 \alpha + 2\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \alpha = \psi^{-1} [\tilde{D}^2(\alpha\psi) - \alpha\tilde{D}^2\psi]$ καταλήγουμε:

$$D^2\alpha = \psi^{-5} [\tilde{D}^2(\alpha\psi) - \alpha\tilde{D}^2\psi] \quad (5.6.3)$$

Λύνουμε ως προς τον όρο $\alpha\psi$:

$$\tilde{D}^2(\alpha\psi) = \psi^5 D^2\alpha + \alpha\tilde{D}^2\psi \quad (5.6.4)$$

Ο όρος $D^2\alpha$ στο δεξί μέλος της πιο πάνω σχέσης δίνεται από την εξίσωση (5.6.2) ενώ ο όρος $\tilde{D}^2\psi$ δίνεται από τον Χαμιλτονιανό περιορισμό (5.5.16). Με αυτές τις αντικαταστάσεις παίρνουμε μια εξίσωση για τον υπολογισμό του μεγέθους $\alpha\psi = \tilde{\alpha}\psi^7$:

$$\tilde{D}^2(\alpha\psi) = \alpha\psi \left[\frac{7}{8}\psi^{-8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{5}{12}\psi^4 K^2 + \frac{1}{8}\tilde{R} + 2\pi\psi^4(\rho + 2S) \right] + \psi^5(\beta^i \tilde{D}_i K - \partial_t K) \quad (5.6.5)$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι μια ελλειπτική εξίσωση για το $\alpha\psi = \tilde{\alpha}\psi^7$ η οποία επιλύεται σε συνδυασμό με τις εξισώσεις των περιορισμών, δεδομένων των μεγεθών $\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{u}_{ij}, K, \partial_t K$. Ανακεφαλαιώνοντας, στα πλαίσια του XCTS decomposition έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 5 συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων οι οποίες παρατίθενται στο παρακάτω εδάφιο.

Extended Conformal Thin-Sandwich (XCTS) decomposition

Δεδομένων των ελεύθερων μεταβλητών $\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{u}_{ij} \equiv \partial_t \tilde{\gamma}_{ij}, K, \partial_t K$ και των πηγών ύλης-ενέργειας ρ, j^i , που επιλέγονται ανάλογα με τα (αστρο)φυσικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη χωρόχρονου, οι εξισώσεις των δεσμευμένων μεταβλητών $\psi, \beta^i, \tilde{\alpha}$ στα πλαίσια του XCTS decomposition είναι:

(A) Χαμιλτονιανός περιορισμός:

$$\tilde{D}^2\psi - \frac{1}{8}\tilde{R}\psi + \frac{1}{8}\psi^{-7} \tilde{A}^{ij} \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{12}\psi^5 K^2 = -2\pi\psi^5 \rho \quad (5.6.6)$$

ο οποίος εκλαμβάνεται ως μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson για τον σύμμορφο παράγοντα ψ , με $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}}[(\tilde{L}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}]$.

(B) Περιορισμοί ορμής:

$$\tilde{\Delta}_L \beta^i - (\tilde{L}\beta)^{ij} \tilde{D}_j \ln \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \tilde{D}_j (\tilde{\alpha}^{-1} \tilde{u}_{ij}) + \frac{4}{3} \tilde{\alpha} \psi^6 \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j K + 16\pi \tilde{\alpha} \psi^{10} j^i \quad (5.6.7)$$

οι οποίοι εκλαμβάνονται ως τρεις ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις συνιστώσες β^i , $i = 1, 2, 3$ του shift vector.

(C) Εξίσωση του $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{D}^2(\tilde{\alpha}\psi^7) = \tilde{\alpha}\psi^7 \left[\frac{7}{8} \psi^{-8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{5}{12} \psi^4 K^2 + \frac{1}{8} \tilde{R} + 2\pi \psi^4 (\rho + 2S) \right] + \psi^5 (\beta^i \tilde{D}_i K - \partial_t K) \quad (5.6.8)$$

Η φυσική λύση ανακτάται αφότου επιλυθεί το σύστημα (5.6.6)-(5.6.8) και δίνεται από τις σχέσεις:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (5.6.9)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \quad (5.6.10)$$

όπου $\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} [(\tilde{L}\beta)^{ij} - \tilde{u}^{ij}]$ και $\tilde{\alpha} = \psi^{-6} \alpha$.

Η προσέγγιση XCTS είναι χρήσιμη για την κατασκευή αρχικών δεδομένων για αστροφυσικά συστήματα σε στατική/ψευδοστατική ισορροπία (equilibrium/quasi-equilibrium initial data). Σε αυτή την περίπτωση, οι χρονικές παράγωγοι της σύμμορφης μετρικής και της εξωτερικής καμπυλότητας είναι ίσες με μηδέν:

$$\text{Equilibrium data: } \begin{cases} \tilde{u}_{ij} \equiv \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = 0 \\ \partial_t K = 0 \end{cases} \quad (5.6.11)$$

5.6.1 Εφαρμογή του XCTS: Χωρόχρονος Schwarzschild

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τον φορμαλισμό XCTS ώστε να κατασκευάσουμε αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν στον χώροχρονο Schwarzschild. Η μέθοδος XCTS είναι η βολικότερη για την ανάλυση αυτή καθότι μελετάμε τη γεωμετρία του κενού χώρου έξω από ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό σώμα (μελανή οπή Schwarzschild). Υποθέτουμε ότι η αρχική υπερεπιφάνεια έχει τοπολογία $\Sigma_{t_0} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ και εφόσον περιγράφει μια κατάσταση ισορροπίας, ισχύει:

$$\tilde{u}_{ij} = 0 \quad \text{και} \quad \partial_t K = 0 \quad (5.6.12)$$

Επιπλέον, οι επιλογές μας για τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές είναι, όπως συνήθως, σύμμορφη επιπεδότητα και μεγιστικός τεμαχισμός:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij} \quad \text{και} \quad K = 0 \quad (5.6.13)$$

και αφού ο χώροχρονος δεν περιέχει ύλη/ενέργεια, ισχύει $\rho = j^i = S^{ij} = 0$. Με αυτές τις υποθέσεις για τα ελεύθερα δεδομένα και χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, το σύστημα εξισώσεων

του XCTS φορμαλισμού ανάγεται σε:

$$\Delta\psi + \frac{1}{8}\psi^{-7}\tilde{A}^{ij}\tilde{A}_{ij} = 0 \quad (5.6.14)$$

$$\partial^j\partial_j\beta^i + \frac{1}{3}\partial^i\partial_j\beta^j - (\tilde{L}\beta)^{ij}\partial_j\ln\tilde{\alpha} = 0 \quad (5.6.15)$$

$$\Delta(\tilde{\alpha}\psi^7) = \frac{7}{8}\tilde{\alpha}\psi^{-1}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \quad (5.6.16)$$

Η πιο απλή λύση της (5.6.15) είναι $\beta^i = 0$ που σε συνδυασμό με την $\tilde{u}^{ij} = 0$ οδηγεί στην $\tilde{A}^{ij} = 0$. Άρα το σύστημα εξισώσεων απλοποιείται τώρα σε:

$$\Delta\psi = 0 \quad (5.6.17)$$

$$\Delta(\tilde{\alpha}\psi^7) = 0 \quad (5.6.18)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) στην Σ_{t_0} και θεωρώντας ότι η υπερεπιφάνεια αυτή είναι ασυμπτωτικά επίπεδη, οπότε $\psi(r \rightarrow \infty) = 1$, η λύση της (5.6.17) με βάση την ανάλυση που έγινε στην 5.4.1 προκύπτει:

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r} \quad (5.6.19)$$

όπου M η μάζα ADM που περιέχει η Σ_{t_0} (δηλαδή η μάζα της μελανής οπής). Εφόσον το σημείο O που αντιστοιχεί σε $r = 0$ δεν αποτελεί μέρος της Σ_{t_0} , ο σύμμορφος παράγοντας ψ είναι ομαλός στην Σ_{t_0} . Προχωράμε στην εύρεση του lapse function από την (5.6.18) η οποία λόγω της συνθήκης ασυμπτωτικής επιπεδότητας $\tilde{\alpha}\psi^7 \rightarrow 1$ για $r \rightarrow \infty$ έχει λύση:

$$\tilde{\alpha}\psi^7 = \alpha\psi = 1 + \frac{D}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \frac{D}{r}}{1 + \frac{M}{2r}} \quad (5.6.20)$$

όπου D μια σταθερά προς προσδιορισμό. Ο προσδιορισμός της σταθεράς D γίνεται με την επιβολή μιας συνοριακής συνθήκης στο σημείο O που αποτελεί την οπή (puncture) της Σ_{t_0} . Η πρώτη επιλογή είναι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = 1 \quad (5.6.21)$$

η οποία δίνει $D = M/2$ και άρα $\alpha = 1$ παντού στην Σ_{t_0} . Αυτή η επιλογή για το lapse function ονομάζεται "geodesic slicing" (η επιτάχυνση των κάθετων παρατηρητών είναι μηδενική, άρα ακολουθούν γεωδαισιακές καμπύλες). Συνήθως, η επιλογή $\alpha = 1$ δεν είναι κατάλληλη διότι τότε οι τροχιές των παρατηρητών συγκλίνουν παρουσία πηγών ύλης/ενέργειας οδηγώντας σε ιδιομορφίες συντεταγμένων. Μια εναλλακτική δεύτερη επιλογή είναι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha = -1 \quad (5.6.22)$$

η οποία δίνει $D = -M/2$ και άρα $\alpha = \frac{1 - M/(2r)}{1 + M/(2r)}$. Έχουμε γενικεύσει τον ορισμό του lapse ώστε να λαμβάνει και αρνητικές τιμές, γεγονός που επιτρέπει στη συνάρτηση καθολικού χρόνου t να είναι φθίνουσα κατά μήκος των μελλοντικά προσανατολισμένων καμπυλών της ασυμπτωτικά επίπεδης περιοχής που βρίσκεται στην άλλη πλευρά της γέφυρας Einstein-Rosen. Έχουμε όλα τα μεγέθη που απαιτούνται προκειμένου να υπολογίσουμε τη μετρική και άρα το στοιχείο μήκους του χωρόχρονου. Ειδικότερα, υπενθυμίζοντας ότι $\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij}$ με f_{ij} η επίπεδη μετρική σε σφαιρικές συντεταγμένες,

παίρνουμε το στοιχείο μήκους:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left[\frac{1 - M/(2r)}{1 + M/(2r)}\right]^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Το πιο πάνω στοιχείο μήκους είναι ακριβώς το στοιχείο μήκους του χωρόχρονου Schwarzschild σε ισοτροπικές σφαιρικές συντεταγμένες.

Επομένως μέσω της προσέγγισης XCTS λαμβάνουμε εκτός από τα αρχικά δεδομένα (γ_{ij}, K_{ij}) και τις συναρτήσεις βαθμίδος α, β^i οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε άμεσα το στοιχείο μήκους του χωρόχρονου. Από την άλλη, η προσέγγιση CTT μας παρέχει μόνο τα αρχικά δεδομένα (γ_{ij}, K_{ij}) άρα σε πρώτο στάδιο μπορούμε να κατασκευάσουμε μόνο το στοιχείο μήκους της αρχικής υπερεπιφάνειας Σ_{t_0} . Βέβαια, η προσέγγιση XCTS έχει το μειονέκτημα ότι για συγκεκριμένες επιλογές ελεύθερων δεδομένων, όπως έδειξαν οι Pfeiffer και York [56], η λύση του συστήματος XCTS δεν είναι μοναδική. Για ορισμένα σχετικιστικά συστήματα αυτό μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα σύγκλισης, τα οποία δεν παρουσιάζονται στις μεθόδους CTT και CTS.

Φορμαλισμός BSSN

Παρόλο που οι εξισώσεις ADM-York δύνανται από μαθηματικής άποψης να ολοκληρωθούν με υπολογιστικές μεθόδους, στην πράξη παρουσιάζουν σημαντική αριθμητική αστάθεια που οδηγεί σε σοβαρά και ενδεχομένως καταστροφικά σφάλματα που τερματίζουν την προσομοίωση. Αυτή η κακή υπολογιστική συμπεριφορά των εξισώσεων ADM-York οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημα των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης είναι ασθενώς υπερβολικό (weakly hyperbolic) [58] [1] και κατά συνέπεια μη-καλά τοποθετημένο, υπό την έννοια ότι μικρές αποκλίσεις/σφάλματα στα αρχικά δεδομένα (π.χ. αποκλίσεις από τους περιορισμούς) μεγεθύνονται με την πάροδο του χρόνου. Η αριθμητική αστάθεια των εξισώσεων ADM-York οδήγησε στην αναζήτηση εναλλακτικών φορμαλισμών οι οποίοι να αναδιατυπώνουν τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης κατά τρόπο που να τις καθιστά ισχυρά υπερβολικές και άρα καλά τοποθετημένες. Αυτό το εγχείρημα δεν είναι καθόλου τερματισμένο αφού ακόμη και σήμερα η μελέτη των υπερβολικών ιδιοτήτων των διαφόρων φορμαλισμών των εξισώσεων Einstein αποτελεί ενεργό ερευνητικό πεδίο. Μέχρι στιγμής ο πιο επιτυχής και διαδεδομένος φορμαλισμός, που αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, φέρει το όνομα BSSN καθότι επινοήθηκε από τους Baumgarte & Shapiro [62] και Shibata & Nakamura [63] οι οποίοι στηρίχθηκαν στο έργο των Nakamura, Oohara και Kojima [64] (γι' αυτό και ο φορμαλισμός είναι επίσης γνωστός ως BSSNOK). Στόχος του BSSN φορμαλισμού είναι να τροποποιήσει τις εξισώσεις ADM-York ώστε να προκύψει ένα ισχυρά υπερβολικό σύστημα εξισώσεων, κατάλληλο για ευσταθείς υπολογιστικές μελέτες.

Στις πιο κάτω ενότητες θα πραγματοποιηθεί μια σύντομη εισαγωγή στις έννοιες της υπερβολικότητας και της καλής τοποθέτησης ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων ώστε να εντοπιστούν οι όροι από τους οποίους απορρέει η (ανεπιθύμητη) ασθενώς υπερβολική συμπεριφορά των εξισώσεων ADM-York. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί αναλυτικά ο φορμαλισμός BSSN.

6.1 Καλή τοποθέτηση συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων - Well-posedness of a system of partial differential equations

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\partial_t \vec{u} + A^i \cdot \partial_i \vec{u} = \vec{S} \quad (6.1.1)$$

όπου $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ ένα n -διάστατο διάνυσμα (η ζητούμενη λύση του συστήματος), A^i ένας $n \times n$ πίνακας (χαρακτηριστικός πίνακας στον άξονα x^i) και $\vec{S} = \vec{S}(u)$ ένα n -διάστατο διάνυσμα - πηγή. Το πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) για ένα τέτοιο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων συνίσταται στην εύρεση της λύσης $\vec{u}(t, x)$ δεδομένης της αρχικής συνθήκης $\vec{u}(0, x)$.

Ορισμός 6.1: Καλή τοποθέτηση προβλήματος αρχικών τιμών

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) για ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων λέγεται καλά τοποθετημένο (well-posed) αν:

1. υπάρχει λύση
2. η λύση είναι μοναδική
3. η λύση εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις αρχικές συνθήκες, υπό την έννοια ότι υπάρχει μια νόρμα $\|\cdot\|$ (συνήθως η L_2 νόρμα ή μια νόρμα Sobolev) και δύο σταθερές k, α τέτοιες ώστε η λύση να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\|\vec{u}(t, x)\| \leq k e^{\alpha t} \|\vec{u}(0, x)\| \quad (6.1.2)$$

Με άλλα λόγια, η λύση είναι φραγμένη από έναν εκθετικό παράγοντα που δεν εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα, ώστε να αποκλίνει το πολύ εκθετικά με τον χρόνο. Ως εκ τούτου μικρές μεταβολές στα αρχικά δεδομένα αντιστοιχούν σε μικρές μεταβολές στη λύση.

Οι περισσότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις που απαντώνται στη φυσική, όπως για παράδειγμα η κυματική εξίσωση και η εξίσωση θερμικής διάχυσης, είναι καλά τοποθετημένες ως προβλήματα αρχικών τιμών. Εξετάζοντας τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης του συστήματος ADM-York:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j) - 8\pi \alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) \right] \\ & + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

παρατηρούμε ότι στην εξίσωση του $\partial_t K_{ij}$ εμφανίζονται μεικτές παράγωγοι της χωρικής μετρικής λόγω της παρουσίας του 3D τανυστή Ricci R_{ij} . Συγκεκριμένα υπάρχουν όροι της μορφής (κρατάμε μόνο το κύριο μέρος, δηλαδή όρους με παραγώγους δεύτερης τάξης που είναι η υψηλότερη τάξη):

$$\partial_{tt} \gamma_{ij} \sim \partial_t K_{ij} \sim \frac{1}{2} \alpha \underbrace{(\gamma^{kl} \partial_l \partial_i \gamma_{kj} + \gamma^{kl} \partial_j \partial_k \gamma_{il} - \gamma^{kl} \partial_j \partial_i \gamma_{kl})}_{\text{mixed derivatives}} - \underbrace{\gamma^{kl} \partial_k \partial_l \gamma_{ij}}_{\text{"Laplace"}} \quad (6.1.5)$$

Στους όρους με τις μεικτές παραγώγους της μετρικής εντοπίζεται η κακή υπολογιστική συμπεριφορά των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης, καθώς αν δεν υπήρχαν οι όροι αυτοί τότε η εξίσωση χρονικής εξέλιξης της γ_{ij} θα ήταν όμοια με την κυματική εξίσωση και άρα καλά τοποθετημένη. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, οι μεικτές παράγωγοι της μετρικής που περιέχονται στον τανυστή Ricci καθιστούν τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης του συστήματος ADM-York ασθενώς υπερβολικές.

6.2 Υπερβολικότητα - Hyperbolicity

Η έννοια της υπερβολικότητας (hyperbolicity) περιγράφει συστήματα χρονικής εξέλιξης που αποτελούν γενίκευση της κυματικής εξίσωσης (όταν γραφεί ως σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης). Η υπερβολικότητα χαρακτηρίζει τα συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων με βάση τη συμπεριφορά που επιδεικνύει η λύση τους. Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, με τη μορφή που θεωρήσαμε προηγουμένως:

$$\partial_t \vec{u} + A^i \cdot \partial_i \vec{u} = \vec{S} \quad (6.2.1)$$

Προκειμένου να αναλύσουμε τις υπερβολικές ιδιότητες του συστήματος αυτού, θεωρούμε μια τυχαία κατεύθυνση στον χώρο, που υποδεικνύεται από κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα n με συνιστώσες n^i .

Σχηματίζουμε τον πίνακα $P = A^i n_i$ ο οποίος είναι γνωστός ως κύριο σύμβολο (principal symbol) ή χαρακτηριστικός πίνακας (characteristic matrix) του συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η υπερβολικότητα του συστήματος καθορίζεται από τις ιδιότητες του πίνακα P αναφορικά με το εξής πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(P - vI) \vec{u} = 0 \quad (6.2.2)$$

όπου v οι ιδιοτιμές του χαρακτηριστικού πίνακα P , οι οποίες λέγονται χαρακτηριστικές ταχύτητες. Συγκεκριμένα, ονομάζουμε το σύστημα:

- **Ισχυρά υπερβολικό (strongly hyperbolic)** αν ο P έχει πραγματικές ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές ταχύτητες) και διαθέτει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων (δηλαδή διαγωνοποιείται) για κάθε n^i .
- **Ασθενώς υπερβολικό (weakly hyperbolic)** αν ο P έχει πραγματικές ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές ταχύτητες) για κάθε n^i , όμως δεν διαθέτει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.
- **Συμμετρικά υπερβολικό (symmetric hyperbolic)** αν ο P διαγωνοποιείται από τον ίδιο πίνακα (δηλαδή τον ίδιο μετασχηματισμό ομοιότητας) για κάθε n^i .

Προκύπτει άμεσα ότι ένα συμμετρικά υπερβολικό σύστημα είναι αυτομάτως ισχυρά υπερβολικό (το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη). Το σημαντικότερο θεώρημα από άποψης υπολογιστικής μελέτης - αριθμητικής ανάλυσης, είναι ότι η ισχυρή υπερβολικότητα διασφαλίζει ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών για το εν λόγω σύστημα είναι καλά τοποθετημένο. Ειδικότερα:

Θεώρημα 6.1

Ένα ισχυρά υπερβολικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων επιδέχεται ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα αρχικών τιμών.

Αποδεικνύεται [1] ότι το σύστημα ADM-York είναι ασθενώς υπερβολικό, για δεδομένο shift vector β^i και για μεγάλο εύρος συνθηκών βαθμίδας για το lapse (λόγου χάρη "singularity avoiding slicing conditions"). Από την άλλη, το σύστημα BSSN είναι ισχυρά υπερβολικό κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Για την τροποποίηση-βελτίωση των υπερβολικών ιδιοτήτων του συστήματος ADM-York προτάθηκαν οι εξής μέθοδοι (ο οποίες μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους): (α) να οριστούν νέες δυναμικές μεταβλητές (BSSN) (β) να χρησιμοποιηθεί κατάλληλη συνθήκη βαθμίδας (GHG, Z4) και (γ) να τροποποιηθούν οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης με χρήση των περιορισμών.

6.3 Φορμαλισμός BSSN των 3+1 εξισώσεων - BSSN Formulation of the 3+1 equations

Στην ουσία, ο BSSN φορμαλισμός (γνωστός και ως BSSNOK) ενσωματώνει τα εξής τρία στοιχεία: (i) σύμμορφος μετασχηματισμός της μετρικής, (ii) σύμμορφη αποδόμηση της εξωτερικής καμπυλότητας, (iii) ορισμός βοηθητικών δυναμικών μεταβλητών. Η κεντρική ιδέα πίσω από τον φορμαλισμό BSSN έγκειται στο (iii) στοιχείο, δηλαδή ότι εισάγει νέες ανεξάρτητες δυναμικές μεταβλητές στο σύστημα των 3+1 εξισώσεων, οι οποίες απορροφούν τις προβληματικές μεικτές παραγώγους της μετρικής από τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης οδηγώντας σε ένα ισχυρά υπερβολικό σύστημα.

Ο BSSN φορμαλισμός έχει ως αφετηρία τον σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής, κατ'

αναλογία με τη σύμμορφη αποδόμηση York-Lichnerowicz που χρησιμοποιούν οι μέθοδοι κατασκευής αρχικών δεδομένων CTT, CTS και XCTS. Σε αυτή την περίπτωση όμως, ο σύμμορφος παράγοντας είναι η ποσότητα $\psi = e^\phi$ (με τον ϕ να καλείται σύμμορφος εκθέτης) συνεπώς:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij} \quad (6.3.1)$$

Ο λόγος που γράφουμε τον σύμμορφο παράγοντα υπό αυτή τη μορφή, δηλαδή στη θέση του ψ έχουμε e^ϕ , είναι ότι βοηθάει στη μελέτη χωρόχρονων με οπές - punctures. Ο σύμμορφος εκθέτης ϕ παρουσιάζει ασθενέστερη ή καθόλου απόκλιση στην οπή, σε αντίθεση με τον ψ που συνήθως αποκλίνει (απειρίζεται) ως $\psi \sim 1/r$ (επομένως ο ϕ αποκλίνει λογαριθμικά).

Ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο (κατασκευή αρχικών δεδομένων), έχουμε εξάγει αρκετά χρήσιμα αποτελέσματα περί σύμμορφων τανυστών και των παραγώγων τους, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο παρόν κεφάλαιο. Σε αντίθεση όμως με την αποδόμηση York-Lichnerowicz, απαιτούμε τώρα η οριζουσα της σύμμορφης μετρικής να ισούται με την οριζουσα της τρισδιάστατης επίπεδης μετρικής f_{ij} , η οποία αν εργαζόμαστε με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (κάτι που στο εξής θα θεωρούμε δεδομένο) ισούται με τη μονάδα. Επομένως:

$$\tilde{\gamma} \equiv \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1 \quad (6.3.2)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$1 = e^{-12\phi} \gamma \Rightarrow \phi = \frac{1}{12} \ln \gamma \quad (6.3.3)$$

Με αυτές τις υποθέσεις, εκεί όπου στον ADM-York φορμαλισμό είχαμε μια εξίσωση χρονικής εξέλιξης για τη χωρική μετρική γ_{ij} , τώρα στον BSSN φορμαλισμό θα έχουμε δύο εξισώσεις χρονικής εξέλιξης, μία για κάθε δυναμική μεταβλητή $\phi, \tilde{\gamma}_{ij}$. Προκειμένου να καθορίσουμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης των $\phi, \tilde{\gamma}_{ij}$ θα βασιστούμε στην αντίστοιχη ADM-York εξίσωση για την γ_{ij} . Συγκεκριμένα, καθώς γνωρίζουμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης της οριζουσας γ της γ_{ij} , η οποία είναι η (4.5.10):

$$\partial_t \ln \gamma = -2\alpha K + 2D_i \beta^i = -2\alpha K + 2\partial_i \beta^i + 2\Gamma_{ij}^i \beta^j = -2\alpha K + 2\partial_i \beta^i + \beta^j \partial_j \ln \gamma \quad (6.3.4)$$

όπου $\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \partial_j \ln \gamma$, μπορούμε άμεσα να βρούμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης του παράγοντα ϕ :

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \partial_i \beta^i + \beta^i \partial_i \phi \quad (6.3.5)$$

Η εξωτερική καμπυλότητα αναλύεται κατά τα γνωστά στο άιχνο κομμάτι της A_{ij} και στο ίχνος της (μέση καμπυλότητα) $K = \gamma^{ij} K_{ij}$:

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \Rightarrow A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \quad (6.3.6)$$

Θεωρούμε σύμμορφο μετασχηματισμό του A_{ij} όμως σε αντίθεση με τη σύμμορφη αποδόμηση York-Lichnerowicz που είδαμε προηγουμένως, επιλέγουμε τον ίδιο σύμμορφο παράγοντα με αυτόν της χωρικής μετρικής δηλαδή:

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij} \Rightarrow \tilde{A}^{ij} = e^{4\phi} A^{ij} \quad (6.3.7)$$

Εφόσον αποδομήσαμε την εξωτερική καμπυλότητα, εκλαμβάνουμε το άιχνο μέρος της \tilde{A}_{ij} και το ίχνος της K ως ανεξάρτητες δυναμικές μεταβλητές άρα χρειάζεται να βρούμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης

τους. Η χρονική εξέλιξη της μέσης καμπυλότητας δίνεται από την (4.5.11) στην οποία αντικαθιστούμε $K_{ij}K^{ij} = A_{ij}A^{ij} + \frac{1}{3}K^2 = \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2$ οπότε παίρνουμε:

$$\partial_t K = -\gamma^{ij}D_i D_j \alpha + \alpha \left[\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 + 4\pi(S + \rho) \right] + \beta^i \partial_i K \quad (6.3.8)$$

Σημείωση: Αν για μια ποσότητα ισχύει $\mathcal{T} = \sqrt{\gamma}^w T$ όπου T ένας τανυστής, τότε η \mathcal{T} καλείται τανυστική πυκνότητα με βάρος w . Ο παράγοντας $e^\phi = \gamma^{1/12}$ είναι τανυστική πυκνότητα με βάρος $1/6$ ενώ οι ποσότητες $\tilde{\gamma}_{ij}$ και \tilde{A}_{ij} είναι τανυστικές πυκνότητες με βάρος $-2/3$ (εφόσον περιέχουν τον $e^{-4\phi} = \gamma^{-1/3}$). Με βάση τον κανόνα παραγωγίσης τανυστικών πυκνοτήτων, στην παράγωγο Lie μιας τανυστικής πυκνότητας προστίθεται ένας επιπλέον όρος ανάλογος του βάρους της. Για την τανυστική πυκνότητα \mathcal{T} τάξης (r, s) και βάρους w ισχύει:

$$\begin{aligned} L_\beta \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \beta^\rho \partial_\rho \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - \mathcal{T}^{\rho \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho \beta^{\mu_1} - \dots - \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \rho}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho \beta^{\mu_r} \\ &+ \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\rho \dots \nu_s} \partial_{\nu_1} \beta^\rho + \dots + \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \rho} \partial_{\nu_s} \beta^\rho + w \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_\rho \beta^\rho \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Δηλαδή, σε πιο συμπυκνωμένη γραφή: $L_\beta \mathcal{T} = [L_\beta \mathcal{T}]_{w=0} + w \mathcal{T} \partial_\rho \beta^\rho$.

Επί παραδείγματι:

$$L_\beta \phi = \beta^k \partial_k \phi + \frac{1}{6} \partial_k \beta^k \quad (6.3.10)$$

$$L_\beta \tilde{\gamma}_{ij} = \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k \quad (6.3.11)$$

6.3.1 Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης - Time evolution equations

Μέχρι στιγμής, οι δυναμικές μεταβλητές του φορμαλισμού BSSN είναι $(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij})$. Εφόσον βρήκαμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τον σύμμορφο εκθέτη ϕ και το ίχνος K της εξωτερικής καμπυλότητας, το επόμενο βήμα είναι η εύρεση των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης για τις μεταβλητές $\tilde{\gamma}_{ij}$ και \tilde{A}_{ij} .

Πρόταση 6.1: Χρονική Εξέλιξη $\tilde{\gamma}_{ij}$ και \tilde{A}_{ij}

Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης της σύμμορφης μετρικής είναι:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k + \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k \quad (6.3.12)$$

Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης του σύμμορφου άιχνου μέρους της εξωτερικής καμπυλότητας είναι:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left[-D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij}) \right]^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{im} \tilde{A}^m_j) - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \partial_k \beta^k \\ &+ \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

όπου ο δείκτης TF υποδηλώνει το άιχνο (trace-free) μέρος ενός τανυστή, π.χ. $X_{ij}^{TF} = X_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} X$, $D_i D_j \alpha = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - 2 \left(\partial_i \alpha \partial_j \phi + \partial_j \alpha \partial_i \phi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}^{mn} \partial_m \alpha \partial_n \phi \right)$ και $R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi$ βλ. (6.3.21).

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} &= \partial_t (e^{-4\phi} \gamma_{ij}) = -4\partial_t \phi e^{-4\phi} \gamma_{ij} + e^{-4\phi} \partial_t \gamma_{ij} \\
 &= e^{-4\phi} \left(\frac{2}{3} \alpha K \gamma_{ij} - \frac{2}{3} \gamma_{ij} \partial_k \beta^k - 4\gamma_{ij} \beta^k \partial_k \phi - 2\alpha K_{ij} + L_\beta \gamma_{ij} \right) \\
 &= -2\alpha e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) - \frac{2}{3} e^{-4\phi} \gamma_{ij} \partial_k \beta^k - \frac{1}{3} e^{-4\phi} \gamma_{ij} \beta^k \partial_k \ln \gamma + e^{-4\phi} (\beta^k \partial_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} \partial_i \beta^k + \gamma_{ik} \partial_j \beta^k) \\
 &= -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k - \frac{1}{3} e^{-4\phi} \beta^k \partial_k \gamma_{ij} + e^{-4\phi} (\beta^k \partial_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} \partial_i \beta^k + \gamma_{ik} \partial_j \beta^k)
 \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\partial_k \ln \gamma = \gamma^{ij} \partial_k \gamma_{ij} \Rightarrow \gamma_{ij} \partial_k \ln \gamma = \partial_k \gamma_{ij}$.

Τελικά:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k + \frac{2}{3} e^{-4\phi} \beta^k \partial_k \gamma_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k \quad (6.3.14)$$

Μετά από πράξεις, προκύπτει εύκολα ότι $\frac{2}{3} e^{-4\phi} \beta^k \partial_k \gamma_{ij} = \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij}$ έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k + \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k \quad (6.3.15)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + L_\beta \tilde{\gamma}_{ij} \quad (6.3.16)$$

Στη συνέχεια, έχουμε να υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο του \tilde{A}_{ij} , το οποίο γράφεται:

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} K_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} K \quad (6.3.17)$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο:

$$\partial_t \tilde{A}_{ij} = -4K_{ij} e^{-4\phi} \partial_t \phi + e^{-4\phi} \partial_t K_{ij} - \frac{1}{3} K \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_t K$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (6.3.5) για το $\partial_t \phi$, (6.3.12) για το $\partial_t \tilde{\gamma}_{ij}$, (4.5.9) για το $\partial_t K_{ij}$ και την ενδιάμεση εξίσωση (4.5.16) που εξάγαμε για το $\partial_t K$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{A}_{ij} &= K_{ij} e^{-4\phi} \left(\frac{2}{3} \alpha K - \frac{2}{3} \partial_k \beta^k \right) + K_{ij} \beta^k \partial_k (e^{-4\phi}) \\
 &\quad + e^{-4\phi} \left\{ \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k - D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j) - 8\pi \alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{3} K \left(-2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k + \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k \right) \\
 &\quad - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \left(-D^k D_k \alpha + \beta^k \partial_k K + \alpha [R + K^2 + 4\pi (S - 3\rho)] \right) \\
 &= K_{ij} e^{-4\phi} \left(\frac{2}{3} \alpha K - \frac{2}{3} \partial_k \beta^k \right) + \beta^k \partial_k \left(e^{-4\phi} K_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} K \right) + \left(e^{-4\phi} K_{kj} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{kj} K \right) \partial_i \beta^k + \left(e^{-4\phi} K_{ik} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ik} K \right) \partial_j \beta^k \\
 &\quad + e^{-4\phi} \left\{ -D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j) - 8\pi \alpha \left[S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) + \frac{1}{6} \gamma_{ij} (S - 3\rho) \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{3} K \left(-2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k \right) - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \left(-D^k D_k \alpha + \alpha R + \alpha K^2 \right) \\
 &= \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \left(e^{-4\phi} K_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} K \right) \partial_k \beta^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{-4\phi} \left[- \left(D_i D_j \alpha - \frac{1}{3} \gamma_{ij} D^k D_k \alpha \right) + \alpha \left(R_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} R \right) - 8\pi \alpha \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} S \right) \right] \\
 & + e^{-4\phi} \left(\frac{5}{3} \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik} K^k_j \right) + \frac{2}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{3} \alpha K^2 \tilde{\gamma}_{ij} \\
 & = \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \partial_k \beta^k + e^{-4\phi} \left[- (D_i D_j \alpha)^{TF} + \alpha (R_{ij}^{TF} - 8\pi S_{ij}^{TF}) \right] + X_{ij}
 \end{aligned}$$

όπου X_{ij} παριστάνει τους τελευταίους τέσσερις όρους, οι οποίοι δίνουν:

$$\begin{aligned}
 X_{ij} & = \frac{5}{3} \alpha K \left(\tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} K \right) - 2\alpha \left(\tilde{A}_{ik} + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ik} K \right) \left(\tilde{A}^k_j + \frac{1}{3} \delta^k_j K \right) + \frac{2}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{3} \alpha K^2 \tilde{\gamma}_{ij} \\
 & = \frac{5}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} + \frac{5}{9} \alpha K^2 \tilde{\gamma}_{ij} - 2\alpha \tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j - \frac{2}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{9} \alpha K^2 \tilde{\gamma}_{ij} + \frac{2}{3} \alpha K \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{3} \alpha K^2 \tilde{\gamma}_{ij} \\
 & = \alpha K \tilde{A}_{ij} - 2\alpha \tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j
 \end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{A}_{ij} & = e^{-4\phi} \left[- D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij}) \right]^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{im} \tilde{A}^m_j) \\
 & \quad + \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \partial_k \beta^k
 \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

$$= e^{-4\phi} \left[- D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij}) \right]^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{im} \tilde{A}^m_j) + L_\beta \tilde{A}_{ij} \tag{6.3.19}$$

Μένει να εκφράσουμε τον όρο $D_i D_j \alpha$ ως προς σύμμορφα μεγέθη. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 D_i D_j \alpha & = D_i (\partial_j \alpha) = \tilde{D}_i \partial_j \alpha - C^k_{ij} \partial_k \alpha \\
 & = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - 2(\delta^k_j \partial_i \phi + \delta^k_i \partial_j \phi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}^{km} \partial_m \phi) \partial_k \alpha \\
 & = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - 2(\partial_j \alpha \partial_i \phi + \partial_i \alpha \partial_j \phi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}^{km} \partial_k \alpha \partial_m \phi)
 \end{aligned}$$

6.3.2 Βοηθητικές μεταβλητές "Gammas" - Auxiliary "Gamma" variables

Ο σύμμορφος μετασχηματισμός που θεωρήσαμε προφανώς δεν λύνει το πρόβλημα της ασθενούς υπερβολικότητας των ADM-York εξισώσεων, απλώς ορίζει ως δυναμικές μεταβλητές τις $(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij})$, των οποίων την χρονική εξέλιξη προσδιορίσαμε. Προκειμένου να επιλύσουμε το ζήτημα της ασθενούς υπερβολικότητας χρειάζεται να ορίσουμε νέες δυναμικές μεταβλητές οι οποίες να εξαρτώνται από τις πρώτες χωρικές παραγώγους της μετρικής, ώστε οι όροι με μεικτές παραγώγους στην έκφραση του R_{ij} (και ειδικότερα του \tilde{R}_{ij} αφού εργαζόμαστε με σύμμορφα μεγέθη) να γράφονται τώρα ως απλές παράγωγοι των νέων μεταβλητών. Έτσι θα αποφύγουμε την εμφάνιση μεικτών παραγώγων της μετρικής και οι μόνες δευτερες παράγωγοι που θα εμφανίζονται ρητά στον τανυστή Ricci θα προέρχονται αποκλειστικά από τον τελεστή Laplace. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον ανασχηματισμό της εξίσωσης (6.1.5) της μετρικής ώστε να λάβει μορφή όμοια με αυτή της κυματικής εξίσωσης.

Το βασικότερο σημείο του BSSN φορμαλισμού είναι λοιπόν η εισαγωγή βοηθητικών μεταβλητών, οι οποίες είναι 3 στο πλήθος και ονομάζονται σύμμορφες μεταβλητές σύνδεσης ή απλά "gammas". Ορίζονται:

$$\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}^i_{jk} = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij} \tag{6.3.20}$$

όπου $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ τα σύμβολα Christoffel (συντελεστές σύνδεσης) της σύμμορφης μετρικής $\tilde{\gamma}_{ij}$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό των συμβόλων Christoffel με την υπόθεση ότι $\tilde{\gamma} = 1$ (γενικά

$\tilde{\gamma}^{jk}\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\tilde{\gamma}^{-1/2}\partial_j(\tilde{\gamma}^{1/2}\tilde{\gamma}^{ij})$. Προφανώς, τα $\tilde{\Gamma}^i$ δεν αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος αφού δεν ικανοποιούν τον αντίστοιχο κανόνα μετασχηματισμού κάτω από αλλαγή συντεταγμένων.

Θα εξετάσουμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο τα gammas τροποποιούν την έκφραση του τανυστή Ricci. Κατ' αρχήν πρέπει να εκφράσουμε τον φυσικό τανυστή Ricci, που εμφανίζεται στην εξίσωση (6.3.13), συναρτήσει των σύμμορφων δυναμικών μεταβλητών με τις οποίες εργαζόμαστε. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι αν θεωρήσουμε έναν σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής, τότε ο φυσικός 3D τανυστής Ricci γράφεται ως το άθροισμα του σύμμορφου 3D τανυστή Ricci συν έναν τανυστή που εξαρτάται από τις παραγώγους του σύμμορφου παράγοντα. Σύμφωνα δηλαδή με τη σχέση (5.2.10) γράφουμε:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi \quad (6.3.21)$$

όπου:

- \tilde{R}_{ij} ο σύμμορφος τανυστής Ricci που υπολογίζεται από τα $\tilde{\gamma}_{ij}$ και $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ βάσει της:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kl}(\partial_k\partial_l\tilde{\gamma}_{ij} + \partial_i\partial_j\tilde{\gamma}_{kl} - \partial_k\partial_j\tilde{\gamma}_{il} - \partial_i\partial_l\tilde{\gamma}_{kj}) + \tilde{\gamma}^{kl}(\tilde{\Gamma}_{il}^m\tilde{\Gamma}_{mkj} - \tilde{\Gamma}_{ij}^m\tilde{\Gamma}_{mkl}) \quad (6.3.22)$$

όπου $\tilde{\Gamma}_{kij} = \tilde{\gamma}_{km}\tilde{\Gamma}_{ij}^m$ τα σύμμορφα σύμβολα Christoffel πρώτου είδους (Christoffel symbols of the first kind). Η πιο πάνω σχέση χρησιμοποιώντας τα gammas $\tilde{\Gamma}^i$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i}\partial_j)\tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k\tilde{\Gamma}_{(ij)k} + \tilde{\gamma}^{lm}(2\tilde{\Gamma}_{l(i}\tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k\tilde{\Gamma}_{klj}) \quad (6.3.23)$$

Έχουμε επιτύχει τον σκοπό μας, καθότι οι μόνες δεύτερες παράγωγοι της μετρικής $\tilde{\gamma}_{ij}$ που εμφανίζονται ρητά στον \tilde{R}_{ij} προέρχονται από τη Λαπλασιανή: $(e^{4\phi}) \cdot \gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\gamma}_{ij}$. Οι υπόλοιπες παράγωγοι δεύτερης τάξης, δηλαδή οι προβληματικές μεικτές παράγωγοι, έχουν απορροφηθεί στις πρώτες παραγώγους $\partial_i\tilde{\Gamma}^k$ των gammas.

- R_{ij}^ϕ ο τανυστής που κατασκευάζεται από παραγώγους του παράγοντα ϕ έως και 2ης τάξης (τέσσερις τελευταίοι όροι της (5.2.10)). Η έκφρασή του προκύπτει αντικαθιστώντας $\ln\psi = \phi$ στην (5.2.10) οπότε:

$$R_{ij}^\phi = -2\tilde{D}_i\tilde{D}_j\phi - 2\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}_m\tilde{D}^m\phi + 4\tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\phi - 4\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}_m\phi\tilde{D}^m\phi \quad (6.3.24)$$

Ορίζοντας τις βοηθητικές μεταβλητές $\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk}\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j\tilde{\gamma}^{ij}$ καταφέραμε να τροποποιήσουμε τον τανυστή Ricci ώστε το προκύπτον σύστημα να είναι ισχυρά υπερβολικό. Για να το πετύχουμε αυτό έχουμε προάγει τα $\tilde{\Gamma}^i$ σε νέες ανεξάρτητες δυναμικές μεταβλητές, με "τίμημα" όμως ότι πρέπει να βρούμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης τους, αφού αποτελούν δυναμικές μεταβλητές του φορμαλισμού.

Πρόταση 6.2: Χρονική εξέλιξη $\tilde{\Gamma}^i$

Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης των gammas είναι:

$$\begin{aligned} \partial_t\tilde{\Gamma}^i &= -2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{kj} - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi\right) \\ &+ \beta^j\partial_j\tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j\partial_j\beta^i + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^i\partial_j\beta^j + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ki}\partial_k\partial_j\beta^j + \tilde{\gamma}^{kj}\partial_j\partial_k\beta^i \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Απόδειξη:

Ξεκινώντας από τον ορισμό των gammas, εναλλάσσουμε την χωρική παράγωγο ως προς τον χώρο με αυτή ως προς τον χρόνο:

$$\partial_t \tilde{\Gamma}^i = \partial_t (-\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}) = -\partial_j \partial_t \tilde{\gamma}^{ij}$$

Στην πιο πάνω σχέση αντικαθιστούμε τον τύπο:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\gamma}^{ij} &= -\tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \partial_t \tilde{\gamma}_{kl} = 2\alpha \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_m \beta^m - \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \beta^m \partial_m \tilde{\gamma}_{kl} - \tilde{\gamma}^{ik} \partial_k \beta^j - \tilde{\gamma}^{jl} \partial_l \beta^i \\ &= 2\alpha \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_m \beta^m + \beta^m \partial_m \tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\gamma}^{ik} \partial_k \beta^j - \tilde{\gamma}^{jl} \partial_l \beta^i \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= -\partial_j \left(2\alpha \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_m \beta^m + \beta^m \partial_m \tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\gamma}^{ik} \partial_k \beta^j - \tilde{\gamma}^{jl} \partial_l \beta^i \right) \\ &= -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha - 2\alpha \partial_j \tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3} \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} \partial_m \beta^m - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_m \beta^m - \cancel{\partial_j \beta^m \partial_m \tilde{\gamma}^{ij}} - \beta^m \partial_j \partial_m \tilde{\gamma}^{ij} \\ &\quad + \cancel{\partial_k \beta^j \partial_j \tilde{\gamma}^{ik}} + \tilde{\gamma}^{ik} \partial_j \partial_k \beta^j + \partial_j \tilde{\gamma}^{jl} \partial_l \beta^i + \tilde{\gamma}^{jl} \partial_j \partial_l \beta^i \\ &= -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha - 2\alpha \partial_j \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_m \beta^m + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_m \beta^m - \beta^m \partial_m \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\Gamma}^l \partial_l \beta^i + \tilde{\gamma}^{jl} \partial_j \partial_l \beta^i \\ &= -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha - 2\alpha \partial_j \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_m \beta^m + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_m \beta^m + \beta^m \partial_m \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^l \partial_l \beta^i + \tilde{\gamma}^{jl} \partial_j \partial_l \beta^i \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

Απομένει να αντικαταστήσουμε τον όρο απόκλισης $\partial_j \tilde{A}^{ij}$ στην (6.3.27) με τη βοήθεια του περιορισμού ορμής. Η χρήση του περιορισμού ορμής είναι καίριας σημασίας διότι εμπειρικά αλλά και θεωρητικά αποδεικνύεται ότι η (6.3.27) στην παρούσα της μορφή, σε συνδυασμό με τις υπολόποιες εξισώσεις χρονικής εξέλιξης, συνιστούν ένα υπολογιστικά ασταθές σύστημα. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ισχυρή υπερβολικότητα του συστήματος, θα βρούμε μια σχέση για το $\partial_j \tilde{A}^{ij}$ ξεκινώντας από τον περιορισμό ορμής:

$$\begin{aligned} D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) &= 8\pi j^i \\ D_j A^{ij} - \frac{2}{3} \gamma^{ij} \partial_j K &= 8\pi j^i \end{aligned}$$

Έχουμε αποδείξει τη σχέση (5.2.25) η οποία αναφέρει ότι για σύμμορφο μετασχηματισμό της μορφής $A^{ij} = \psi^\alpha \tilde{A}^{ij}$ ισχύει η εξής σχέση ανάμεσα στις αποκλίσεις: $D_j A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{D}_j (\psi^{\alpha+10} \tilde{A}^{ij})$. Στη δική μας περίπτωση έχουμε τον μετασχηματισμό $A^{ij} = e^{-4\phi} \tilde{A}^{ij}$ όπου $\psi = e^\phi$ και $\alpha = -4$, άρα έχουμε:

$$D_j A^{ij} = e^{-10\phi} \tilde{D}_j (e^{6\phi} \tilde{A}^{ij}) = e^{-4\phi} (\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi) \quad (6.3.28)$$

Ο περιορισμός ορμής γράφεται τώρα:

$$\begin{aligned}
 e^{-4\phi}(\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi) - \frac{2}{3}\gamma^{ij}\partial_jK &= 8\pi j^i \\
 \tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}e^{4\phi}\gamma^{ij}\partial_jK &= 8\pi e^{4\phi}\gamma^{ik}j_k \\
 \partial_j\tilde{A}^{ij} + \tilde{\Gamma}_{jm}^i\tilde{A}^{mj} + \underbrace{\tilde{\Gamma}_{jm}^j}_{0}\tilde{A}^{im} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK &= 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι $\tilde{\Gamma}_{jm}^j = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_m\tilde{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}\partial_m \ln \tilde{\gamma} = 0$ μιας και $\tilde{\gamma} = 1$. Λύνοντας ως προς τον όρο απόκλισης $\partial_j\tilde{A}^{ij}$ λαμβάνουμε τελικά:

$$\partial_j\tilde{A}^{ij} = -\tilde{\Gamma}_{jm}^i\tilde{A}^{jm} - 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK + 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k \quad (6.3.29)$$

Το τελευταίο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε την (6.3.29) στην (6.3.27) ώστε να πάρουμε το ζητούμενο:

$$\begin{aligned}
 \partial_t\tilde{\Gamma}^i &= -2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jm}^i\tilde{A}^{jm} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k\right) \\
 &\quad + \beta^j\partial_j\tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j\partial_j\beta^i + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^i\partial_j\beta^j + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ki}\partial_k\partial_j\beta^j + \tilde{\gamma}^{kj}\partial_j\partial_k\beta^i
 \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\tilde{\Gamma}^i = -2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jm}^i\tilde{A}^{jm} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k\right) + L_\beta\tilde{\Gamma}^i \quad (6.3.31)$$

6.3.3 Εξισώσεις των περιορισμών - Constraint equations

Το τελικό σύστημα εξισώσεων χρονικής εξέλιξης για τις δυναμικές μεταβλητές ($\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i$) απαρτίζεται από τις εξισώσεις (6.3.5), (6.3.12), (6.3.8), (6.3.13) και (6.3.25). Για να κλείσουμε τον BSSN φορμαλισμό, χρειάζεται να αναδιατυπώσουμε τις εξισώσεις των περιορισμών του συστήματος ADM-York με όρους των δυναμικών μεταβλητών και της σύμμορφης παραγώγου \tilde{D}_i .

A) Χαμιλτονιανός Περιορισμός:

Από τις εξισώσεις ADM-York παίρνουμε τον χαμιλτονιανό περιορισμό στην αρχική του μορφή:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho \quad (6.3.32)$$

Η σχέση που συνδέει το φυσικό βαθμωτό Ricci με το σύμμορφο ομόλογό του είναι γνωστή, ειδικότερα είναι η (5.2.11). Για να την εκφράσουμε με όρους ϕ αντικαθιστούμε $\psi = e^\phi$ έτσι:

$$R = e^{-4\phi}\tilde{R} - 8e^{-5\phi}\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_i\tilde{D}_j e^\phi \quad (6.3.33)$$

Ο όρος $K_{ij}K^{ij}$ εκφράζεται μέσω των \tilde{A}_{ij} και K ως:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}K^{ij} &= \left(e^{4\phi}\tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3}e^{4\phi}\tilde{\gamma}_{ij}K\right)\left(e^{-4\phi}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ij}K\right) = \left(\tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}_{ij}K\right)\left(\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}K\right) \\
 &= \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2
 \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Συνολικά λοιπόν, μετά την αντικατάσταση των (6.3.33), (6.3.34) στην (6.3.32) έχουμε:

$$e^{-4\phi}\tilde{R} - 8e^{-5\phi}\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_i\tilde{D}_je^\phi - \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3}K^2 = 16\pi\rho \quad (6.3.35)$$

Ισοδύναμα:

$$\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_i\tilde{D}_je^\phi - \frac{1}{8}e^\phi\tilde{R} + \frac{1}{8}e^{5\phi}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{1}{12}e^{5\phi}K^2 + 2\pi e^{5\phi}\rho = 0 \quad (6.3.36)$$

Β) Περιορισμοί Ορμής:

Οι περιορισμοί ορμής στην αρχική τους ADM-York μορφή, με τους δείκτες πάνω, γράφονται:

$$\begin{aligned} D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) &= 8\pi j^i \\ D_j A^{ij} - \frac{2}{3}\gamma^{ij}\partial_j K &= 8\pi j^i \end{aligned}$$

Όπως είδαμε, από την (5.2.25) έχουμε $D_j A^{ij} = e^{-10\phi}\tilde{D}_j(e^{6\phi}\tilde{A}^{ij})$ κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} e^{-10\phi}\tilde{D}_j(e^{6\phi}\tilde{A}^{ij}) - \frac{2}{3}e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j K &= 8\pi e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ik}j_k \\ e^{-4\phi}(\tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi) - \frac{2}{3}e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j K &= 8\pi e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ik}j_k \\ \tilde{D}_j\tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j K - 8\pi\tilde{\gamma}^{ik}j_k &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.37)$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι βολικότερο να εκφράσουμε τους περιορισμούς ορμής με τους δείκτες κάτω, που δίνονται από τη σχέση:

$$\tilde{D}^j\tilde{A}_{ij} + 6\tilde{A}_{ij}\tilde{D}^j\phi - \frac{2}{3}\partial_i K - 8\pi j_i = 0 \quad (6.3.38)$$

η οποία προκύπτει άμεσα αν πολλαπλασιάσουμε την (6.3.37) με $\tilde{\gamma}_{im}$.

Γ) Αλγεβρικοί Περιορισμοί:

Πέραν του χαμιλτονιανού περιορισμού και των περιορισμών ορμής, η σύμμορφη αποδόμηση που πραγματοποιεί ο BSSN φορμαλισμός και ο ορισμός των νέων δυναμικών μεταβλητών gammas εισάγουν τρεις αλγεβρικούς περιορισμούς (συνολικά 5 εξισώσεις). Οι περιορισμοί αυτοί πρέπει να ικανοποιούνται ώστε τα μεγέθη που υπολογίζονται από την αριθμητική εξέλιξη να είναι συνεπή με τη θεωρία εξασφαλίζοντας ότι υπολογίζουμε σωστά τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Έτσι λοιπόν, από τον τρόπο που τα έχουμε ορίσει, τα μεγέθη $\tilde{\gamma}_{ij}$, \tilde{A}_{ij} και $\tilde{\Gamma}^i$ οφείλουν να ικανοποιούν τους εξής αλγεβρικούς περιορισμούς:

- $\tilde{\gamma}_{ij}$ έχει ορίζουσα ίση με τη μονάδα: $\det(\tilde{\gamma}_{ij}) \equiv \tilde{\gamma} = 1$
- \tilde{A}_{ij} είναι άιχνο: $\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{A}_{ij} = 0$
- $\tilde{\Gamma}^i$ ικανοποιούν τη διαφορική σχέση ορισμού τους: $\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j\tilde{\gamma}^{ij}$

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι περιορισμοί απλά ελέγχονται, παρέχοντας ένα μέτρο του αριθμητικού σφάλματος. Συνήθως καθορίζεται ένα όριο ακρίβειας στο οποίο απαιτούμε να εμπίπτει η ποσότητα που

περιγράφει την παραβίασή τους. Μια καλύτερη πρακτική είναι να γίνεται επαναπροσδιορισμός των δυναμικών μεταβλητών ανά τακτά χρονικά διαστήματα με τρόπο που οι περιορισμοί να ικανοποιούνται. Συγκεκριμένα, φαίνεται εμπειρικά ότι:

- (i) Ο πρώτος αλγεβρικός περιορισμός $\tilde{\gamma} = 1$ δεν χρειάζεται να εφαρμόζεται σε κάθε επανάληψη του κώδικα καθώς δεν συμβάλλει στην αριθμητική ευστάθεια της προσομοίωσης. Δηλαδή δεν είναι υποχρεωτικό να γίνεται ανακλιμάκωση της $\tilde{\gamma}_{ij}$ ώστε $\tilde{\gamma} = 1$.
- (ii) Ο δεύτερος αλγεβρικός περιορισμός $\tilde{A} = \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0$ πρέπει να επιβάλλεται τακτικά από τον κώδικα (πράγμα που έχει καθιερωθεί στους πλείστους κώδικες), επειδή έχει παρατηρηθεί ότι βοηθάει στην αριθμητική ευστάθεια. Αυτό επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση:

$$\tilde{A}_{ij} \rightarrow \tilde{A}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{A}$$

- (iii) Ο τρίτος αλγεβρικός (διαφορικός) περιορισμός $\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}$ καλό είναι να χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των $\tilde{\Gamma}^i$ σε όρους που δεν περιέχουν παραγώγους τους. Τα $\tilde{\Gamma}^i$ που προκύπτουν ανεξάρτητα του ορισμού, μέσω της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης, χρησιμοποιούνται μόνο για τον υπολογισμό όρων που περιέχουν παραγώγους τους. (βλ. [68])

6.4 Εξισώσεις BSSN - The BSSN Equations

Σε αυτή την ενότητα θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας, αναφορικά με τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης και τις εξισώσεις των περιορισμών στα πλαίσια του φορμαλισμού BSSN.

Οι δυναμικές μεταβλητές στον φορμαλισμό BSSN είναι οι $(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$ και είναι εύκολο να δούμε ότι ανεξάρτητες συνιστώσες τους είναι $15 = 17 - 2$ (μιας και εκ κατασκευής $\tilde{\gamma} = 1$ και $\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0$). Στην πράξη, έχει διαφανεί εμπειρικά πως είναι προτιμότερο η χρονική εξέλιξη να πραγματοποιείται και για τις 17 δυναμικές μεταβλητές, με τις συνθήκες $\tilde{\gamma} = 1$ και $\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0$ να επιβάλλονται υπό τη μορφή αλγεβρικών περιορισμών που πρέπει να ικανοποιούνται μαζί με τους περιορισμούς ενέργειας και ορμής. Είδαμε πως στον ADM-York φορμαλισμό οι δυναμικές μεταβλητές είναι (γ_{ij}, K_{ij}) με 12 συνιστώσες. Οι 3 επιπρόσθετες δυναμικές μεταβλητές που εισάγει ο BSSN φορμαλισμός, τα gammas $\tilde{\Gamma}^i \equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες), αποτελούν το κλειδί για την ισχυρή υπερβολικότητα των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης, που είναι αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη υπολογιστικής ευστάθειας. Προφανώς, η σχέση ορισμού $\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}$ των gammas ισχύει αυστηρά μόνο αναλυτικά ενώ από αριθμητικής άποψης παίζει τον ρόλο ενός διαφορικού περιορισμού, που συμπληρώνει τους δύο προαναφερθέντες αλγεβρικούς περιορισμούς. Υπενθυμίζουμε πως στην εξαγωγή της εξίσωσης εξέλιξης των $\tilde{\Gamma}^i$ χρησιμοποιήθηκαν οι περιορισμοί ορμής, κάτι που επίσης αποτελεί σημαντικό στοιχείο του BSSN φορμαλισμού διότι διαμορφώνει το σύστημα χρονικής εξέλιξης με τρόπο που να είναι αριθμητικά ευσταθές.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι εξισώσεις του BSSN φορμαλισμού (σε συντεταγμένες προσαρμοσμένες στη διαμέριση (t, x^i) με $x^i = (x, y, z)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες) παρατίθενται πιο κάτω.

Εξισώσεις BSSN

Δυναμικές μεταβλητές στον BSSN φορμαλισμό είναι:

$$\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i$$

Από αυτές ανακτούμε τις φυσικές δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, K_{ij}) των υπερεπιφανειών μέσω των σχέσεων:

- $\gamma_{ij} = e^{4\phi} \tilde{\gamma}_{ij}$
- $K_{ij} = e^{4\phi} \left(\tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{ij} K \right)$

Οι συναρτήσεις βαθμίδας που καθορίζουν την διαμέριση είναι το lapse α και οι συνιστώσες του shift vector β^i και προσδιορίζονται από την επιλογή συνθηκών βαθμίδας. Συμβολίζουμε ρ, j_i, S_{ij} τους όρους που αφορούν πηγές ύλης/ενέργειας και ορίζονται από τις ακόλουθες προβολές του ταυσιτή ενέργειας-ορμής: $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, $j^i = -\gamma^{ij} n^\mu T_{\mu j}$, $S_{ij} = \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} T^{\mu\nu}$ με $S = \gamma^{ij} S_{ij}$.

1. Εξισώσεις των περιορισμών (constraints):

1a) Hamiltonian constraint

$$\mathcal{H} \equiv \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j e^\phi - \frac{1}{8} e^\phi \tilde{R} + \frac{1}{8} e^{5\phi} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{1}{12} e^{5\phi} K^2 + 2\pi e^{5\phi} \rho = 0 \quad (6.4.1)$$

1b) Momentum constraints

$$\mathcal{M}^i \equiv \tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{\gamma}^{ik} j_k = 0 \quad (6.4.2)$$

1c) Algebraic constraints

$$\det(\tilde{\gamma}_{ij}) \equiv \tilde{\gamma} = 1, \quad \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0, \quad \mathcal{G}^i \equiv \tilde{\Gamma}^i + \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} = 0 \quad (6.4.3)$$

2. Εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (evolution equations):

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \beta^i \partial_i \phi + \frac{1}{6} \partial_i \beta^i \quad (6.4.4)$$

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \beta^k \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{\gamma}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k \quad (6.4.5)$$

$$\partial_t K = -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha + \alpha \left[\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 + 4\pi(S + \rho) \right] + \beta^i \partial_i K \quad (6.4.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left[-D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 8\pi S_{ij}) \right]^{TF} + \alpha (\tilde{A}_{ij} K - 2\tilde{A}_{im} \tilde{A}^m_j) \\ + \beta^k \partial_k \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{kj} \partial_i \beta^k + \tilde{A}_{ik} \partial_j \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{A}_{ij} \partial_k \beta^k \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{\Gamma}^i &= -2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jm}^i \tilde{A}^{jm} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \tilde{\gamma}^{ik} j_k \right) \\ &+ \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ki} \partial_k \partial_j \beta^j + \tilde{\gamma}^{kj} \partial_j \partial_k \beta^i \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

όπου $D_i D_j \alpha = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - 2(\partial_i \alpha \partial_j \phi + \partial_j \alpha \partial_i \phi - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}^{mn} \partial_m \alpha \partial_n \phi)$ και ο δείκτης TF δηλώνει το άιχνο (trace-free) μέρος ενός τανυστή π.χ. για 3D τανυστή $X_{ij}^{TF} = X_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} X$. Ο φυσικός τανυστής Ricci που εμφανίζεται στην (6.4.7) αναλύεται ως εξής:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi \quad (6.4.9)$$

όπου

$$\bullet \quad \tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \partial_k \partial_l \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \partial_{j)} \tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k \tilde{\Gamma}_{(ij)k} + \tilde{\gamma}^{lm} (2\tilde{\Gamma}_{l(i} \tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\Gamma}_{im}^k \tilde{\Gamma}_{klj}) \quad (6.4.10)$$

$$\bullet \quad R_{ij}^\phi = -2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \tilde{D}^m \phi + 4\tilde{D}_i \phi \tilde{D}_j \phi - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}_m \phi \tilde{D}^m \phi \quad (6.4.11)$$

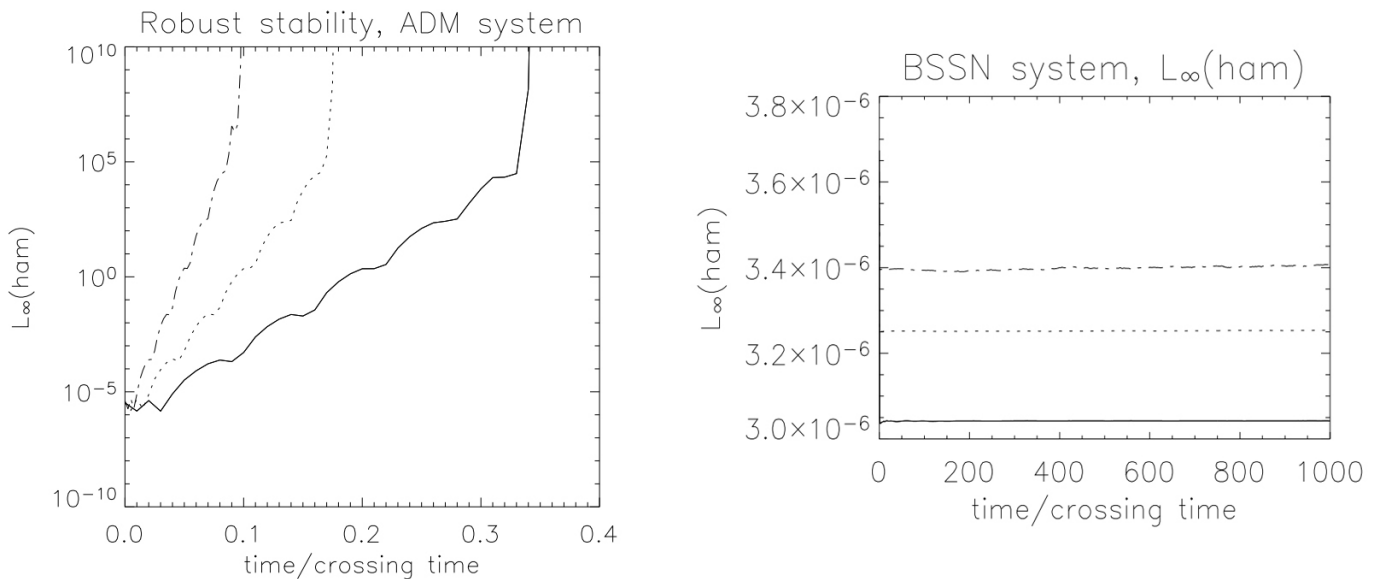
Ας συνοψίσουμε τον φορμαλισμό καταμετρώντας τον βαθμούς ελευθερίας. Έχουμε να υπολογίσουμε 17 μεταβλητές, συγκεκριμένα τις συνιστώσες των δυναμικών μεταβλητών $(\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$. Η χρονική τους εξέλιξη δίνεται από τις (6.4.4)-(6.4.8) και για να ξεκινήσει απαιτεί τον προσδιορισμό αρχικών δεδομένων. Για την κατασκευή αρχικών δεδομένων, διαθέτουμε τις συνολικά 9 εξισώσεις των περιορισμών και λόγω ελευθερίας επιλογής συντεταγμένων, επιλέγουμε 4 συνιστώσες ως συναρτήσεις βαθμίδας (κατ' αντιστοιχία με την επιλογή των (α, β^i)). Ως εκ τούτου, απομένουν $17 - 9 - 4 = 4 = 2 \times 2$ βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στο ζεύγος $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij})$ και αναπαριστούν τις δύο δυνατές πολώσεις των βαρυτικών κυμάτων.

Το πλήρες σύστημα BSSN περιλαμβάνει και ορισμένες εξισώσεις για τις συναρτήσεις βαθμίδας α και β^i (slicing - gauge conditions) οι οποίες είναι απαραίτητες για την ομαλή συμπεριφορά της λύσης. Οι συνθήκες βαθμίδας επιλέγονται ελεύθερα και μπορούν να καταστήσουν το συνολικό σύστημα πιο υπερβολικό ή πιο ελλειπτικό. Η επιλογή τους γίνεται με γνώμονα τις συμμετρίες του υπό μελέτη (αστρο)φυσικού χωρόχρονου, την αποτροπή συμπερίληψης στο πεδίο ολοκλήρωσης σημείων όπου υπάρχει ιδιομορφία καμπυλότητας και την αποφυγή δημιουργίας ιδιομορφιών συντεταγμένων.

6.5 Ευστάθεια εξισώσεων BSSN σε υπολογιστικές προσομοιώσεις - Stability of the BSSN equations in computational implementations

Στη ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων που ελήφθησαν με χρήση των ADM-York εξισώσεων, των BSSN εξισώσεων και βελτιωμένων παραλλαγών τους όπως Z4/Z4c, CCZ4 και FOBSSN. Ένα συνηθισμένο μέτρο της ευστάθειας και ακρίβειας του υπολογισμού είναι η νόρμα του μεγέθους \mathcal{H} που παριστάνει την απόκλιση/παραβίαση του Χαμιλτονιανού περιορισμού. Μικρές τιμές της νόρμας του \mathcal{H} καταδεικνύουν καλύτερη συμμόρφωση της γεωμετρίας των υπερεπιφανειών με τις ολοκληρωτικές συνθήκες και άρα μια πιο ακριβή λύση των εξισώσεων Einstein.

Σε πρώτο στάδιο παρατίθεται ένας έλεγχος ευστάθειας των εξισώσεων ADM-York και BSSN που εξετάζει την εξέλιξη της παραβίασης \mathcal{H} του Χαμιλτονιανού περιορισμού με τον χρόνο, σύμφωνα με τη δημοσίευση [45]. Ο έλεγχος εξετάζει την απόκριση του συστήματος σε τυχαία σφάλματα μικρής τάξης, ώστε να εξομοιώσει τα αριθμητικά σφάλματα που υπεισέρχονται σε μια προσομοίωση. Τα αρχικά δεδομένα που έχουν επιλεγεί είναι $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$ όπου ε_{ij} τυχαίος αριθμός στο διάστημα $(-10^{-10}/\rho^2, 10^{-10}/\rho^2)$ με ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας, $K_{ij} = 0$, $\alpha = 1$ και $\beta^i = 0$. Η συνθήκες βαθμίδας είναι αρμονικές (harmonic gauge) δηλαδή $\beta^i = 0$ (παντού) και $\partial_i \alpha = -\alpha^2 K$. Τα διαγράμματα που ελήφθησαν παρατίθενται πιο κάτω.

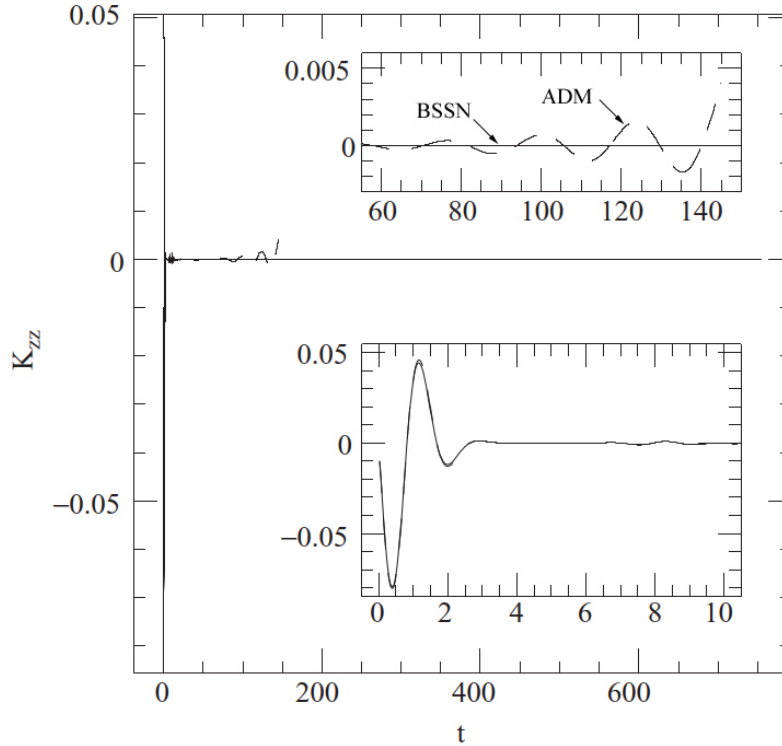


Σχήμα 6.5.1: Έλεγχος αριθμητικής ευστάθειας των συστημάτων ADM-York (αριστερά) και BSSN (δεξιά). Στα διαγράμματα παρουσιάζεται η νόρμα $L_\infty(\mathcal{H})$, όπου \mathcal{H} η απόκλιση από τον Χαμιλτονιανό περιορισμό, συναρτήσει του χρόνου. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην παράμετρο $\rho = 1$, η διακεκομμένη σε $\rho = 2$ και η παύflα-τελεία σε $\rho = 4$. Κύρια παρατήρηση είναι ότι στην περίπτωση του συστήματος ADM-York η $L_\infty(\mathcal{H})$ παρουσιάζει (γρηγορότερη από) εκθετική αύξηση, η οποία είναι εντονότερη για μεγάλες τιμές του ρ . Αντιθέτως, στην περίπτωση του συστήματος BSSN η $L_\infty(\mathcal{H})$ παραμένει σταθερή και πολύ μικρή ($\sim 10^{-6}$). [45]

Από τα δύο διαγράμματα επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι το σύστημα των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης ADM-York δεν είναι καλά τοποθετημένο, σε αντίθεση με το σύστημα εξισώσεων BSSN.

Παρόμοια συμπεράσματα αντλούνται από τη δημοσίευση [62] των Baumgarte και Shapiro, όπου

ως αρχικά δεδομένα χρησιμοποιούνται τα δεδομένα ενός κύματος Teukolsky μικρού πλάτους. Οι συνθήκες βαθμίδος που επιλέχθηκαν είναι $\beta^i = 0$ και "Harmonic Slicing" ($g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0$) που για $\beta^i = 0$ αντιστοιχεί στην εξίσωση χρονικής εξέλιξης $\partial_t \alpha = -\alpha^2 K$ για το lapse. Το μέγεθος που μελετάται είναι η K_{zz} συνιστώσα της εξωτερικής καμπυλότητας. Παρόλο που σε αρχικούς χρόνους τα δύο συστήματα εξισώσεων συμφωνούν μεταξύ τους, υπολογίζοντας μια τιμή για το K_{zz} γύρω στο 0, σε ύστερους χρόνους γίνεται φανερό ότι σύστημα ADM-York αποκλίνει.



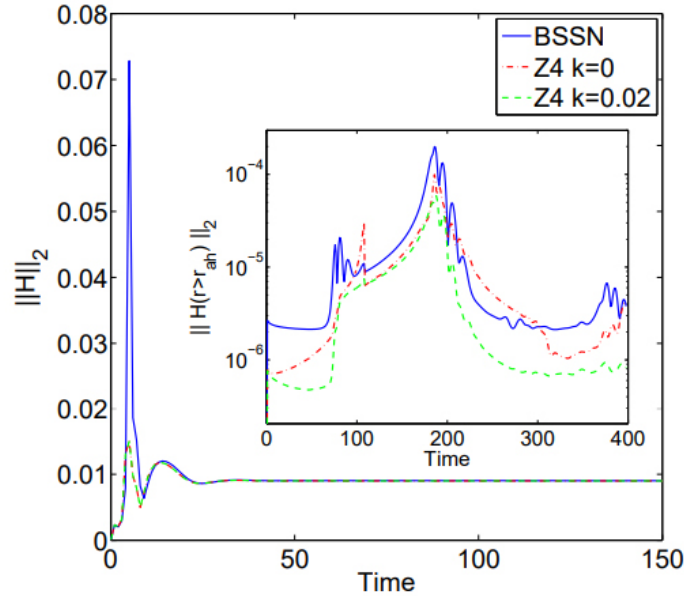
Σχήμα 6.5.2: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της συνιστώσας K_{zz} της εξωτερικής καμπυλότητας για ένα βαρυντικό κύμα στη γραμμικοποιημένη βαρύτητα με χρήση των ADM-York εξισώσεων (διακεκομμένη γραμμή) και των BSSN εξισώσεων (συνεχής γραμμή). Μεγέθυνση του διαγράμματος μέχρι $t = 10$ δείχνει συμφωνία ανάμεσα στους δύο φορμαλισμούς. Μεγέθυνση του διαγράμματος σε ύστερους χρόνους, μέχρι $t = 140$, καταδεικνύει ότι η K_{zz} παραμένει σταθερή και ίση με 0 όταν εξελίσσεται με τις BSSN εξισώσεις ενώ εκρήγνυται όταν εξελίσσεται με τις ADM-York εξισώσεις, οδηγώντας σε τερματισμό της προσομοίωσης.

Ακολουθώντας, παρουσιάζουμε έναν έλεγχο ευστάθειας των φορμαλισμών BSSN και Z4c για αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν σε χωρόχρονο με οπές (puncture initial data) δηλαδή σημεία που αφαιρούνται από την πολλαπλότητα και αντιστοιχούν σε ιδιομορφίες μελανών οπών. Ενδεικτικά, ο φορμαλισμός Z4 εισάγει στις εξισώσεις Einstein τα διανύσματα Z_α που αναπαριστούν την απόκλιση από τους περιορισμούς ενώ ο Z4c είναι μια τροποποίηση του Z4 η οποία περιέχει όρους απόσβεσης με παραμέτρους $\kappa_1 \equiv k, \kappa_2$. Στα πλαίσια του Z4c φορμαλισμού οι (trace-reversed) εξισώσεις Einstein λαμβάνουν τη μορφή:

$$R_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha Z_\beta + \nabla_\beta Z_\alpha = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) + \kappa_1 [t_\alpha Z_\beta + t_\beta Z_\alpha - (1 + \kappa_2) g_{\alpha\beta} t_\mu Z^\mu] \quad (6.5.1)$$

όπου t^μ οι συνιστώσες ενός χρονοειδούς διανύσματος. Από τις πιο πάνω εξάγονται οι εξισώσεις του Z4c συστήματος, που καταγράφονται στην [67] η οποία αποτελεί πηγή του κάτωθι διαγράμματος.

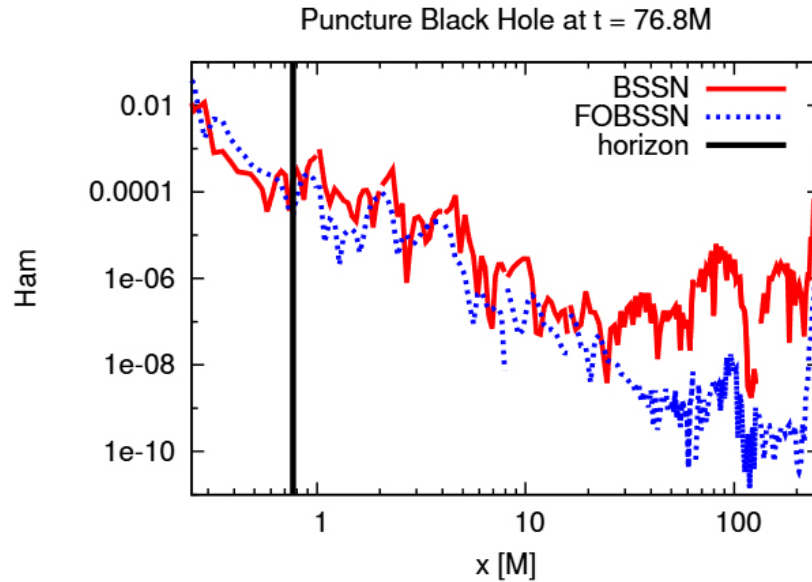
Τα αρχικά δεδομένα αντιστοιχούν σε μια στατική οπή, με αρχικές συνθήκες ($t = t_0 = 0$) $\beta^i = 0$ και "precollapsed" lapse $\alpha = \psi_0^{-2} = e^{-2\phi_0}$, με $\psi_0 = e^{\phi_0}$ ο σύμμορφος παράγοντας και ϕ_0 ο σύμμορφος εκθέτης της χωρικής μετρικής για $t = 0$. Το σύστημα Z4c παρουσιάζεται να είναι ελαφρώς πιο ευσταθές σε σχέση με το BSSN, ειδικά στην περίπτωση όπου αξιοποιούνται οι όροι απόσβεσης.



Σχήμα 6.5.3: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της L_2 νόρμας της απόκλισης \mathcal{H} από τον χαμιλτονιανό περιορισμό σε χωρόχρονο με οπή (puncture) για τα συστήματα BSSN και Z4c με παραμέτρους $\kappa_1 \equiv k = \{0, 0.02\}$ και $\kappa_2 = 0$. Το εσωτερικό διάγραμμα παρουσιάζει την χρονική εξέλιξη του $L_2(\mathcal{H})$ για σημείο που βρίσκεται έξω από τον φαινόμενο ορίζοντα της οπής. Γενικά το σύστημα Z4c επιδεικνύει μεγαλύτερη ευστάθεια, ειδικά στην περίπτωση $k = 0.02$. [67]

Πέρα από την εξέλιξη του στον χρόνο, μπορούμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $L_2(\mathcal{H})$ συναρτήσει των χωρικών συντεταγμένων. Κοντά στην οπή, είναι αναμενόμενο ότι και τα δύο συστήματα εξισώσεων θα παρουσιάσουν μεγάλη παραβίαση των περιορισμών (παρά την ύπαρξη όρων απόσβεσης στον Z4c) αφού εφαρμόζεται μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για λύση-μετρική που αποκλίνει. Μακριά από την οπή, όπου η λύση είναι ομαλή, αναμένουμε το σύστημα BSSN και οι παραλλαγές του θα παρουσιάσουν μικρότερα αριθμητικά σφάλματα.

Πράγματι, αυτό επιβεβαιώνεται από τη μελέτη ευστάθειας [69] για τη χρονική εξέλιξη ενός συνόλου αρχικών δεδομένων που αντιστοιχούν σε χωρόχρονο με περιστρεφόμενη οπή μάζας $M = 1$ και παράμετρο spin $a = 0.7$ (όπου $a = J/M$ με J τη στροφορμή της οπής). Στη μελέτη αυτή παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο τη στιγμή $t = 76.8M$ το οποίο απεικονίζει την απόκλιση από τον χαμιλτονιανό περιορισμό συναρτήσει της απόστασης x από την οπή, που βρίσκεται στο σημείο $r = 0$ και έχει (φαινομενικό) ορίζοντα στη θέση $r = 0.766M$. Οι δύο φορμαλισμοί που εξετάζονται είναι ο BSSN φορμαλισμός και ο FOBSSN (First-Order BSSN). Ο FOBSSN [69] είναι μια αναδιατύπωση του BSSN, που ως γνωστόν δίνει εξισώσεις με παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο και δεύτερης ως προς τον χώρο, ώστε να προκύψει ένα σύστημα υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο και τον χώρο.

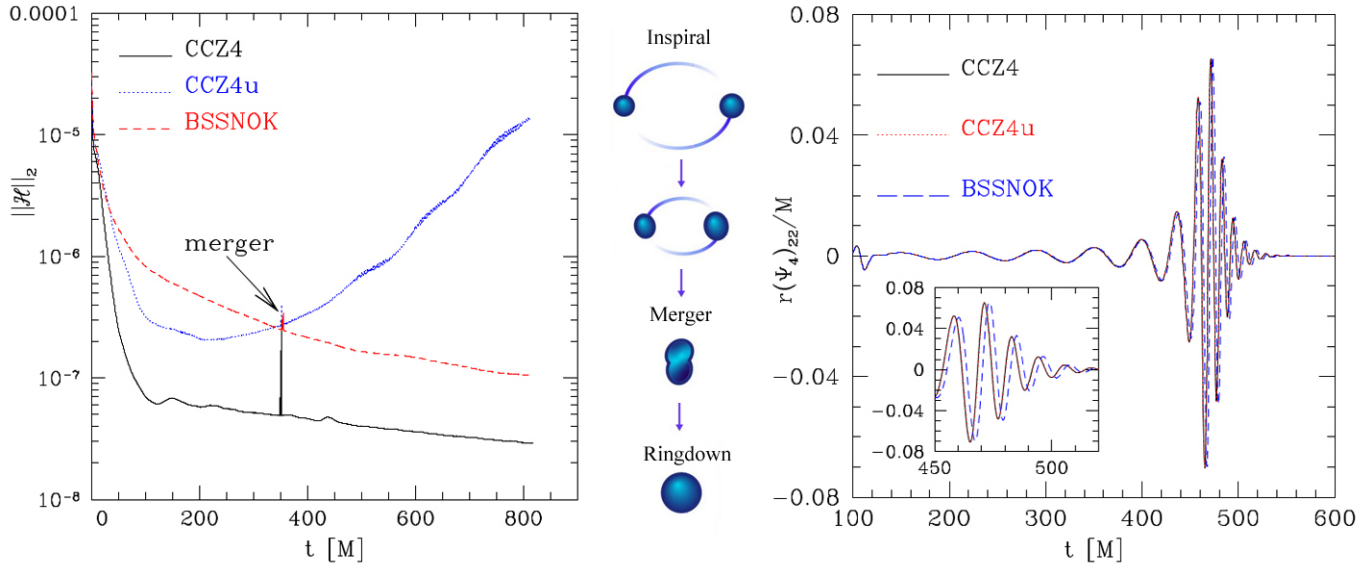


Σχήμα 6.5.4: Απόκλιση από τον χαμιλιτιανό περιορισμό ως συνάρτηση της θέσης πάνω στον άξονα x , κατά τη χρονική στιγμή $t = 76.8M$, σε χωρόχρονο με περιστρεφόμενη οπή (rotating puncture). Συγκρίνονται τα συστήματα εξισώσεων BSSN και FOBSSN. Η απόκλιση από τον περιορισμό αυξάνεται στην περιοχή κοντά την οπή (στη θέση $x = 0$). Καθώς απομακρυνόμαστε από την οπή η παραβίαση μειώνεται, η μετάβαση από τον οριζοντα είναι ομαλή και έπειτα φαίνεται να αποκλίνει κοντά στη θέση $x = 100M$. Η απόκλιση αυτή οφείλεται σε φαινόμενα του συνόρου του πεδίου υπολογισμού. Γενικά, ο φορμαλισμός FOBSSN παρουσιάζει καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τον BSSN, ειδικά κοντά στο σύνορο.

Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα για ένα πιο ενδιαφέρον (και υπολογιστικά πιο περίπλοκο) σύστημα δύο μελανών οπών που περιφέρονται η μία γύρω από την άλλη χάνοντας ενέργεια μέσω εκπομπής βαρυτικών κυμάτων, με αποτέλεσμα να πλησιάζουν μεταξύ τους (Inspiral) και τελικά να συγχωνεύονται σε μια μελανή οπή, μεγαλύτερης μάζας από αυτή των αρχικών (Merger). Η νέα διεγερμένη μελανή οπή εκπέμπει βαρυτικά κύματα μέχρι να αποκατασταθεί σε μια στάσιμη μελανή οπή Kerr (Ringdown), που χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τη μάζα της και τη στροφορμή της. Τα παραγόμενα κύματα περιγράφονται από ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών συχνοτήτων ω_{lmn} και αυτό το φάσμα συχνοτήτων είναι χαρακτηριστικό της μελανής οπής που το εκπέμπει, η οποία ταλαντώνεται με βάση τους Ψευδο-Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης (Quasi-Normal Modes). Τα δυαδικά συστήματα αυτά ονομάζονται "Black Hole Binaries" και είναι ιδιαίτερα σημαντικά στη γενική σχετικότητα και την αστροφυσική, καθώς αποτελούν πηγή βαρυτικών κυμάτων με πλάτος που γίνεται μέγιστο κατά το στάδιο της συγχώνευσης (merger). Τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα μπορούν να ανιχνευθούν από συμβολόμετρα laser σε παρατηρητήρια όπως τα LIGO και Virgo, παρέχοντας πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά του δυαδικού συστήματος (λ.χ. μάζα, στροφορμή).

Η υπολογιστική προσομοίωση του δυαδικού συστήματος πραγματοποιείται στη [70] με χρήση των εξισώσεων BSSN και CCZ4 (Conformal-Covariant Z4). Οι δύο μελανές οπές έχουν ίσες μάζες και δεν περιστρέφονται, ενώ η αρχική απόσταση που τις διαχωρίζει είναι $d = 8M$. Το σύστημα συγχωνεύεται σε μια απομωνομένη περιστρεφόμενη μελανή οπή τη στιγμή $t \approx 360M$. Προκειμένου να έχουμε ένα μέτρο για το πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών κυμάτων, χρησιμοποιούμε τη μιγαδική βαθμωτή συνάρτηση (Weyl scalar) Ψ_4 που ορίζεται $\Psi_4 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta$ όπου $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ο τανυστής Weyl, n^α φωτεινός διάνυσμα που δείχνει ακινικά προς τα έξω και \bar{m}^α φωτεινός μιγαδικός διάνυσμα κάθετο στο n^α . Σε ασυμπτωτικά επίπεδους χωρόχρονους, το βαθμωτό Weyl Ψ_4 παριστάνει την εξερχόμενη

βαρυτική ακτινοβολία.



Σχήμα 6.5.5: Αριστερά: Απόκλιση από τον χαμιλιτιανό περιορισμό ως συνάρτηση του χρόνου, για δυαδικό σύστημα μη-περιστρεφόμενων μελανών σπών ίσης μάζας. Συγκρίνονται τα συστήματα εξισώσεων BSSN (κόκκινο) και CCZ4 με (μαύρο) και χωρίς (μπλε - CCZ4u) όρους απόσβεσης. Η απόκλιση από τον περιορισμό παρουσιάζει κορυφή τη χρονική στιγμή όπου οι δύο σπές συγχωνεύονται σε μία (merger). Γενικά, οι εξισώσεις CCZ4 με απόσβεση παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη ευστάθεια ακολουθούμενες από τις BSSN. Τα δεδομένα αναφέρονται σε ανάλυση (coarse resolution) ίση με $h_0/M = 0.60$ και σύνορο του πεδίου υπολογισμού σε ακτίνα $R_{out} = 2192.16M$. Δεξιά: Πραγματικό μέρος του μιγαδικού βαθμωτού Weyl Ψ_4 που εξάγεται σε σφαίρα ακτίνας $r = 100M$ ως συνάρτηση του χρόνου. Το εικονιζόμενο Ψ_4 αντιστοιχεί στον $l = m = 2$ ψεύδο-κανονικό τρόπο ταλάντωσης και περιγράφει τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα από το δυαδικό σύστημα. Συγκρίνονται τα συστήματα εξισώσεων BSSN (μπλε) και CCZ4 με (μαύρο) και χωρίς (κόκκινο - CCZ4u) όρους απόσβεσης. Σε μεγέθυνση φαίνεται το Ψ_4 κατά το χρονικό διάστημα της συγχώνευσης (merger). Όλοι οι φορμαλισμοί οδηγούν σε ευσταθή προσομοίωση της συγχώνευσης (merger) και αποκατάστασης (ringdown). Τα δεδομένα αναφέρονται σε ανάλυση (coarse resolution) ίση με $h_0/M = 0.48$ και σύνορο του πεδίου υπολογισμού σε ακτίνα $R_{out} = 2192.16M$.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι εξισώσεις BSSN καθώς και συναφείς εξισώσεις με βελτιωμένη ευστάθεια, προσομοιώνουν επιτυχώς και με ικανοποιητική ακρίβεια ένα μεγάλο εύρος χωρόχρονων και αστροφυσικών συστημάτων. Δικαιολογημένα λοιπόν, εξαιτίας της ευστάθειάς του και της ιδιότητάς του να περιορίζει την επέκταση αριθμητικών σφαλμάτων (όπως η παραβίαση των περιορισμών ενέργειας-ορμής), ο φορμαλισμός BSSN και οι παραλλαγές του αποτελούν σήμερα το καθιερωμένο σύστημα εξισώσεων στο πεδίο της αριθμητικής σχετικότητας.

Appendices

A

Παράγωγος Lie του προβολικού τελεστή - Lie derivative of the projector

Η παράγωγος Lie κατά μήκος του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} ενός χωρικού τανυστή \mathbf{S} γραμμένου σε συναλλοίωτη μορφή (δεικτες κάτω) είναι επίσης χωρικός τανυστής, ίδιας τάξης. Το συμπέρασμα αυτό εξάγεται από τη σχέση:

$$L_{\mathbf{n}}\gamma^\mu{}_\nu = n^\mu a_\nu \quad (\text{A.1})$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{n}}\gamma^\mu{}_\nu &= n^\lambda \nabla_\lambda (\gamma^\mu{}_\nu) - \gamma^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda n^\mu + \gamma^\mu{}_\lambda \nabla_\nu n^\lambda \\ &= n^\lambda \nabla_\lambda (n^\mu n_\nu) - \nabla_\nu n^\mu - n^\lambda n_\nu \nabla_\lambda n^\mu + \nabla_\nu n^\mu + n^\mu \underbrace{n_\lambda \nabla_\nu n^\lambda}_0 \\ &= n^\lambda \nabla_\lambda (n^\mu n_\nu) - n^\lambda n_\nu \nabla_\lambda n^\mu \\ &= n^\lambda n_\nu \nabla_\lambda n^\mu + n^\lambda n^\mu \nabla_\lambda n_\nu - n^\lambda n_\nu \nabla_\lambda n^\mu \\ &= n^\mu a_\nu \end{aligned}$$

Αν τώρα \mathbf{S} ένας καθαρά χωρικός συναλλοίωτος τανυστής τάξης (0, 2), ώστε $S_{\alpha\beta} = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta S_{\mu\nu}$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{n}}S_{\alpha\beta} &= L_{\mathbf{n}}(\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta S_{\mu\nu}) = \gamma^\nu{}_\beta S_{\mu\nu} L_{\mathbf{n}}\gamma^\mu{}_\alpha + \gamma^\mu{}_\alpha S_{\mu\nu} L_{\mathbf{n}}\gamma^\nu{}_\beta + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta L_{\mathbf{n}}S_{\mu\nu} \\ &= \gamma^\nu{}_\beta \underbrace{S_{\mu\nu} n^\mu}_0 a_\alpha + \gamma^\mu{}_\alpha \underbrace{S_{\mu\nu} n^\nu}_0 a_\beta + \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta L_{\mathbf{n}}S_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$L_{\mathbf{n}}S_{\alpha\beta} = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta L_{\mathbf{n}}S_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

Η γενίκευση της πιο πάνω σχέσης σε συναλλοίωτους τανυστές υψηλότερης τάξης είναι άμεση. Αποδειξάμε λοιπόν ότι αν ένας συναλλοίωτος τανυστής \mathbf{S} είναι καθαρά χωρικός, τότε η Lie παράγωγος του $L_{\mathbf{n}}\mathbf{S}$ κατά μήκος του \mathbf{n} είναι επίσης χωρική.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για την παράγωγο Lie $L_{\mathbf{m}}\mathbf{S}$ στην κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος χρονικής εξέλιξης $\mathbf{m} = \alpha\mathbf{n}$ όπου τώρα ο \mathbf{S} είναι οποιοσδήποτε χωρικός τανυστής (όχι κατ' ανάγκη συναλλοίωτος - μπορεί να έχει και άνω δείκτες). Δηλαδή για κάθε χωρικό τανυστή \mathbf{S} ο τανυστής $L_{\mathbf{m}}\mathbf{S}$ είναι επίσης χωρικός. Αυτό είναι συνέπεια της σχέσης:

$$L_{\mathbf{m}}\gamma^\mu{}_\nu = 0 \quad (\text{A.3})$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
L_m \gamma^\mu{}_\nu &= m^\lambda \nabla_\lambda (\gamma^\mu{}_\nu) - \gamma^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda m^\mu + \gamma^\mu{}_\lambda \nabla_\nu m^\lambda \\
&= \alpha n^\lambda \nabla_\lambda (n^\mu n_\nu) - \gamma^\lambda{}_\nu n^\mu \nabla_\lambda \alpha - \alpha \gamma^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda n^\mu + \underbrace{\gamma^\mu{}_\lambda n^\lambda \nabla_\nu \alpha}_{0} + \alpha \gamma^\mu{}_\lambda \nabla_\nu n^\lambda \\
&= \alpha n^\lambda \nabla_\lambda (n^\mu n_\nu) - n^\mu D_\nu \alpha + \alpha \gamma^\lambda{}_\nu (K_\lambda{}^\mu + n_\lambda a^\mu) - \alpha \gamma^\mu{}_\lambda (K_\nu{}^\lambda + n_\nu a^\lambda) \\
&= \alpha n_\nu n^\lambda \nabla_\lambda n^\mu + \alpha n^\mu n^\lambda \nabla_\lambda n_\nu - \alpha n^\mu a_\nu + \alpha K_\nu{}^\mu - \alpha K_\nu{}^\mu - \alpha n_\nu a^\mu \\
&= \alpha n_\nu a^\mu + \alpha n^\mu a_\nu - \alpha n^\mu a_\nu - \alpha n_\nu a^\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

Αν S ένας καθαρά χωρικός τανυστής οποιαδήποτε τάξης, έστω $(1, 1)$, έχουμε $S^\alpha{}_\beta = \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta S^\mu{}_\nu$ έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
L_m S^\alpha{}_\beta &= L_m (\gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta S^\mu{}_\nu) = \gamma^\nu{}_\beta S^\mu{}_\nu \underbrace{L_m \gamma^\alpha{}_\mu}_0 + \gamma^\alpha{}_\mu S^\mu{}_\nu \underbrace{L_m \gamma^\nu{}_\beta}_0 + \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta L_m S^\mu{}_\nu \\
&= \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta L_m S^\mu{}_\nu
\end{aligned}$$

Δηλαδή καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$L_m S^\alpha{}_\beta = \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta L_m S^\mu{}_\nu \quad (\text{A.4})$$

Η γενίκευση του πιο πάνω αποτελέσματος σε τανυστές οποιασδήποτε τάξης είναι άμεση.

B

3+1 Ανάλυση τανυστών 2ης τάξης - 3+1 Decomposition of 2nd rank tensors

Θα δείξουμε ότι ένας γενικός τανυστής δεύτερης τάξης T με συνιστώσες $T_{\alpha\beta}$ αναλύεται στα πλαίσια του 3+1 φορμαλισμού στις εξής συνιστώσες:

$$T_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu} - n_\alpha n^\nu \gamma^\mu_\beta T_{\nu\mu} - n_\beta n^\nu \gamma^\mu_\alpha T_{\mu\nu} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε από το δεξί μέλος για να καταλήξουμε στο αριστερό, αναπτύσσοντας τους προβολικούς τελεστές:

$$\begin{aligned} & \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu} - n_\alpha n^\nu \gamma^\mu_\beta T_{\nu\mu} - n_\beta n^\nu \gamma^\mu_\alpha T_{\mu\nu} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \\ & = (\delta^\mu_\alpha + n^\mu n_\alpha)(\delta^\nu_\beta + n^\nu n_\beta) T_{\mu\nu} - n_\alpha n^\nu (\delta^\mu_\beta + n^\mu n_\beta) T_{\nu\mu} - n_\beta n^\nu (\delta^\mu_\alpha + n^\mu n_\alpha) T_{\mu\nu} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \\ & = T_{\alpha\beta} + \cancel{n^\nu n_\beta T_{\alpha\nu}} + \cancel{n^\mu n_\alpha T_{\mu\beta}} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} - \cancel{n_\alpha n^\nu T_{\nu\beta}} - n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\nu\mu} - \cancel{n_\beta n^\nu T_{\alpha\nu}} - \cancel{n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}} \\ & \quad + \cancel{n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}} \\ & \stackrel{\mu\leftrightarrow\nu}{=} T_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} - n_\alpha n_\beta n^\nu n^\mu T_{\mu\nu} \\ & = T_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Η πιο πάνω ανάλυση βρίσκει εφαρμογή στην 3+1 ανάλυση του τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu} - n_\alpha n^\nu \gamma^\mu_\beta T_{\nu\mu} - n_\beta n^\nu \gamma^\mu_\alpha T_{\mu\nu} + n_\alpha n_\beta n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} \\ &= S_{\alpha\beta} + n_\alpha j_\beta + n_\beta j_\alpha + n_\alpha n_\beta \rho \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

όπου $S_{\alpha\beta} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta T_{\mu\nu}$, $j_\alpha \equiv -\gamma^\mu_\alpha n^\nu T_{\mu\nu}$ και $\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$.

Με παρόμοιο τρόπο αναλύουμε στον 3+1 χωρόχρονο τις εξισώσεις Einstein:

$$G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} + n_\alpha \mathcal{M}_\beta + n_\beta \mathcal{M}_\alpha + n_\alpha n_\beta \mathcal{H} \quad (\text{B.3})$$

όπου:

- $\mathcal{E}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta G_{\mu\nu} - 8\pi S_{\alpha\beta}$
- $\mathcal{M}_\alpha \equiv -\gamma^\mu_\alpha n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = -\gamma^\mu_\alpha n^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi j_\alpha$
- $\mathcal{H} \equiv n^\mu n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} - 8\pi \rho$

C

Χαμιλτονιανός φορμαλισμός της γενικής σχετικότητας κατά ADM - ADM Hamiltonian formulation of GR

Ο Χαμιλτονιανός φορμαλισμός της ΓΣ διατυπώθηκε από τους Arnowitt, Deser και Misner το 1962 [39] σε μια προσπάθεια να εξευρεθεί μια θεωρία για την κανονική κβάντωση της βαρύτητας. Ο Χαμιλτονιανός φορμαλισμός εισάγει την διαμέριση του χωρόχρονου σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες Σ_t σταθερού καθολικού χρόνου t , δηλαδή ο χωρόχρονος διαχωρίζεται σε χώρο και χρόνο όπως ακριβώς στον 3+1 φορμαλισμό. Αυτό είναι απαραίτητο ώστε μέσα από τις Χαμιλτονιανές εξισώσεις κίνησης να προκύψουν οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τις δυναμικές μεταβλητές του χώρου φάσεων. Η δυναμική περιγραφή του 3+1 χωρόχρονου που θεμελιώθηκε από τον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της αριθμητικής γενικής σχετικότητας.

Οι Arnowitt, Deser και Misner εισήγαγαν τα γνωστά μεγέθη του lapse α , του shift vector με συνιστώσες β^i και της χωρικής μετρικής μιας υπερεπιφάνειας, με συνιστώσες $\gamma_{\mu\nu}$ και εξέφρασαν τη μετρική του χωρόχρονου συναρτήσει αυτών. Το στοιχείο μήκους ds^2 στον 3+1 χωρόχρονο γράφεται:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j = (-\alpha^2 + \beta_k \beta^k) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{C.1})$$

Ξεκινάμε τη δυναμική περιγραφή από τον Λαγκρατζιανό φορμαλισμό της ΓΣ, όπου ορίζουμε (σε μονάδες $c = G = 1$) την Einstein-Hilbert Lagrangian density \mathcal{L}_{EH} η οποία παριστάνει τη Λαγκρατζιανή πυκνότητα του βαρυτικού πεδίου στο κενό:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \quad {}^{(4)}R \quad (\text{C.2})$$

όπου ${}^{(4)}R$ η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci του χωρόχρονου και $g = \det(g_{\mu\nu})$. Η διπλή συστολή της εξίσωσης Gauss-Codazzi με τη μετρική παρέχει τη βαθμωτή εξίσωση Gauss (3.5.15) την οποία λύνουμε ως προς ${}^{(4)}R$:

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - 2n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} \quad (\text{C.3})$$

από τη σχέση $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] n^\mu = R^\mu_{\sigma\mu\nu} n^\sigma = R_{\sigma\nu} n^\sigma$ έχουμε:

$$\begin{aligned} n^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} &= n^\mu (\nabla_\nu \nabla_\mu n^\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu n^\nu) \\ &= \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu) - \nabla_\nu n^\mu \nabla_\mu n^\nu - \nabla_\mu (n^\mu \nabla_\nu n^\nu) + \underbrace{\nabla_\mu n^\mu}_{-K} \underbrace{\nabla_\nu n^\nu}_{-K} \\ &= \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu - n^\nu \nabla_\mu n^\mu) - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + K^2 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

όπου γράψαμε τον όρο $\nabla_\nu n^\mu \nabla_\mu n^\nu = K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$ διότι:

$$K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = K_\mu{}^\nu K_\nu{}^\mu = \gamma^\rho{}_\mu (\nabla_\rho n^\nu) \gamma^\sigma{}_\nu (\nabla_\sigma n^\mu) = (\delta^\rho{}_\mu + n^\rho n_\mu) (\delta^\sigma{}_\nu + n^\sigma n_\nu) (\nabla_\rho n^\nu) (\nabla_\sigma n^\mu) = \nabla_\mu n^\nu \nabla_\nu n^\mu \quad (\text{C.5})$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $n_\mu \nabla_\nu n^\mu = 0$. Αντικαθιστώντας τη (C.4) στη (C.3) έχουμε:

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - 2\nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu - n^\nu \nabla_\mu n^\mu) \quad (\text{C.6})$$

Ο τελευταίος όρος στην πιο πάνω σχέση είναι μια 4-απόκλιση η οποία, όταν γράψουμε την δράση Einstein-Hilbert $S_{EH} = \int_V \mathcal{L}_{EH} d^4x$ ολοκληρώνοντας τη Λαγκρατζιανή πυκνότητα Einstein-Hilbert σε ένα χωρίο V , μετατρέπεται σε ένα ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο ∂V του 4-όγκου V το οποίο τίθεται ίσο με μηδέν (επιφανειακός όρος). Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα απόκλισης (divergence theorem) που αποτελεί την τετραδιάστατη γενίκευση του θεωρήματος Gauss:

Θεώρημα C.1: Divergence Theorem

Έστω πεπερασμένο χωρίο V του χωρόχρονου (M, g) το οποίο περικλείεται από μια κλειστή τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια $\Sigma = \partial V$ η οποία κληρονομεί επαγόμενη μετρική γ (οποιασδήποτε υπογραφής) από τον περιβάλλοντα χωρόχρονο. Για κάθε διανυσματικό πεδίο A που ορίζεται στο V ισχύει:

$$\int_V \nabla_\mu A^\mu \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial V} A^\mu n_\mu \sqrt{|\gamma|} d^3x \quad (\text{C.7})$$

όπου n^μ οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια $\Sigma = \partial V$ που αποτελεί το σύνορο του 4-όγκου V και $\gamma_{\mu\nu}$ οι συνιστώσες της επαγόμενης μετρικής της υπερεπιφάνειας Σ . Συμβολίσαμε $g = \det(g_{\mu\nu})$ και $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu})$.

Όπως αναφέραμε, η δράση Einstein-Hilbert S_{EH} προκύπτει από την ολοκλήρωση της Λαγκρατζιανής πυκνότητας Einstein-Hilbert σε ένα δεδομένο χωρίο V που αποτελεί υποσύνολο του χωρόχρονου M . Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int_V {}^{(4)}R \sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_V [{}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x - \frac{2}{16\pi} \int_V \nabla_\nu (n^\mu \nabla_\mu n^\nu - n^\nu \nabla_\mu n^\mu) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_V [{}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x - \frac{2}{16\pi} \oint_{\partial V} (n^\mu \nabla_\mu n^\nu - n^\nu \nabla_\mu n^\mu) n_\nu \sqrt{\gamma} d^3x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_V [{}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x - \underbrace{\frac{2}{16\pi} \oint_{\partial V} \nabla_\mu n^\mu \sqrt{\gamma} d^3x}_{=0 \text{ (boundary term)}} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_V [{}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Ο επιφανειακός όρος μηδενίζεται διότι ισούται με (μείον) τη μέση καμπυλότητα η οποία μηδενίζεται στο σύνορο του χωρίου (νοουμένου ότι το χωρίο είναι αρκούτως μεγάλο ώστε στο σύνορό του η καμπυλότητα να είναι μηδενική). Η παρατήρηση αυτή ισχύει γενικότερα, δηλαδή η προσθήκη ενός όρου

4-απόκλισης στη Λαγκρατζιανή δεν μεταβάλλει τις εξισώσεις κίνησης επειδή κατά τον υπολογισμό της δράσης ο όρος αυτός μετατρέπεται σε επιφανειακό όρο ο οποίος μηδενίζεται.

Επομένως μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο $\nabla_\nu(n^\mu\nabla_\mu n^\nu - n^\nu\nabla_\mu n^\mu)$ από τη Λαγκρατζιανή πυκνότητα Einstein-Hilbert γεγονός που οδηγεί στη Λαγκρατζιανή πυκνότητα ADM \mathcal{L}_{ADM} για το βαρυτικό πεδίο στον 3+1 χωρόχρονο. Επισημαίνουμε ότι στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση (t, x^i) για να εκφράσουμε τις συνιστώσες των σχετικών τανυστών.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ADM} &= \sqrt{-g}({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) \\ &= \alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K^{ij})\end{aligned}\quad (\text{C.9})$$

όπου αγνοήσαμε τη σταθερά $1/16\pi$ χάριν συντομίας και εκφράσαμε τον όρο $\sqrt{-g}$, που υπεισέρχεται στο 4-διάστατο στοιχείο όγκου, στο 3+1 σύστημα συντεταγμένων σύμφωνα με τη σχέση (3.3.18) η οποία αναφέρει ότι $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$ (α το lapse). Η Λαγκρατζιανή πυκνότητα ADM περιλαμβάνει όρους που σχετίζονται με την εσωτερική και εξωτερική γεωμετρία των υπερεπιφανειών σταθερού χρόνου της διαμέρισης. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι στη Λαγκρατζιανή πυκνότητα ADM δεν εμφανίζονται χρονικές παράγωγοι του lapse α ή των συνιστωσών β^i του shift vector, πράγμα που σημαίνει ότι δεν αποτελούν δυναμικές μεταβλητές (μιας και οι κανονικές συζυγείς ορμές τους μηδενίζονται). Κατ' ακρίβεια, οι συναρτήσεις α, β^i αποτελούν πολλαπλασιαστές Lagrange που οδηγούν στις εξισώσεις των περιορισμών (constraints). Από την άλλη, οι 6 συνιστώσες γ_{ij} της χωρικής μετρικής μαζί με τις 6 συνιστώσες π^{ij} της συζυγούς ορμής της χωρικής μετρικής είναι πράγματι δυναμικές μεταβλητές και η χρονική τους εξέλιξη δίνεται από τις εξισώσεις του Hamilton.

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα ADM ορίζεται μέσω του ακόλουθου μετασχηματισμού Legendre:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_{ADM}\quad (\text{C.10})$$

όπου συμβολίσαμε $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t}$ και ορίσαμε

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}_{ADM}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}}\quad (\text{C.11})$$

τις συζυγείς κανονικές ορμές των γ_{ij} , οι οποίες υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\pi^{ij} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{ADM}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial\mathcal{L}_{ADM}}{\partial K_{kl}} \frac{\partial K_{kl}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial\mathcal{L}_{ADM}}{\partial K_{kl}} \left(-\frac{1}{2\alpha}\delta^i_k\delta^j_l \right) \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial\mathcal{L}_{ADM}}{\partial K_{ij}} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\alpha\sqrt{\gamma} \frac{\partial({}^{(3)}R - K^2 + K_{kl}K^{kl})}{\partial K_{ij}} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\alpha\sqrt{\gamma} \frac{\partial(-K^2 + K_{kl}\gamma^{km}\gamma^{ln}K_{mn})}{\partial K_{ij}} \\ &= -\frac{\sqrt{\gamma}}{2} \left(-2K \frac{\partial K}{\partial K_{ij}} + \delta^i_k\delta^j_l\gamma^{km}\gamma^{ln}K_{mn} + K_{kl}\gamma^{km}\gamma^{ln}\delta^i_m\delta^j_n \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\gamma}}{2} (-2K\gamma^{ij} + 2K^{ij}) \\ &= \sqrt{\gamma} (K\gamma^{ij} - K^{ij})\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

Σημείωση: Η συζυγής κανονική ορμή δεν είναι τανυστής αλλά τανυστική πυκνότητα (με βάρος 1) λόγω της παρουσίας του όρου $\sqrt{\gamma}$ στη σχέση (C.12). Μάλιστα, από την ίδια σχέση προκύπτει ότι είναι συμμετρική χωρική τανυστική πυκνότητα.

Το ίχνος της συζυγούς κανονικής ορμής ισούται με:

$$\pi = \gamma_{ij}\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K \underbrace{\delta^i_i}_3 - K) = 2\sqrt{\gamma}K \quad (\text{C.13})$$

Μπορούμε λοιπόν να μετασχηματίσουμε την (C.12) ώστε να γράψουμε την εξωτερική καμπυλότητα συναρτήσει της συζυγούς κανονικής ορμής της χωρικής μετρικής:

$$K^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi\gamma^{ij}\right) \quad (\text{C.14})$$

Αναφορικά με τις συζυγείς κανονικές ορμές των (μη-δυναμικών) μεταβλητών α και β^i , είναι εύκολο να δούμε ότι μηδενίζονται αφού όπως εξηγήσαμε η Λαγκρατζιανή ADM δεν περιέχει όρους $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}^i$.

$$\pi_{(\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\pi^i_{(\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{\beta}^i} = 0 \quad (\text{C.16})$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου λέμε ότι οι συζυγείς κανονικές ορμές $\pi_{(\alpha)}$, $\pi^i_{(\beta)}$ των α , β^i αντίστοιχα μηδενίζονται "ασθενώς" (στον φλοιό "on-shell", δηλαδή πάνω σε μια υπερεπιφάνεια) γεγονός που συμβολίζεται με $\pi_{(\alpha)} \approx 0$ και $\pi^i_{(\beta)} \approx 0$. Ειδικότερα, οι εξισώσεις (C.15) και (C.16) λέγονται πρωτεύοντες περιορισμοί (primary constraints) καθότι περιορίζουν τις δυναμικές μεταβλητές σε έναν υπόχωρο του φασικού χώρου.

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα ADM γράφεται τώρα:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K^{ij})$$

Κατά τα γνωστά, από τον ορισμό της εξωτερικής καμπυλότητας ως η παράγωγος Lie της χωρικής μετρικής κατά το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} έχουμε, στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) :

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2\alpha K_{ij} + 2D_{(i}\beta_{j)} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi\gamma_{ij}\right) + 2D_{(i}\beta_{j)} \quad (\text{C.17})$$

Αντικαθιστώντας την πιο πάνω έκφραση στην έκφραση της Χαμιλτονιανής πυκνότητας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) + 2\pi^{ij}D_{(i}\beta_{j)} - \alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) \\ &= \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) + 2\pi^{ij}D_i\beta_j - \alpha\sqrt{\gamma}\left({}^{(3)}R - \frac{\pi^2}{4\gamma} + \frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{\gamma} - \frac{\pi^2}{4\gamma}\right) \\ &= -\alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R) + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) + 2\pi^{ij}D_i\beta_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha\sqrt{\gamma} \text{}^{(3)}R + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) + 2D_i(\pi^{ij}\beta_j) - 2\beta_j D_i\pi^{ij} \\
&= -\alpha\sqrt{\gamma} \left(\text{}^{(3)}R - \frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{\gamma} + \frac{\pi^2}{2\gamma} \right) + 2\sqrt{\gamma}D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}}\beta_j \right) - 2\sqrt{\gamma}\beta_j D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} \right)
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Σημείωση: Για τη μετάβαση στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα συναλλοίωτης παραγωγίσης για την ταυυστική πυκνότητα π^{ij} .

$$D_i\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} \right) \tag{C.19}$$

Σημείωση: Γενικά, η συναλλοίωτη παράγωγος (της σύνδεσης Levi-Civita) μιας ταυυστικής πυκνότητας \mathcal{S} τάξης (r, s) με βάρος $W \in \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται στον χωρόχρονο (M, g) δίνεται από τον κανόνα:

$$\nabla_\mu \mathcal{S}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \sqrt{|g|}^W \nabla_\mu \left(\frac{\mathcal{S}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}}{\sqrt{|g|}^W} \right) \tag{C.20}$$

Ο όρος $D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}}\beta_j \right)$ στην (C.18) είναι όρος απόκλισης και όταν ολοκληρώσουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα σε μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια Σ_t της διαμέρισης ώστε να πάρουμε τη Χαμιλτονιανή, ο όρος αυτός θα μετατραπεί σε ένα ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο $\partial\Sigma_t$ το οποίο μηδενίζεται ως επιφανειακός όρος. Κατά συνέπεια μπορούμε να τον αγνοήσουμε και να γράψουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα ADM ως:

$$\mathcal{H} = -\alpha\sqrt{\gamma} \left(\text{}^{(3)}R - \frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{\gamma} + \frac{\pi^2}{2\gamma} \right) - 2\sqrt{\gamma}\beta_j D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} \right) \tag{C.21}$$

Εναλλακτικά, αν θέλουμε να γράψουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα ADM σε μια ισοδύναμη μορφή χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες K_{ij} της εξωτερικής καμπυλότητας αντί της συζυγούς ορμής π_{ij} τότε θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\alpha\sqrt{\gamma}(\text{}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 2\sqrt{\gamma}\beta_j D_i(K^{ij} - \gamma^{ij}K) \\
&= -2\sqrt{\gamma} \left[\alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\text{}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \right) + \beta_j D_i(K^{ij} - \gamma^{ij}K) \right] \\
&= -2\sqrt{\gamma} \left[\alpha\mathcal{H} + \beta_j \mathcal{M}^j \right]
\end{aligned} \tag{C.22}$$

όπου $\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \left(\text{}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \right)$ και $\mathcal{M}^j \equiv D_i(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$ όπως ακριβώς ορίστηκαν στις σχέσεις (4.6.1) και (4.6.2) χωρίς όμως τους όρους που προέρχονται από τις πηγές ύλης και ενέργειας διότι δεν έχουμε προσθέσει στη Χαμιλτονιανή πυκνότητα ADM τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα της ύλης (\mathcal{H}_M), ασχολούμαστε δηλαδή με τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα του κενού.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της Χαμιλτονιανής ADM την οποία θα χρειαστούμε για την εξαγωγή των εξισώσεων των περιορισμών καθώς και των εξισώσεων χρονικής εξέλιξης για τις δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, π_{ij}) . Για τον προσδιορισμό της H_{ADM} ολοκληρώνουμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα \mathcal{H} σε μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια Σ_t με στοιχείο όγκου d^3x και επαγόμενη χωρική μετρική η

οποία έχει συνιστώσες γ_{ij} .

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d^3x = \int_{\Sigma_t} \left[-\alpha \left({}^{(3)}R - \frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{\gamma} + \frac{\pi^2}{2\gamma} \right) - 2\beta_j D_i \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} \right) \right] \sqrt{\gamma} d^3x \quad (\text{C.23})$$

Γνωρίζουμε ότι οι δυναμικές μεταβλητές περιορίζονται σε έναν υπόχωρο του φασικού χώρου εξαιτίας των πρωτεύοντων περιορισμών. Η απαίτηση οι πρωτεύοντες περιορισμοί να ικανοποιούνται από τις δυναμικές μεταβλητές καθώς αυτές εξελίσσονται στον χρόνο οδηγεί σε ένα δεύτερο σύστημα περιορισμών που ονομάζονται δευτερεύοντες περιορισμοί (secondary constraints). Φορμαλιστικά, οι δευτερεύοντες περιορισμοί προκύπτουν θεωρώντας μεταβολές της Χαμιλτονιανής ADM ως προς το lapse α και τις συνιστώσες β_i του shift vector, που αποτελούν πολλαπλασιαστές Lagrange:

$$\dot{\pi}_{(\alpha)} = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta \alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^{(3)}R - \frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{\gamma} + \frac{\pi^2}{2\gamma} = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$\dot{\pi}_{(\beta)}^i = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta \beta_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_j \left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{\gamma}} \right) = 0 \quad (\text{C.25})$$

Η εξίσωση (C.24) θέτει περιορισμό στη Χαμιλτονιανή αφού εξαναγκάζει τον πρώτο όρο της (C.23) να μηδενίζεται -όχι παντού- (η Χαμιλτονιανή παραμένει "off-shell") αλλά πάνω σε κάθε χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ_t της διαμέρισης, γι' αυτό και ονομάζεται Χαμιλτονιανός περιορισμός. Λαμβάνοντας τη μεταβολή ως προς α της ισοδύναμης Χαμιλτονιανής ADM που προκύπτει από τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα (C.22) και περιέχει όρους K_{ij} αντί π_{ij} , γίνεται ξεκάθαρο ότι η (C.24) είναι ισοδύναμη με τον Χαμιλτονιανό περιορισμό $\mathcal{H} = 0$ που εξάγαμε στις εξισώσεις ADM-York, απουσία πηγών ύλης-ενέργειας.

Από την άλλη η (διανυσματική) εξίσωση (C.25), που είναι κατ' ακρίβεια 3 εξισώσεις, περιορίζει στις συνιστώσες της συζυγούς κανονικής ορμής πάνω σε κάθε χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ_t της διαμέρισης, γι' αυτό και οι 3 αυτές εξισώσεις φέρουν το όνομα περιορισμοί ορμής (momentum constraints) ή περιορισμοί διαφορομορφισμού (diffeomorphism constraints). Λαμβάνοντας τη μεταβολή ως προς β_i της ισοδύναμης Χαμιλτονιανής ADM που προκύπτει από τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα (C.22), γίνεται ξεκάθαρο ότι η (C.25) είναι ισοδύναμη με τους περιορισμούς ορμής $\mathcal{M}^i = 0$ που εξάγαμε στις εξισώσεις ADM-York, απουσία πηγών ύλης-ενέργειας.

Οι αρχικές συνθήκες που επιθυμούμε να επιβάλουμε στην υπερεπιφάνεια Σ_{t_0} αναφορικά με τις δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, π_{ij}) οφείλουν να ικανοποιούν τους περιορισμούς (C.24), (C.25). Αφότου ορίσουμε αρχικές συνθήκες χρειάζεται να εξελίξουμε τα αρχικά δεδομένα στον χρόνο εφαρμόζοντας τις κατάλληλες εξισώσεις χρονικής εξέλιξης που εν προκειμένω δίνονται από τις εξισώσεις του Hamilton:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H_{ADM}}{\delta \pi^{ij}} \quad (\text{C.26})$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta \gamma_{ij}} \quad (\text{C.27})$$

Χρησιμοποιώντας θεωρία των μεταβολών και μετά από έναν μακροσκελή υπολογισμό (βλ. [40] ή [74])

παίρνουμε τελικά τις ακόλουθες εξισώσεις χρονικής εξέλιξης:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi \gamma_{ij} \right) + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = & -\alpha \sqrt{\gamma} \left({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R \gamma^{ij} \right) + \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ij} \left(\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ik} \pi_k^j - \frac{1}{2} \pi \pi^{ij} \right) \\ & + \sqrt{\gamma} (D^i D^j \alpha - \gamma^{ij} D_k D^k \alpha) + \sqrt{\gamma} D_k \left(\frac{\pi^{ij} \beta^k}{\sqrt{\gamma}} \right) - \pi^{ki} D_k \beta^j - \pi^{kj} D_k \beta^i \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Σημείωση: Η (C.28) είναι εντελώς ισοδύναμη με την (4.5.8). Η εξίσωση (C.29) που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της συζυγούς κανονικής ορμής αν γραφεί σε όρους K_{ij} θα δώσει την εξίσωση χρονικής εξέλιξης (στο κενό):

$$\partial_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha ({}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k - \alpha \mathcal{H} \gamma_{ij} \quad (\text{C.30})$$

η οποία από φυσικής άποψης είναι ισοδύναμη με την ADM-York (4.5.9) (λόγω της φυσικής απαίτησης $\mathcal{H} = 0$) αλλά από μαθηματικής άποψης διαφέρει από αυτήν διότι περιλαμβάνει έναν όρο ανάλογο της απόκλισης \mathcal{H} από το Hamiltonian constraint, που εμπεριέχει δευτερες παραγώγους ως προς γ_{ij} αλλάζοντας τη δομή της διαφορικής εξίσωσης χρονικής εξέλιξης.

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη γεωμετρία του χωρόχρονου απουσία ύλης-ενέργειας είναι οι εξισώσεις των περιορισμών (C.24), (C.25) μαζί με τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (C.28), (C.29). Το σύστημα των εξισώσεων αυτών αποτελεί τις "original ADM" εξισώσεις ως προς τις δυναμικές μεταβλητές (γ_{ij}, π_{ij}) ενώ οι μη-δυναμικές μεταβλητές - συναρτήσεις βαθμίδας α και β^i καθορίζουν αντίστοιχα τον ιδιόχρονο που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές υπερεπιφάνειες και την "ολίσθηση" που υφίστανται οι χωρικές συντεταγμένες από μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη. Συνεπώς το lapse α και οι συνιστώσες του β^i σχετίζονται με την ελευθερία επιλογής συντεταγμένων και η επιλογή τους γίνεται αυθαίρετα. Δεδομένων κατάλληλων αρχικών δεδομένων που ικανοποιούν τους περιορισμούς σε μια αρχική υπερεπιφάνεια (Cauchy), ολόκληρος ο καθολικά υπερβολικός χωρόχρονος μπορεί να κατασκευαστεί από τη χρονική τους εξέλιξη μέσω του συστήματος (C.28), (C.29).

Βιβλιογραφία

- [1] Alcubierre M. (2008). Introduction to 3+1 Numerical Relativity, International Series of Monographs on Physics (Oxford, 2008; online edn, Oxford Academic, 1 Sept. 2008), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199205677.001.0001>
- [2] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2010). Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139193344>
- [3] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2021). Numerical Relativity: Starting from Scratch. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108933445>
- [4]ourgoulhon, E. (2012). 3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity. Lecture Notes in Physics v. 846, Springer Berlin Heidelberg.
- [5] Bona C., Palenzuela C. & Bona-Casas C. (2009). Elements of Numerical Relativity and Relativistic Hydrodynamics. 10.1007/978-3-642-01164-1.
- [6] Rezzolla, L. and Zanotti, O. (2013). Relativistic Hydrodynamics (Oxford, 2013; online edn, Oxford Academic, 23 Jan. 2014), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198528906.001.0001>
- [7] Shibata, M. (2015). Numerical Relativity. World Scientific Publishing Company Pte Limited. <https://doi.org/10.1142/9692>
- [8] Bernuzzi, S. (2021), Lecture Notes on 3+1 Numerical Relativity, Friedrich-Schiller-Universität Jena <http://sbernuzzi.gitpages.tpi.uni-jena.de/nr/notes/2021/main.pdf>
- [9] Cook, G. B. (2000). Initial Data for Numerical Relativity. Living Reviews in Relativity, 3(1), 5. <https://doi.org/10.12942/lrr-2000-5>
- [10] Wald, Robert M. (1984). General Relativity. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr. <https://doi.org/10.7208/chicago/9780226870373.001.0001>.
- [11] Straumann, N. (2013). General Relativity. Springer <https://doi.org/10.1007/978-94-007-5410-2>
- [12] Hartle, J.B. (2021). Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity. Cambridge University Press
- [13] Carroll, Sean M. (2003). Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. : Addison-Wesley
- [14] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., (1973). Gravitation (San Francisco: Freeman)
- [15] Blau, M. (2022) Lecture Notes on General Relativity, Institute for Theoretical Physics - Universität Bern, <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>

- [16] Aretakis, S. (2018), Lecture Notes on General Relativity, Columbia University <https://www.math.toronto.edu/aretakis/General%20Relativity-Aretakis.pdf>
- [17] Choquet-Bruhat, Yvonne (2015). Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology - Oxford University Press
- [18] Choquet-Bruhat, Y., Geroch R. (1969) "Global Aspects of the Cauchy Problem in General Relativity" Communications in Mathematical Physics 14:329-335.
- [19] H. Ringström. The Cauchy Problem in General Relativity. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society. 2009.
- [20] Czimek S., Graf O. (2019). The spacelike-characteristic Cauchy problem of general relativity in low regularity.
- [21] Schutz BF. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1980
- [22] Ferrari, V., Gualtieri, L., & Pani, P. (2020). General Relativity and its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429491405>
- [23] Reall H. - General Relativity, Lecture Notes for the University of Cambridge (Part III of the Mathematical Tripos), 2022: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/hsr1000/part3_gr_lectures.pdf
- [24] Chen, Bang-Yen. (2017) Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds. <https://doi.org/10.1142/10419>
- [25] Bär C. Lorentzian Geometry. Lecture Notes, Summer Term 2004, University of Potsdam
- [26] Lindemann D. Lecture Notes on Differential Geometry, University of Hamburg 2020
- [27] Lahiri, A: Lecture Notes on Differential Geometry for Physicists, 2011
- [28] Tu, Loring W. (2011). An Introduction to Manifolds. 2nd ed. New York: Springer
- [29] Wilson J. Manifolds, WOMP 2012, University of Michigan <https://dept.math.lsa.umich.edu/~jchw/WOMPtalk-Manifolds.pdf>
- [30] Ansoldi S. Geometry of Spacetime - Lecture Notes - Academic Year 2002/2003, University of Trieste
- [31] Choquet-Bruhat, Y., Geroch, R. (1969) Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. Commun. Math. Phys. 14, 329-335.
- [32] Choquet-Bruhat, Y., Ruggeri, T. (1983) Hyperbolicity of the 3 + 1 system System of Einstein Equations. Commun. Math. Phys. 89, 269-275.
- [33] Choquet-Bruhat, Y., York, J. (1980) The Cauchy problem. In: Held, A. (Ed.) General Relativity and Gravitation, Vol. I. Plenum, New York, 99-172.
- [34] C. Palenzuela. "Introduction to Numerical Relativity," Frontiers in Astronomy and Space Sciences, vol. 7, 2020.

- [35] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner. (2008) "Republication of: The dynamics of general relativity," in *General Relativity and Gravitation*, vol. 40, no. 9,
- [36] S. Bernuzzi, D. Hilditch. Constraint violation in free evolution schemes: Comparing BSSNOK with a conformal decomposition of Z4. *Phys. Rev. D*, 81:084003, 2010, arXiv:0912.2920 [gr-qc].
- [37] L.E. Kidder, L. Lindblom, M.A. Scheel, L.T. Buchman, and H.P. Pfeiffer : Boundary conditions for the Einstein evolution system, *Phys. Rev. D* 71, 064020 (2005)
- [38] J. Seiler, B. Szilágyi, D. Pollney and L. Rezzolla (2008). Constraint-preserving boundary treatment for a harmonic formulation of the Einstein equations. *Classical and Quantum Gravity*, 25(17), 175020.
- [39] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997-2027, aug 2008. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>
- [40] Bojowald, M. (2010) *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [41] Poisson, E. (2004). *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press. doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511606601>
- [42] Kroon, J.A.V. (2023) *Conformal Methods in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press. doi <https://doi.org/10.1017/9781009291309>
- [43] M. P. Dabrowski, J. Garecki and D. B. Blaschke, (2009) "Conformal transformations and conformal invariance in gravitation," *Annalen Phys.* **18**, 13-32 doi:10.1002/andp.200810331 [arXiv:0806.2683 [gr-qc]].
- [44] M. Thierfelder, S. Bernuzzi and B. Bruegmann, (2011). "Numerical relativity simulations of binary neutron stars," *Phys. Rev. D* **84**, 044012 doi:10.1103/PhysRevD.84.044012 [arXiv:1104.4751 [gr-qc]].
- [45] N. Jansen, B. Bruegmann and W. Tichy, (2006). "Numerical stability of the AA evolution system compared to the ADM and BSSN systems," *Phys. Rev. D* **74**, 084022 doi:10.1103/PhysRevD.74.084022 [arXiv:gr-qc/0310100 [gr-qc]].
- [46] Brill, D., & Lindquist, R. (1963). Interaction Energy in Geometrostatics. *Phys. Rev.*, 131, 471-476.
- [47] Misner, C. W. (1963) The method of images in geometrostatics. *Ann. Phys.*, 24:102-117 doi: 10.1016/0003-4916(63)90067-8
- [48] Anninos, P., D. Bernstein, S. R. Brandt, D. Hobill, E. Seidel, & L. Smarr (1994). Dynamics of black hole apparent horizons. *Phys. Rev. D* 50, 3801-3815.
- [49] Bowen, J., & York, J. (1980). Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions. *Phys. Rev. D*, 21, 2047-2056.

- [50] Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Grandclément, P., & Novak, J. (2004). Constrained scheme for the Einstein equations based on the Dirac gauge and spherical coordinates. *Physical Review D*, 70(10).
- [51] Cook, G. B. (1991). Initial data for axisymmetric black-hole collisions. *Phys. Rev.*, D44(10):2983.
- [52] Brandt, S. & Brügmann, B. (1997). A Simple construction of initial data for multiple black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3606-3609.
- [53] York, J. W. (1999). Conformal "Thin-Sandwich" Data for the Initial-Value Problem of General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 82, 1350-1353.
- [54] H.P. Pfeiffer (2004) The Initial value problem in numerical relativity, Proceedings Miami Waves Conference, gr-qc/0412002
- [55] H.P. Pfeiffer, J.W. York (2003): Extrinsic curvature and the Einstein constraints, *Phys. Rev. D* 67, 044022
- [56] Pfeiffer, H. & York, J. (2005). Uniqueness and Nonuniqueness in the Einstein Constraints. *Physical Review Letters*. **95**, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.091101>
- [57] D. Hilditch, (2013). "An Introduction to Well-posedness and Free-evolution," *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1340015 doi:10.1142/S0217751X13400150
- [58] O. A. Reula, (1998). Hyperbolic Methods for Einstein's Equations. *Living Rev. Relativ.* 1, 3. <https://doi.org/10.12942/lrr-1998-3>
- [59] O. A. Reula, (2004). "Strongly hyperbolic systems in general relativity," *J. Hyperbol. Diff. Equat.* **1**, no.02, 251-269 doi:10.1142/S0219891604000111 [arXiv:gr-qc/0403007 [gr-qc]].
- [60] aki Shinkai, H. and Yoneda, G. (2002). Re-formulating the einstein equations for stable numerical simulations: Formulation problem in numerical relativity.
- [61] O. Sarbach, G. Calabrese, J. Pullin, and M. Tiglio. (2002) Hyperbolicity of the BSSN system of Einstein evolution equations. *Phys. Rev. D*, 66:064002, gr-qc/0205064.
- [62] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro, (1999). On the numerical integration of Einstein's field equations, *Phys.Rev.* D59 024007, gr-qc/9810065.
- [63] M. Shibata and T. Nakamura, (1995). Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case, *Phys. Rev. D* 52 5428-5444.
- [64] Nakamura, T., Oohara, K., and Kojima, Y. (1987). General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 90:1-218,
- [65] Beyer, H.R., & Sarbach, O.L. (2004). On the well posedness of the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formulation of Einstein's field equations. *Physical Review D*, 70, 104004.
- [66] Papallo, G. (2019). Causality and the initial value problem in Modified Gravity [Apollo - University of Cambridge Repository]. <https://doi.org/10.17863/CAM.24726>

- [67] Bernuzzi, S., and Hilditch, D. (2010). Constraint violation in free evolution schemes: Comparing the BSSNOK formulation with a conformal decomposition of the Z4 formulation. *Physical Review D*, 81(8).
- [68] Campanelli, M., Lousto, C., Marronetti, P., and Zlochower, Y. (2006). Accurate Evolutions of Orbiting Black-Hole Binaries without Excision. *Phys. Rev. Lett.*, 96, p.111101.
- [69] Brown, J.D., Diener, P., Field, S.E., Hesthaven, J.S., Herrmann, F., Mrou'e, A.H., Sarbach, O.L., Schnetter, E., Tiglio, M., & Wagman, M. (2012). Numerical simulations with a first-order BSSN formulation of Einstein's field equations. *Physical Review D*, 85, 084004.
- [70] D. Alic, C. Bona-Casas, C. Bona, L. Rezzolla and C. Palenzuela, "Conformal and covariant formulation of the Z4 system with constraint-violation damping," *Phys. Rev. D* **85**, 064040 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.064040 [arXiv:1106.2254 [gr-qc]].
- [71] Mavromatos N. E, Notes on General Relativity and Cosmology, 2023, National Technical University of Athens - King's College London,
- [72] Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος - Σημειώσεις Γενικής Σχετικότητας και Κοσμολογίας, 8ο εξάμηνο, ΣΕΜΦΕ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
- [73] Κώστας Δ. Κόκκοτας - Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2008
- [74] Αγάθος, Μ. (2007) Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Διπλωματική Εργασία, ΣΕΜΦΕ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο <https://www.physics.ntua.gr/konstant/homepage/diplomatikes/07.Agathos.pdf>
- [75] Παπαδούδης, Σ. (2010) Initial Value Problem in General Relativity, Διπλωματική Εργασία, ΣΕΜΦΕ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο <https://www.physics.ntua.gr/konstant/homepage/diplomatikes/10.Papadoudis.pdf>